

تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ضخیم دوار با ریزساختار مدرج تابعی

براساس مدل توانی به روش تبدیل دیفرانسیل

فرزاد ابراهیمی^۱ و محدثه مختاری^۲

دانشکده فنی مهندسی

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۱/۱۹)

چکیده

در این مقاله، رفتار ارتعاشی تیر مدرج تابعی دوار براساس تئوری تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفته است. خواص فیزیکی و مکانیکی تیر مدرج تابعی مطابق تابع توانی از جزء حجمی مواد تشکیل‌دهنده آن در راستای ضخامت تیر مدل شده است. معادلات حاکم با روش عددی تبدیل دیفرانسیل حل شده است. اثر تغییرشکل برشی و اینرسی دورانی تیر در نظر گرفته شده است. برای صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از کارهای گذشته مقایسه شده است. تأثیر پارامترهای مختلف همچون شاخص جزء حجمی ماده مدرج تابعی، ضریب لاغری، سرعت دورانی و شعاع هاب تیر دوار بر روی فرکانس طبیعی اول و فرکانس‌های بالاتر و شکل مدهای مختلف آن بررسی شده است. نتایج حاکی از آن است که با تغییر شاخص جزء حجمی می‌توان مقادیر فرکانس طبیعی را به‌صورت دلخواه تغییر داد. همچنین با افزایش ضریب لاغری فرکانس طبیعی به‌طور محسوس افزایش می‌یابد ولی شعاع هاب تأثیر محسوس روی فرکانس طبیعی ندارد. مؤثرترین پارامتر بر تغییرات فرکانس طبیعی تیر مدرج تابعی دوار، تغییرات سرعت طوقه دوار است که با افزایش سرعت شیب تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سایر پارامترها بیشتر است. نتایج حاصل مدل ساده‌شده‌ای برای مطالعه پارامتری و درک مشخصات ارتعاشی تیر مدرج تابعی دوار ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، ماده مدرج تابعی، تیر دوار، روش تبدیل دیفرانسیل

Free Vibration Analysis Of Thick Functionally Graded Rotating Beam By Differential Transform Method

F. Ebrahimi and M. Mokhtari

Mechanical Engineering Department

Imam Khomeini International University of Ghazvin

(Received: 16/May/2014; Accepted: 8/February/2015)

ABSTRACT

In this paper, the free vibration of a functionally graded (FG) rotating beam based on Timoshenko beam theory has been analyzed. The FG rotating beam assumed to be graded across the thickness and the material properties of the FG beam assumed to vary continuously through the thickness of the beam according to a power law distribution of the volume fraction of the constituent materials. Governing equations are solved using differential transform method. To verify the present analysis, the results of this study are compared with the available results from the existing literature. The effect of beam parameters such as constituent volume fractions, slenderness ratios, hub rotation speed and hub radius on the natural frequencies and mode shapes of the rotating beam is comprehensively investigated. The functionally graded composite material plays a significant role in vibration characteristics of the rotating FGM thick beams.

Keywords: Free Vibration, Functionally Graded Material, Rotating Beam, Differential Transform Method

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): febrahimi@eng.ikiu.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: mokhtarimohadese@gmail.com

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی^۱ (مواد هدفمند) مواد کامپوزیتی هستند که خواص مکانیکی آنها به طور پیوسته در سطح مقطع تغییر می‌کند. معمولاً مواد مدرج تابعی از مخلوطی از سرامیک‌ها و فلزات ساخته می‌شوند. خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی با تغییر جزء حجمی مواد سازنده می‌تواند طراحی شود و به عنوان نمونه برای بهبود مقاومت، چقرمگی و توانایی تحمل دمای بالا می‌توان کسر حجمی مواد سازنده را تغییر داد. امروزه مواد مدرج تابعی به دلیل اطمینان از تغییر ملایم توزیع تنش، به حداقل رساندن یا حذف تمرکز تنش و افزایش مقاومت پیوستگی در محل اتصال به مواد مرکب سنتی ترجیح داده می‌شوند. نوع متداول مواد هدفمند به صورت کامپوزیتی از فلز در ماتریسی از سرامیک می‌باشد، چنین ماده‌ای می‌تواند وظایف ظاهراً ناسازگار همچون مقاومت حرارتی و خوردگی بسیار بالای سرامیک‌ها از یک سو و استحکام، سفتی و قابلیت ماشین‌کاری بالای فلزات از سوی دیگر را بدون ایجاد نایکنواختی و یا تمرکز تنش به صورت یکجا دارا باشد. به دلیل وجود چنین خواصی مواد مدرج تابعی در بخش‌های گوناگون مهندسی همچون صنایع فضایی، هوایی، دفاعی، بیوپزشکی و ساخت اتومبیل‌ها به کار رفته‌اند و اخیراً در ابزارهای مورد استفاده در فرایندهای گداخت هسته‌ای همانند راکتورهای هسته‌ای نیز به کار گرفته شده‌اند. ضمن آنکه در سال‌های اخیر رفتار ارتعاشاتی اعضای سازه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای اهمیت قابل توجهی هم در زمینه‌های تحقیقاتی و هم در زمینه‌های صنعتی بوده است.

در این میان به هنگام استفاده از روش‌هایی همچون روش المان محدود نیازمند گسسته سازی سامانه می‌باشیم. علاوه بر این در اعمال روش‌های تقریبی همانند روش ریتز و گلرکین گاهی نمی‌توان تمامی مقادیرهای ویژه و تابع‌های ویژه را محاسبه کرد. روش سنتی حل مسائل توسط سری تیلور نیز نیازمند محاسبات نمادین می‌باشد و زمان زیادی را برای حل مسائل صرف می‌کند. علاوه بر این حل معادلات مرتبه بالا با استفاده از این روش دشوار می‌باشد. روش تبدیل دیفرانسیلی^۲ که در این تحقیق به کار گرفته شده است، روشی نیمه تحلیلی مبتنی بر سری تیلور می‌باشد که توانسته است بر تمامی مشکلات ذکر شده غلبه نماید. این روش بدون نیاز به

خطی‌سازی و گسسته‌سازی به معادلات دیفرانسیل جزئی اعمال می‌شود و آن را به مجموعه‌ای از معادلات جبری تبدیل می‌کند. حجم محاسبات را تا حد زیادی کاهش داده و پاسخ را با دقت و سرعت همگرایی بالا به دست می‌آورد. مفهوم تبدیل دیفرانسیلی ابتدا در سال ۱۹۸۶ در مسائل مهندسی مطرح شد و برای حل معادلات مقدار اولیه خطی و غیرخطی در تحلیل مدارهای الکتریکی به کار رفت [۱]. این روش برای حل دقیق و تقریبی مسائل خطی و غیرخطی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی مناسب است. روش تبدیل دیفرانسیلی نسبت به روش سری‌های توانی فرکانس‌های طبیعی را دقیق‌تر پیش‌بینی می‌کند. به علاوه در روش المان محدود بازه حل مسأله به چندین المان تقسیم می‌شود و دقت حل بستگی به تعداد المان‌ها دارد درحالی‌که روش تبدیل دیفرانسیلی مستقیماً برای حل معادلات حاکم بر مسأله استفاده می‌شود و حل برای کل دامنه به دست می‌آید و در واقع دامنه به یک المان تقسیم می‌شود. همچنین در این روش برخلاف روش المان محدود اعمال شرایط مرزی بسیار ساده است و شرایط مرزی در دو انتهای دامنه (دو سر تیر) اعمال می‌شود ولی در روش المان محدود برای هر المان شرایط مرزی اعمال می‌شود. این روش برای تحلیل ارتعاشات تیرها به کار رفته است. از جمله ارتعاشات آزاد جانبی تیر تیموشنکو تابیده^۳ چرخان تحت بار محوری با استفاده از این روش توسط چن^۴ و هو^۵ [۲] مورد بررسی قرار گرفته است. می^۶ [۳] نیز از روش تبدیل دیفرانسیلی برای تحلیل تیرهای یکنواخت چرخان استفاده کرده است.

در زمینه تحلیل ارتعاشات تیرهای دوار مطالعات بسیاری انجام شده است. در این زمینه هاجز^۷ و روتکوسکی^۸ [۴] ارتعاشات آزاد تیرهای دوار را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. رایت^۹ و همکاران [۵] مدهای ارتعاشاتی تیرهایی که تحت نیروی گریز از مرکز قرار دارند را مورد مطالعه قرار دادند، بانرزی^{۱۰} [۶] ارتعاشات آزاد تیرهای یک‌پارچه و باریک‌شونده تحت نیروی گریز از مرکز را با استفاده از روش ماتریس سختی^{۱۱} ارائه کرده است. استفورد^۱ و گورگیتو^۲ [۷]

3- Twisted

4- Chen

5- Ho

6- Mei

7- Hodges

8- Rutkowski

9- Wright

10- Banerjee

11- Dynamic Stiffness Method

1- Functionally Graded Materials

2- Differential Transformation Method

مواد مدرج تابعی را با هر دو نوع توزیع خواص مواد به صورت توابع توانی و نمایی بررسی کرده و نشان داد که رفتار ارتعاشاتی تیرهای هدفمند به دلیل وجود کوپل کششی-خمشی با تیرهای همگن متفاوت است. جعفری و فتح‌آبادی [۱۷] ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو تحت بار متحرک و ساخته شده از ماده مدرج تابعی را مطالعه کردند. موسوی و سعیدی [۱۸] ارتعاشات آزاد ورق ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی همسانگرد و همسانگرد عرضی را مورد بررسی قرار دادند. پرادهان^{۱۶} و چاکراورتی^{۱۷} [۱۹] ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی و تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش ریلی-ریتز بررسی کردند. ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی را با روش تحلیلی و برای شرایط مرزی مختلف توسط سینا و همکاران [۲۰] ارائه شده است. سیمسک^{۱۸} [۲۱] ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی را برای تئوری تیرهای مختلف و شرایط مرزی مختلف بررسی کرد. در تمامی مقالات فوق برای تیر مدرج تابعی ساکن تحلیل انجام شده است. شهباب^{۱۹} و همکاران [۲۲] تیر مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر در حالت چرخان را بررسی کردند. ایشان توزیع ماده مدرج تابعی را در راستای محور طولی تیر در نظر گرفتند که البته کم کاربردتر است. به علاوه ایشان اثرات مربوط به تغییرشکل برشی و اینرسی دورانی تیر دوار را در نظر نگرفته‌اند. در مقاله حاضر ویژگی‌ها و خواص ارتعاشی تیر تیموشنکو مدرج تابعی چرخان مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله توزیع ماده مدرج تابعی در راستای ضخامت تیر که بیشترین کاربرد را دارد در نظر گرفته شده است درحالی‌که اثرات مربوط به تغییرشکل برشی و اینرسی دورانی تیر دوار نیز لحاظ شده است. مشخصات ارتعاشی تیر ضخیم چرخان با ریز ساختار مدرج تابعی و براساس ویژگی‌های مدل توانی ماده هدفمند به دست آمده است. از روش تبدیل دیفرانسیل به عنوان روشی بسیار کارآمد برای محاسبات فرکانس طبیعی و شکل مد استفاده شده که مطابق محاسبات و مقایسه با کارهای قبلی نتایج بسیار قابل اعتمادی را نشان داده است. ضمن آنکه با مطالعه پارامتری، تاثیر عوامل مختلف همچون شاخص جزء حجمی ماده مدرج تابعی، ضریب لاغری، سرعت دورانی و شعاع

نیز با استفاده از روش تحلیلی تیرهای دوار تیموشنکو را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان در مطالعه‌ای دیگر [۸] فرکانس و شکل مدهای پره‌های دوار^۳ را بررسی کردند. ویژگی‌های ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو چرخان توسط یوکویاما^۴ [۹] ارائه شده است. این درحالی است که دو^۵ و همکاران [۱۰] ارتعاشات تیر تیموشنکو چرخان را با استفاده از سری توانی^۶ مورد مطالعه قرار دادند. ردی^۷ [۱۱] رفتار دینامیکی تیر تیموشنکو را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار داد. ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو دوار را با استفاده از روش تحلیل دیفرانسیلی نیز توسط کایا^۸ [۱۲] بررسی شده است. سیوالک^۹ و کیراسوقلو^{۱۰} [۱۳] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو را با استفاده از روش دی-سی-اس^{۱۱} مورد بررسی قرار دادند.

بررسی ویژگی‌های دینامیکی تیرهای دوار از جمله فرکانس‌های طبیعی آنها اهمیت ویژه و نقش مهمی در طراحی و مدل‌سازی کاربردهای مهندسی مختلفی مانند ماشین‌های دوار، پروانه هواپیما یا کشتی، پره توربین، پره‌های هلی‌کوپتر و بازوهای مکانیکی ربات‌ها دارد. با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد مواد مدرج تابعی، این مواد می‌توانند در ساختار سازه‌های دوار هم بسیار کارآمد باشند.

بررسی پیشینه مواد مدرج تابعی نشان می‌دهد که بیشتر مطالعات انجام‌شده در این زمینه مربوط به صفحات و پوسته‌ها است و تحقیقات کمتری در زمینه تیرهای ساخته‌شده از این مواد صورت گرفته است. لی^{۱۲} [۱۴] یک رویکرد یک‌پارچه جدید را برای بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی و تیموشنکو ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی پیشنهاد کرد. بهاتاچاریا^{۱۳} و کومار^{۱۴} [۱۵] پاسخ ارتعاشات آزاد و خمش تیرهای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی را به دست آوردند. کی^{۱۵} [۱۶] ارتعاشات غیرخطی تیرهای ساخته شده از

- 1- Stafford
- 2- Giurgiutiu
- 3- Rotor Blades
- 4- Yokoyama
- 5- Du
- 6- Power Series
- 7- Reddy
- 8- Kaya
- 9 - Civalek
- 10 - Kiracioglu
- 11- DCS Method
- 12 - Li
- 13- Bhattacharyya
- 14- Kapuria
- 15- Ke

- 16- Pradhan
- 17- Chakraverty
- 18- Şimşek
- 19- Shahba

$$V_c + V_m = 1 \quad (2)$$

رابطه کسر حجمی برای فلز به صورت رابطه (۳) است:

$$V_m = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P \quad (3)$$

P ، شاخص جزء حجمی و متغیر نامنفی است که تغییرات ماده در طول ضخامت را نشان می‌دهد. با توجه به روابط (۱) تا (۳) خواص مؤثر ماده مدرج تابعی به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود:

$$P_f(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + 1/2 \right)^P + P_m \quad (4)$$

۳- به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت

مطابق شکل ۱ محور x در حالت تغییر شکل نیافته بر محور خنثی تیر منطبق است. محور z نیز با محور دوران موازی است (ولی منطبق نیستند) و محور y در صفحه دوران قرار دارد. در اینجا پارامتر x فاصله از نقطه‌ای از لبه تویی چرخ است. u_0 جابه‌جایی عرضی ناشی از نیروی گریز از مرکز است. z فاصله‌ی عمودی از نقطه‌ای از وسط صفحه است. W جابه‌جایی جانبی هر نقطه روی محور خنثی تیر و θ دوران ناشی از خمش می‌باشد.

۳-۱- میدان‌های جابه‌جایی و کرنش

مؤلفه‌های کرنش بر اساس میدان‌های جابه‌جایی در تئوری تیر تیموشنکو و با استفاده از فرض‌ها [۴] مبنی بر حذف ترم‌های بزرگ‌تر از ε^2 به صورت روابط (۵) تا (۷) هستند.

$$\varepsilon_{xx} = u_0' - z\theta' + \frac{(w')^2}{2} \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = w' - \theta \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} \quad (7)$$

۳-۲- محاسبه انرژی کرنشی و جنبشی

انرژی کرنشی تیر ناشی از خمش به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود:

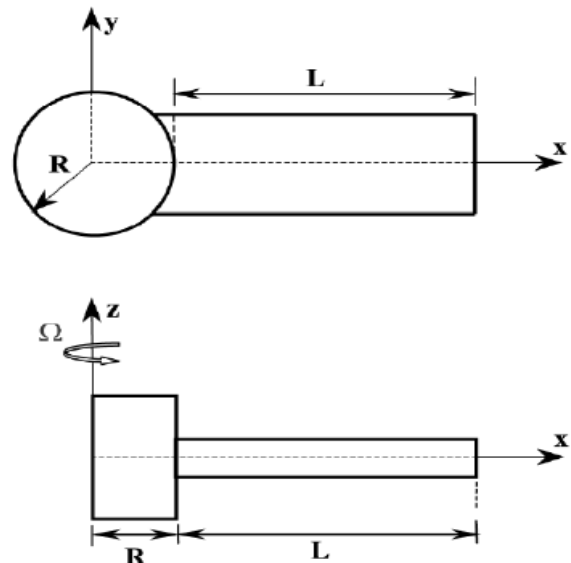
$$U_b = \iiint_V \frac{E(z)\varepsilon^2}{2} dV \quad (8)$$

هاب تیر دوار بر روی فرکانس طبیعی اول و فرکانس‌های بالاتر و شکل مدهای مختلف آن بررسی شده است.

۱- مواد مدرج تابعی

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است یک تیر مستقیم و یکنواخت ساخته شده از ماده مدرج تابعی با طول L ، عرض b و ضخامت h ، با سطح مقطع مستطیلی که روی محیط یک طوقه^۱ با شعاع R نصب شده است. طوقه با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور خود می‌چرخد. یک سامانه مختصات دکارتی به صورتی که محور x در طول محور مرکزی، محور y در جهت عرض و محور z در جهت ضخامت در نظر گرفته شده است. در این تحقیق فرض شده است که تیر مدرج تابعی از سرامیک و فلز ساخته شده و تغییرات خواص در راستای ضخامت (z) است. مدل‌های میکرومکانیکی متفاوتی برای تعیین خواص ماده مدرج تابعی وجود دارد که در این مقاله از مدل توانی^۲ استفاده شده است. بر طبق قانون مخلوط‌ها، خواص مؤثر ماده P_f به صورت رابطه (۱) بیان می‌شوند:

$$P_f = P_c V_c + P_m V_m \quad (1)$$



شکل (۱): مدل فرض شده برای قرارگیری دستگاه مختصات روی تیر.

در این معادله P_c ، P_m ، V_c و V_m ، خواص و کسر حجمی سرامیک و فلز هستند که به صورت رابطه (۲) بهم مربوط می‌شوند:

1- Hub
2- Power Law FGM

با جایگذاری رابطه (۵) در معادله (۸) رابطه (۹) حاصل می‌شود:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{A_0}^L E(z) \left\{ u'_0 - z\theta' + \frac{(w')^2}{2} \right\}^2 dAdx \quad (9)$$

انرژی کرنشی ناشی از برش نیز به صورت رابطه (۱۰) است:

$$U_s = \iiint_V \frac{G(z)\gamma^2}{2} dV \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (۶) و (۷) رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$U_s = \iiint_V \frac{G(z)(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2)}{2} dV \quad (11)$$

با توجه به اینکه در ماده مدرج تابعی مدول الاستیسته تابع است صلبیت خمشی A_2 و صلبیت محوری تیر A_1 مطابق رابطه (۱۲) به دست می‌آیند:

$$(A_1, A_2) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)(1, z^2) dA \quad (12)$$

B_1, B_2 و C نیز به ترتیب پارامترهای اینرسی نرمال و دورانی و ضریب صلبیت برشی تیر هستند که به صورت روابط (۱۳) و (۱۴) تعریف می‌شوند:

$$(B_1, B_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(1, z^2) dA \quad (13)$$

$$C = \int kG(z) dA \quad (14)$$

در روابط فوق ρ, A, E و G به ترتیب چگالی، سطح مقطع، مدول الاستیسته و مدول برشی تیر هستند. k نیز ضریب تصحیح برش است. جابه‌جایی محوری $u'_0(x)$ که در عرض سطح مقطع یکنواخت است مطابق رابطه (۱۵) با کرنش $\epsilon_0(x)$ مرتبط می‌شود:

$$u'_0(x) = \epsilon_0(x) = \frac{T(x)}{A_1} \quad (15)$$

نیروی مرکزگرا که در طول تیر تغییر می‌کند به صورت رابطه (۱۶) است:

$$T(x) = \int_x^L B_1 \Omega^2 (R+x) dx \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2(x)}{A_1} = C_1 \quad (17)$$

با توجه به روابط (۱۷-۱۲) به ترتیب انرژی کرنشی ناشی از خمش و انرژی کرنشی ناشی از برش به صورت روابط زیر به دست می‌آیند:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L (A_2(\theta')^2 + T(w')^2) dx + C_1 \quad (18)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L C(w' - \theta) dx \quad (19)$$

انرژی کرنشی کل تیر نیز به صورت رابطه (۲۰) است:

$$U = U_s + U_b \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۲۰) انرژی کرنشی کل تیر، U ، به صورت رابطه (۲۱) حاصل می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L A_2(\theta')^2 + T(w')^2 + C(w' - \theta) dx \quad (21)$$

و انرژی جنبشی تیر نیز به صورت رابطه (۲۲) است:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{A_0}^L (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \rho dAdx \quad (22)$$

برای محاسبه انرژی جنبشی نیاز به محاسبه مؤلفه‌های سرعت است که در ادامه انجام خواهد شد. مؤلفه‌های سرعت ناشی از دوران برای یک نقطه روی تیر به صورت زیر است.

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \Omega \vec{k} \times \vec{r}_1 \quad (23)$$

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

سرعت کل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{V} = (\dot{x}_1 - \Omega y_1) \vec{i} + (\dot{y}_1 + \Omega x_1) \vec{j} + \dot{z}_1 \vec{k} \quad (24)$$

$$V_x = -\xi \dot{\theta} - \eta \Omega \quad (1-25)$$

$$V_y = (R + x + u_0 - \xi \theta) \Omega \quad (ب-25)$$

$$V_z = \dot{w} \quad (ج-25)$$

$$\eta^2 = \frac{B_1 L^4 \Omega^2}{A_2}, \quad r^2 = \frac{B_2}{A_1 L^2}$$

$$\mu^2 = \frac{B_1 L^4 \omega^2}{A_2}, \quad s^2 = \frac{A_2}{kCL^2}$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad W(\xi) = \frac{\bar{W}}{L}$$

$$\delta = \frac{R}{L} \quad (34)$$

در رابطه (۳۴)، r اینرسی دورانی، δ شعاع طوقه گردان، s پارامتر تغییرشکل برشی، η پارامتر سرعت دوران تیر، μ پارامتر فرکانس طبیعی تیر، W پارامتر بی بعد تغییرشکل ناشی از خمش و ξ پارامتر بی بعد فاصله هستند. با استفاده از پارامترهای بی بعد فوق، نیروی مرکزگرا و معادلات حاکم بر حرکت به صورت روابط زیر حاصل می شوند:

$$T(\xi) = B_1 \Omega^2 L^2 \left[\delta(1-\xi) + \frac{(1-\xi^2)}{2} \right] \quad (35)$$

$$\bar{\theta}'' + \eta^2 r^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \bar{\theta} + \frac{1}{s^2} (\bar{W}' - \bar{\theta}) = 0 \quad (36)$$

$$\left\{ \left[\delta(1-\xi) + \frac{(1-\xi^2)}{2} \right] \bar{W}' \right\}' + \left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \bar{W} + \frac{1}{s^2 \eta^2} (\bar{W}'' - \bar{\theta}') = 0. \quad (37)$$

۳-۳- معرفی و استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل
تبدیل دیفرانسیل تابع $y(x)$ به صورت رابطه زیر تعریف می شود [۲۳]:

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (38)$$

رابطه معکوس تبدیل دیفرانسیل $Y(k)$ نیز به صورت رابطه زیر است [۲۳]:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n Y(k) \quad (39)$$

در روابط فوق، $y(x)$ تابع اصلی و $Y(k)$ تابع تبدیل یافته هستند. از ترکیب روابط فوق می توان نتیجه گرفت:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (40)$$

در رابطه فوق، علامت نقطه نشان دهنده مشتق نسبت به زمان، مکان یک نقطه روی تیر پس از تغییرشکل خمشی، W جابه جایی عرضی، η فاصله عرضی یک نقطه از محور دوران و ξ فاصله عمودی یک نقطه از صفحه میانی تیر می باشد. با جای گذاری روابط (۲۴-۲۵) در رابطه (۲۲) انرژی جنبشی تیر به صورت زیر حاصل می شود:

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^L [B_1 \dot{\omega}^2 + A_2 \dot{\theta}^2 + A_2 \Omega^2 \theta^2] dx \quad (26)$$

برای استخراج معادله حرکت از اصل همیلتون مطابق رابطه (۲۸) استفاده شده است:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta \tau) = 0 \quad (27)$$

که در این رابطه، δ نماد تغییرات، t زمان، t_1 و t_2 به ترتیب زمان اولیه و ثانویه، δU اختلاف مجازی انرژی کرنشی، δV اختلاف مجازی انرژی پتانسیل و $\delta \tau$ اختلاف مجازی انرژی جنبشی تیر است. بنابراین معادلات حرکت براساس اصل همیلتون به صورت زیر به دست می آید:

$$-B_2 \ddot{\theta} + B_2 \Omega^2 + A_2 \theta'' + kC(W' - \theta) = 0 \quad (28)$$

$$-B_1 \ddot{W} + (TW')' + kC(W'' - \theta') = 0 \quad (29)$$

جدول (۱): شرایط مرزی تیر یک سرگیردار.

$x=0$	$x=L$	شرایط مرزی
$W(0) = 0$ $\theta(0) = 0$	$\theta'(1) = 0$ $W'(1) - \theta(1) = 0$	یک سرگیردار

شرایط مرزی برای معادلات حاکم مطابق جدول ۱ می باشد. با فرض نوسان هارمونیک ساده، θ و W می توانند به صورت روابط (۳۰) و (۳۱) نوشته شوند.

$$W(x, t) = \bar{W}(x) e^{i\omega t} \quad (30)$$

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x) e^{i\omega t} \quad (31)$$

حال با جایگذاری روابط (۳۰) و (۳۱) در روابط (۲۸) و (۲۹)، معادلات حرکت به صورت زیر حاصل می شود:

$$B_2 \omega^2 \bar{\theta} + B_2 \Omega^2 + A_2 \bar{\theta}'' + kC(\bar{W}' - \bar{\theta}) = 0. \quad (32)$$

$$B_1 \omega^2 \bar{W} + (T\bar{W}')' + kC(\bar{W}'' - \bar{\theta}') = 0 \quad (33)$$

پارامترهای بی بعد براساس ویژگی های ماده مدرج تابعی، مطابق روابط (۳۴) لحاظ شده است:

$$\left(\delta + 0.5 + \frac{1}{s^2\eta^2}\right)(k+1)(k+2)W(k+2) - \delta(k+1)^2 W(k+1) + \left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - \frac{k(k+1)}{2}\right)W(k) - \frac{1}{s^2\eta^2}(k+1) \theta(k+1) = 0 \quad (141)$$

$$(k+1)(k+2)\theta(k+2) + \left[\eta^2 r^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) - \frac{1}{s^2}\right]\theta(k) + \frac{1}{s^2}(k+1)W(k+1) = 0 \quad (141-b)$$

$$\xi = 0 \quad \sum_{i=0}^n k * \theta(k) = 0 \quad (142-a)$$

$$\xi = 1 \quad \sum_{i=0}^n k * W(k) - \theta(k) = 0 \quad (142-b)$$

در روابط فوق، $W(k)$ و $\theta(k)$ به ترتیب فرم تبدیل یافته $W(\xi)$ و $\theta(\xi)$ هستند. حال از روابط (141) و (142)، $W(k)$ و $\theta(k)$ را به دست آورده و در شرایط مرزی جایگذاری می شود. به عنوان نمونه با مقادیر، $\eta = 2, \delta = 0$ و با استفاده از روابط (141) و (142) مقادیر دو تابع $W(k)$ و $\theta(k)$ ، به ازای $k = 2, 3, \dots$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$W(2) = 0.4994c_1$$

$$W(3) = -c_2 (256.0769 + 2.1648 * 10^{-8} \omega^2)$$

$$\theta(2) = -76.9231c_2$$

$$\theta(3) = -c_1 (-0.3328 + 6.9474 * 10^{-9} \omega^2)$$

c_1 و c_2 ، مقادیر ثابت مجهول هستند. حال با جایگذاری $W(i)$ و $\theta(i)$ در معادلات مربوط به شرایط مرزی (142) رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$M_{j1}^{(n)} c_1 + M_{j2}^{(n)} c_2 = 0, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (143)$$

رابطه (40) نشان می دهد که مفهوم تبدیل دیفرانسیل از بسط سری تیلور استخراج شده است. در جدول ۲ روابط اساسی مربوط به روش تبدیل دیفرانسیل آمده است. روابط مورد نیاز برای تبدیل دیفرانسیل شرایط مرزی نیز در جدول ۳ آمده است.

جدول (۲): روابط اساسی روش تبدیل دیفرانسیل.

تابع تبدیل یافته	تابع اصلی
$Y(k) = \lambda \Phi(k)$	$y(x) = \lambda \varphi(x)$
$Y(k) = \Phi(k) \pm \Theta(k)$	$y(x) = \varphi(x) \pm \theta(x)$
$Y(k) = (k+1)\Phi(k+1)$	$y(x) = \frac{d\varphi}{dx}$
$Y(k) = (k+1)(k+2)\Phi(k+1)$	$y(x) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$
$Y(k) = \sum_{l=0}^k \Phi(l)\Theta(k-l)$	$y(x) = \varphi(x)\theta(x)$
$Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$	$y(x) = x^m$

جدول (۳): روابط اساسی تبدیل دیفرانسیل شرایط مرزی.

$X = 0$		$X = 1$	
شرط مرزی اولیه	شرط مرزی انتقال یافته	شرط مرزی اولیه	شرط مرزی انتقال یافته
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$	$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F[k] = 0$
$\frac{df}{dx}(0) = 0$	$F[1] = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF[k] = 0$
$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 0$	$F[2] = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F[k] = 0$
$\frac{d^3f}{dx^3}(0) = 0$	$F[3] = 0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F[k] = 0$

با به کارگیری روابط جدول ۲-۳ معادلات حاکم بر حرکت و نیز شرایط مرزی به صورت روابط زیر تبدیل می شوند:

کمتری حاصل شده است به این صورت که همگرایی جوابها از تکرار ۳۳ برای فرکانس طبیعی اول آغاز شده است. روش حل عددی تبدیل دیفرانسیل روشی کارآمد و با دقت مناسب است. این روش برای محاسبات در مقاله حاضر به کار گرفته شده و نتایج با نتایج حاصل از دو روش تحلیلی [۲۰] و روش عددی [۲۱] مقایسه شده است. همان طور که در جداول ۵-۶ مشاهده می شود تطابق نتایج مقاله حاضر با مرجع [۲۰] که حل تحلیلی ارائه داده است، بسیار مناسب است ولی در برخی موارد با مرجع [۲۱] اختلاف وجود دارد. علت این امر وجود خطا در محاسبات مرجع [۲۱] به علت استفاده از روش عددی و حذف ترم $\frac{w'^2}{2}$ در میدان جابه جایی می باشد. مشخصات ماده سازنده تیر در جدول ۴ آمده است. ضمن آنکه همگرایی فرکانس های طبیعی تیر چرخان در حالت $P=0, \eta=8$ در جدول ۷ ارائه شده است.

جدول (۴): مشخصات مواد سازنده تیر مدرج تابعی [۲۰].

ویژگی	واحد	آلومینیوم	آلومینا (Al_2O_3)
E	GPa	۷۰	۳۸۰
ρ	Kg/m ³	۲۷۰۰	۳۸۰۰
ν	-	۰/۲۳	۰/۲۳

جدول (۵): مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد در شرایط مرزی یک سر گیردار با مرجع [۲۰].

نسبت طول به قطر	$L/h=10$	$L/h=30$	$L/h=100$
مقاله حاضر	۰/۹۸۵۸	۰/۹۹۲۲	۰/۹۹۳۰
مرجع [۲۰]	۰/۹۹۶	۱/۰۰۳	۱/۰۰۳
درصد اختلاف	۱/۰۳۴۶	۱/۰۸۸۴	۱/۰۰۷۰

جدول (۶): مقایسه فرکانس طبیعی اول بی بعد در شرایط مرزی یک سر گیردار و $L/h=5$ با مرجع [۲۱].

درصد اختلاف	مرجع [۲۱]	مقاله حاضر	شاخص جزء حجمی (P)
۰/۱۵۸۴	۱/۸۹۴۷	۱/۸۹۴۴	۰
۰/۷۲۵۳۷	۱/۷۶۵۵	۱/۷۷۸۴	۰/۲
۳/۴۱۰۱۸	۱/۶۱۷۳	۱/۶۷۴۴	۰/۵
۷/۹۵۲۶۹	۱/۴۶۳۰	۱/۵۸۹۴	۱
۶/۳۷۹۵۰	۱/۲۲۳۹	۱/۳۰۷۳	۱۰
۰/۵۹۵۷۲	۱/۹۸۴۵	۰/۹۹۰۴	فلز

که در رابطه فوق، $M_{j1}^{(n)}$ و $M_{j2}^{(n)}$ چند جمله ای هایی بر حسب ω خواهند بود. فرم ماتریسی معادله (۴۳) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{bmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (44)$$

بنابراین معادله مقدار ویژه از رابطه (۴۵) به دست می آید:

$$\begin{vmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

با حل معادله (۴۵) مقادیر ویژه $\omega = \omega_i^{(n)}$ به دست می آیند. نشان دهنده فرکانس طبیعی n ام در تکرار m ام است. تعداد تکرار با توجه به رابطه زیر و مقدار ε مشخص می شود:

$$|\omega_i^{(n)} - \omega_i^{(n-1)}| < \varepsilon \quad (46)$$

در این مقاله $\varepsilon = 0.0001$ در نظر گرفته شده است که نشان دهنده دقت محاسبات تا ۴ رقم اعشار می باشد. الگوریتم محاسبات مطابق روش تبدیل دیفرانسیل توضیح داده شده در نرم افزار MATLAB نوشته و مقادیر محاسبه شده اند.

۴- بحث و بررسی نتایج

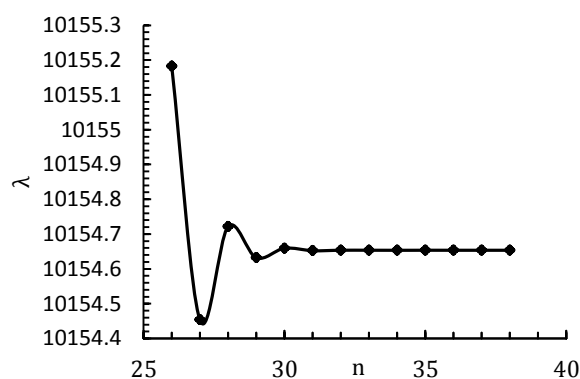
در این بخش داده های مربوط به فرکانس طبیعی اول و دوم برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ضخیم مدرج تابعی چرخان یک سر گیردار با سرعت های نرمال متفاوت و برای نسبت های طول به ضخامت (ضریب لاغری) مختلف بررسی شده است. در تمامی محاسبات ضریب برش برای تیر تیموشنکو $k = \frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است. پس از به دست آوردن فرکانس طبیعی با استفاده از رابطه (۴۷) مقدار فرکانس طبیعی بی بعد تیر مدرج تابعی به دست می آید:

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (47)$$

مقایسه فرکانس طبیعی اول بی بعد در شرایط مرزی یک سر گیردار با مراجع دیگر در جداول ۵-۶ تطابق بسیار خوبی با نتایج ارائه شده در تحقیقات پیشین را نشان می دهند. در شکل ۲ نیز همگرایی روش تبدیل دیفرانسیل برای تیر چرخان با مقادیر $P=0.2, \eta=8$ بررسی شده است. نتایج برای فرکانس طبیعی چهارم تا ۴ رقم دقت در تکرار ۳۹ حاصل شده است و برای فرکانس های طبیعی پایین تر در تکرارهای

جدول (۷): همگرایی فرکانس‌های طبیعی تیر چرخان $\eta = 8$ ، $P = 0$.

n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
۲۷	۱۰۱۵۵.۱۸۲۸	۲۹۸۹۲.۸۳۷۲	۶۰۶۹۴.۳۴۶۷	۹۶۰۷۵.۳۳۲۲
۲۸	۱۰۱۵۴.۶۵۳۷	۲۹۸۹۳.۲۳۳۵	۶۰۶۹۴.۴۸۸۱	۹۶۰۷۴.۶۱۲۰
۲۹	۱۰۱۵۴.۷۲۱۷	۲۹۸۹۳.۰۲۰۶	۶۰۶۹۴.۴۳۵۳	۹۶۰۷۴.۳۲۶۵
۳۰	۱۰۱۵۴.۶۳۲۲	۲۹۸۹۳.۱۲۴۰	۶۰۶۹۴.۴۴۶۴	۹۶۰۷۴.۳۰۸۱
۳۱	۱۰۱۵۴.۶۵۹۲	۲۹۸۹۳.۰۷۸۱	۶۰۶۹۴.۴۴۷۲	۹۶۰۷۴.۲۳۶۱
۳۲	۱۰۱۵۴.۶۵۲۳	۲۹۸۹۳.۰۹۶۵	۶۰۶۹۴.۴۴۶۴	۹۶۰۷۴.۲۴۵۹
۳۳	۱۰۱۵۴.۶۵۳۶	۲۹۸۹۳.۰۸۹۱	۶۰۶۹۴.۴۴۷۸	۹۶۰۷۴.۲۳۶۲
۳۴	۱۰۱۵۴.۶۵۳۶	۲۹۸۹۳.۰۹۱۷	۶۰۶۹۴.۴۴۷۳	۹۶۰۷۴.۲۳۸۴
۳۵	۱۰۱۵۴.۶۵۳۴	۲۹۸۹۳.۰۹۰۷	۶۰۶۹۴.۴۴۷۶	۹۶۰۷۴.۲۳۷۴
۳۶	۱۰۱۵۴.۶۵۳۵	۲۹۸۹۳.۰۹۱۱	۶۰۶۹۴.۴۴۷۵	۹۶۰۷۴.۲۳۷۷
۳۷	۱۰۱۵۴.۶۵۳۵	۲۹۸۹۳.۰۹۰۹	۶۰۶۹۴.۴۴۷۶	۹۶۰۷۴.۲۳۷۶
۳۸	۱۰۱۵۴.۶۵۳۵	۲۹۸۹۳.۰۹۱۰	۶۰۶۹۴.۴۴۷۶	۹۶۰۷۴.۲۳۷۶



شکل (۲): همگرایی فرکانس طبیعی اول تیر چرخان $P = 0, \eta = 8$.

در جدول ۸ نیز فرکانس طبیعی تیر چرخان مدرج تابعی با شاخص‌های جزء حجمی و سرعت‌های دورانی مختلف ارائه شده است. با توجه به داده‌های جدول ۸ در می‌یابیم که با افزایش شاخص جزء حجمی ماده مدرج تابعی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد، با توجه به اینکه در $P = 0$ تیر از جنس سرامیک و در $(P \rightarrow \infty)$ ماده به سمت فلز می‌رود می‌دانیم که افزایش نمایه باعث کاهش مدول الاستیسیته و صلبیت خمشی می‌شود و در واقع تیر انعطاف پذیر می‌شود و با کاهش سختی ماده فرکانس طبیعی آن کاهش می‌یابد. شکل‌های ۳-۴ نیز گویای همین روند است.

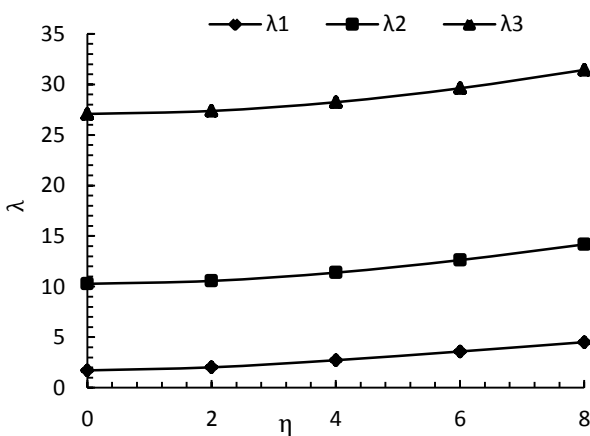
به‌علاوه مشخص است که شیب نمودار با افزایش شاخص جزء حجمی کاهش می‌یابد. در $L/h=5, \eta=2$ با تغییر شاخص جزء حجمی از $0/2$ به 2 ، $24/53\%$ و از 100 به $1000/5\%$ کاهش در فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. همچنین با افزایش سرعت نرمال طوقه دوار فرکانس طبیعی اول تا سوم تیر مدرج تابعی افزایش می‌یابد. به‌عنوان نمونه با افزایش سرعت چرخش طوقه دوار از 2 به 4 در $P=2$ در فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم به ترتیب 35% ، 7.8% و 3.2% افزایش در فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. در شکل ۵ نیز تغییرات سه فرکانس طبیعی اول تیر با سرعت بی‌بعد نشان داده شده است.

جدول (۸): فرکانس طبیعی تیر چرخان مدرج تابعی در سرعت‌ها و شاخص‌های جزء حجمی متفاوت، $L/h = 10$.

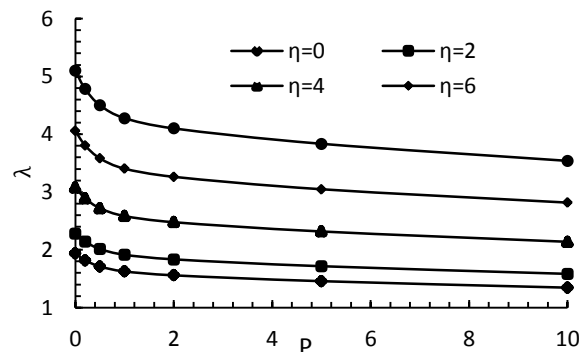
$\eta = 8$	$\eta = 6$	$\eta = 4$	$\eta = 2$	$\eta = 0$	فرکانس طبیعی	شاخص جزء حجمی
۰۵/۰۹۸	۰۴/۰۵۷	۳/۰۸۰۱	۲/۲۸۱۵	۱/۹۳۸۱	λ_1	۰
۱۶/۰۳۱۴	۱۴/۲۷۴۳	۱۲/۸۶۶۹	۱۱/۹۴۰۸	۱۱/۶۱۵۵	λ_2	
۳۵/۴۹۱۵	۳۳/۴۳۴۹	۳۱/۸۷۰۱	۳۰/۸۸۶۵	۳۰/۵۵۰۵	λ_3	
۴/۷۸۲۹	۳/۸۰۶۱	۲/۸۸۹۶	۲/۱۴۰۵	۱/۸۱۸۳	λ_1	$0/2$
۱۵/۰۵۱۶	۱۳/۴۰۳۹	۱۲/۰۸۴۴	۱۱/۲۱۶۳	۱۰/۹۱۱۴	λ_2	
۳۳/۳۶۸۴	۳۱/۴۴۲۹	۲۹/۹۷۸۴	۲۹/۰۵۸۲	۲۸/۷۴۳۸	λ_3	
۴/۵۰۲۸	۳/۵۸۳۲	۲/۷۲۰۴	۲/۰۱۵۱	۱/۷۱۱۸	λ_1	$0/5$
۱۴/۱۷۱۸	۱۲/۶۲۰۸	۱۱/۳۷۸۷	۱۰/۵۶۱۷	۱۰/۲۷۴۷	λ_2	
۳۱/۴۲۵۹	۲۹/۶۱۴۰	۲۸/۲۳۶	۲۷/۳۷۰۱	۲۷/۰۷۴۳	λ_3	
۴/۲۷۷۹	۳/۴۰۴۳	۲/۵۸۴۶	۱/۹۱۴۵	۱/۶۲۶۳	λ_1	۱
۱۳/۴۵۲۳	۱۱/۹۷۷۹	۱۰/۷۹۶۹	۱۰/۰۱۹۸	۹/۷۴۶۸	λ_2	
۲۹/۷۸۱۷	۲۸/۰۵۵۹	۲۶/۷۴۲۹	۲۵/۹۱۷۶	۲۵/۶۳۵۶	λ_3	
۴/۱۰۰۸	۳/۲۶۳۶	۲/۴۷۷۹	۱/۸۳۵۳	۱/۵۵۸۹	λ_1	۲
۱۲/۸۶۶۲	۱۱/۴۵۰۲	۱۰/۳۱۵۳	۰۹/۵۶۸	۹/۳۰۵۳	λ_2	
۲۸/۳۶۰۹	۲۶/۶۹۴۴	۲۵/۴۲۴۹	۲۴/۶۲۶۳	۲۴/۳۵۳۳	λ_3	
۳/۸۳۴۸	۳/۱۲۴۵	۲/۳۱۷۶	۱/۷۱۶۵	۱/۴۵۷۷	λ_1	۵

۱۱/۹۹۲۹	۱۰/۶۶۴۶	۹/۵۹۸۷	۸/۸۹۶۲	۸/۶۴۹۲	λ_2	
۲۶/۲۷۱۴	۲۴/۶۹۴۵	۲۳/۴۹۱۳	۲۲/۷۳۳۴	۲۲/۴۷۴	λ_2	
۳/۵۳۹۶	۲/۸۱۷۳	۲/۱۳۹۲	۱/۵۸۴۳	۱/۳۴۵۴	λ_1	۱۰
۱۱/۰۶۵۲	۹/۸۳۸۴	۸/۸۵۳۹	۸/۲۰۴۹	۷/۹۷۶۶	λ_2	
۲۴/۲۱۸۸	۲۲/۷۶۰۵	۲۱/۶۴۷۵	۲۰/۹۴۶۱	۲۰/۷۰۶۲	λ_2	
۲/۹۳۶۴	۰۲/۳۳۷	۱/۷۷۴۴	۱/۳۱۴۲	۱/۱۱۶۲	λ_1	۵۰
۹/۳۱۰۶	۰۸/۱۹۶	۷/۳۸۲۸	۶/۸۴۷۲	۶/۶۵۸۹	λ_2	
۲۰/۲۸۹۷	۱۹/۰۹۴۱	۱۸/۱۸۳۲	۱۷/۶۱۰۱	۱۷/۴۱۴۲	λ_2	
۲/۸۰۴۷	۲/۳۳۲۱	۱/۶۹۴۷	۱/۲۵۵۲	۱/۰۶۶۲	λ_1	۱۰۰
۸/۸۰۷۳	۷/۸۳۹۳	۷/۰۶۳۶	۰۶/۵۵۳	۶/۳۷۳۵	λ_2	
۱۹/۴۴۳۸	۱۸/۳۰۶۵	۱۷/۴۴۰۵	۱۷/۵۱۲۱	۱۶/۷۰۹۷	λ_2	
۲/۶۶۶۶	۲/۱۲۲۰	۱/۶۱۱۱	۱/۱۹۳۴	۱/۰۱۳۷	λ_1	فلز
۸/۳۸۴۱	۷/۴۶۴۹	۶/۷۲۸۶	۶/۲۴۴۲	۶/۰۷۳۸	λ_2	
۱۸/۵۵۵۵	۱۷/۴۷۹۱	۱۶/۶۶۰۱	۱۶/۱۴۵۳	۱۵/۹۶۹۴	λ_2	

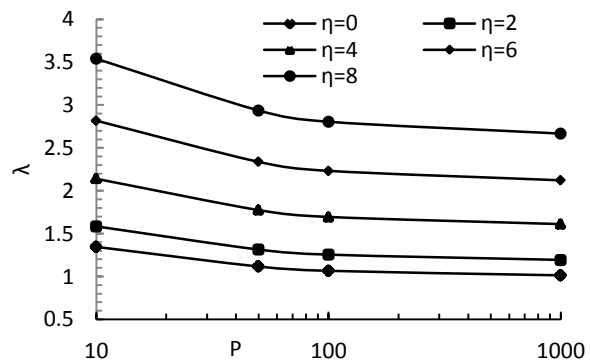
کمتر و ضخامت بیشتر) محسوس تر از تغییر بین ضرایب بزرگتر (تیر با طول بیشتر و ضخامت کمتر) است. شکل ۶ نشان دهنده این تغییرات است و همانطور مشاهده می شود با افزایش ضریب لاغری شیب نمودار کاهش می یابد. همان طور که در شکل ۷ نیز مشخص است روند تغییرات فرکانس اول و فرکانس های بالاتر مشابه است ولی شیب نمودار فرکانس های دوم و سوم از فرکانس اول بیشتر است و درصد تغییرات فرکانس طبیعی دوم بیشتر است. در جدول ۱۰ و شکل ۸ تأثیر شعاع هاب بر رفتار ارتعاشی و فرکانس طبیعی تیر مدرج تابعی بررسی شده است. با استفاده از این داده ها مشخص است که افزایش شعاع هاب فرکانس طبیعی تیر نیز افزایش می یابد. ضریب لاغری هندسه تیر را تغییر می دهد و باعث تغییر در شکل مد می شود.



شکل (۵): تغییرات فرکانس طبیعی اول تا سوم با سرعت بی بعد تیر دوار، $L/h=10, P=0.5$.

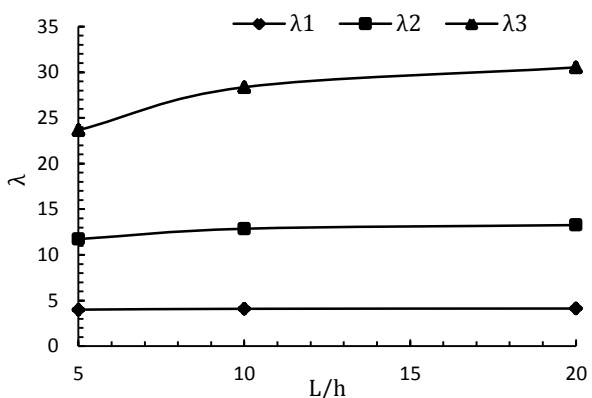


شکل (۳): تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییرات نمایه ماده مدرج تابعی مدل توانی در سرعت های مختلف $L/h=10$.

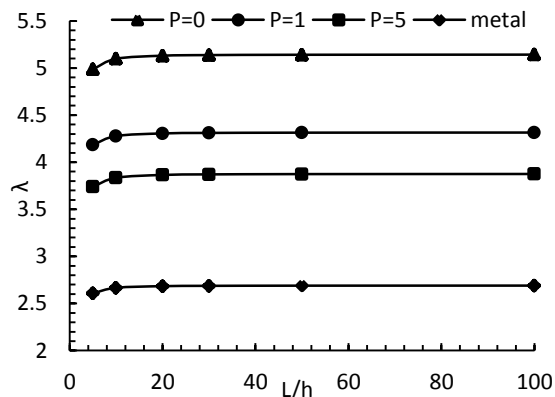


شکل (۴): تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییرات نمایه ماده مدرج تابعی مدل توانی در سرعت های مختلف، $L/h=20$.

فرکانس طبیعی بی بعد تیر مدرج تابعی مدل توانی در شرایط مرزی یک سرگیردار برای ضرایب لاغری مختلف در جدول ۹ ارائه شده است. با توجه به داده های به دست آمده از جدول ۹ مشاهده می شود با افزایش ضریب لاغری فرکانس طبیعی تیر افزایش می یابد که این تغییر بین ضرایب کوچکتر (تیر با طول



شکل (۷): تغییرات فرکانس طبیعی اول تا سوم با ضریب لاغری، $\eta = 8, P = 2$.



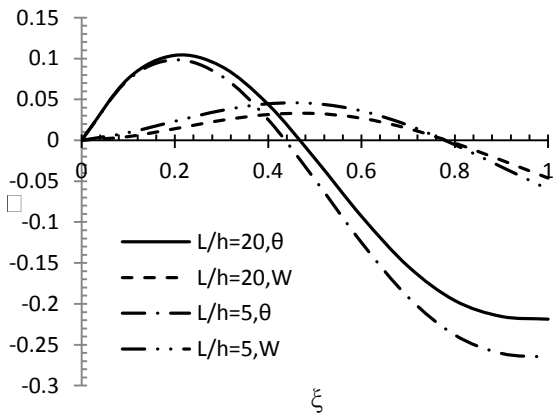
شکل (۶): تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب ضریب لاغری.

جدول (۹): فرکانس طبیعی بی بعد تیر مدرج تابعی مدل توانی در شرایط مرزی یک سرگیردار برای ضرایب لاغری مختلف، $\eta = 8$.

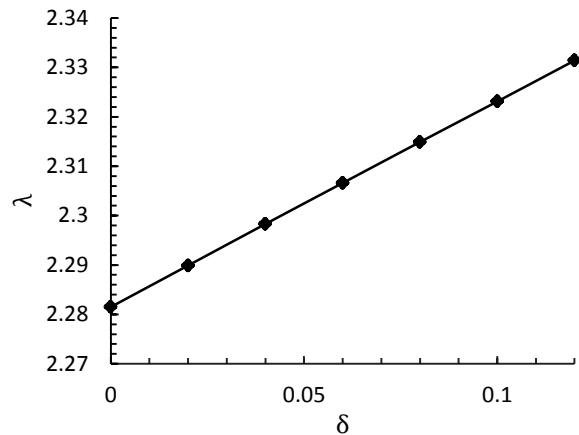
L/h=۱۰۰	L/h=۵۰	L/h=۳۰	L/h=۲۰	L/h=۱۰	L/h=۵	فرکانس طبیعی	شاخص جزء حجمی
۵/۱۴۲۴	۵/۱۴۱۰	۵/۱۳۷۷	۵/۱۳۱۲	۵/۰۹۸	۴/۹۸۷۷	λ_1	۰
۱۶/۶۵۷۸	۱۶/۶۳۶۹	۱۶/۵۸۷۷	۱۶/۴۹۳۸	۱۶/۰۳۱۴	۱۴/۶۸۲۶	λ_2	
۳۹/۰۰۹۲	۳۸/۸۷۷۹	۳۸/۵۷۴۴	۳۸/۰۱۰۷	۳۵/۴۹۱۵	۲۹/۸۱۱۴	λ_3	
۴/۸۲۳۵	۴/۸۲۲۲	۴/۸۱۹۱	۴/۸۱۳۲	۴/۷۸۲۹	۴/۶۸۱۵	λ_1	۰/۲
۱۵/۶۲۴۷	۱۵/۶۰۵۶	۱۵/۵۶۰۷	۱۵/۴۷۵	۱۵/۰۵۱۶	۱۳/۸۰۶۶	λ_2	
۳۶/۵۹۰۷	۳۶/۴۷۱۱	۳۶/۱۹۴۴	۳۵/۶۷۹۷	۳۳/۳۶۸۴	۲۸/۰۹۶۳	λ_3	
۴/۵۴۰۸	۴/۵۳۹۶	۴/۵۳۶۷	۴/۵۳۱۲	۴/۵۰۲۸	۴/۴۰۷۷	λ_1	۰/۵
۱۴/۷۰۹	۱۴/۶۹۱۱	۱۴/۶۴۹۱	۱۴/۵۶۸۸	۱۴/۱۷۱۸	۱۳/۰۰۲۹	λ_2	
۳۴/۴۴۶۴	۳۴/۳۳۴۴	۳۴/۰۷۵۲	۳۳/۵۹۳	۳۱/۴۲۵۹	۲۶/۴۷۱۸	λ_3	
۴/۳۱۵۱	۴/۳۱۳۹	۴/۳۱۱۱	۴/۳۰۵۷	۴/۲۷۷۹	۴/۱۸۵۳	λ_1	۱
۱۳/۹۷۸	۱۳/۹۶۰۳	۱۳/۹۱۹۱	۱۳/۸۴۰۳	۱۳/۴۵۲۳	۱۲/۴۴۳۲	λ_2	
۳۲/۷۳۳۵	۳۲/۶۲۳۳	۳۲/۳۶۸۶	۳۱/۸۹۵۶	۲۹/۷۸۱۷	۲۵/۰۱۵۴	λ_3	
۴/۱۳۹۵	۴/۱۳۸۲	۴/۱۳۵۳	۴/۱۲۹۶	۴/۱۰۰۸	۴/۰۰۶۶	λ_1	۲
۱۳/۴۰۸۶	۱۳/۳۹۰۲	۱۳/۳۴۷۳	۱۳/۲۶۵۵	۱۲/۸۶۶۲	۱۱/۷۳۰۹	λ_2	
۳۱/۳۹۸۰	۳۱/۲۸۲۷	۳۱/۰۱۶۷	۳۰/۵۲۵	۲۸/۳۶۰۹	۲۳/۶۵۵۸	λ_3	
۳/۸۷۵۱	۳/۸۷۳۸	۳/۸۷۰۷	۳/۸۶۴۸	۳/۸۳۴۸	۳/۷۴۰۰	λ_1	۵
۱۲/۵۵۱۷	۱۲/۵۳۲۵	۱۲/۴۸۷۷	۱۲/۴۰۲۷	۱۱/۹۹۲۹	۱۰/۸۷۰۷	λ_2	
۲۹/۳۸۸۴	۲۹/۲۶۷۱	۲۸/۹۸۸۲	۲۸/۴۷۶	۲۶/۲۷۱۴	۲۱/۷۱۹۱	λ_3	
۳/۵۷۷۲	۳/۵۷۶۰	۳/۵۷۳۱	۳/۵۶۷۶	۳/۵۳۹۶	۳/۴۵۱۴	λ_1	۱۰
۱۱/۵۸۶۸	۱۱/۵۶۸۹	۱۱/۵۲۷	۱۱/۴۴۷۶	۱۱/۰۶۵۲	۱۰/۰۲۳۸	λ_2	
۲۷/۱۲۹	۲۷/۰۱۵۴	۲۶/۷۵۴۳	۲۶/۲۷۵۱	۲۴/۲۱۸۸	۲۰/۰۰۲	λ_3	
۲/۹۶۴۴	۲/۹۶۳۵	۲/۹۶۱۴	۲/۹۵۷۳	۲/۹۳۶۴	۲/۸۶۸۶	λ_1	۵۰
۹/۶۰۲۲	۹/۵۸۸۹	۹/۵۵۷۹	۹/۴۹۸۸	۹/۲۱۰۶	۸/۳۹۴۸	λ_2	
۲۲/۴۸۴۶	۲۲/۴۰۱۱	۲۲/۲۰۸۴	۲۱/۸۵۲۵	۲۰/۲۸۹۷	۱۶/۹۱۱۴	λ_3	
۲/۸۳۰۴	۲/۸۲۹۶	۲/۸۲۷۷	۲/۸۲۳۹	۲/۸۰۴۷	۲/۷۴۱۷	λ_1	۱۰۰
۹/۱۶۸۴	۹/۱۵۶۲	۹/۱۲۷۷	۹/۰۷۳۴	۸/۸۰۷۳	۸/۰۴۴۲	λ_2	
۲۱/۴۶۹۶	۲۱/۳۹۳۱	۲۱/۲۱۶۶	۲۰/۸۸۹۹	۱۹/۴۴۳۸	۱۶/۲۶۰۰	λ_3	
۲/۶۸۹۹	۲/۶۸۹۲	۲/۶۸۷۴	۲/۶۸۴۰	۲/۶۶۶۶	۲/۶۰۸۶	λ_1	فلز
۸/۷۱۳۵	۸/۷۰۲۴	۸/۶۷۶۶	۸/۶۲۷۲	۸/۳۸۴۱	۷/۶۷۶۳	λ_2	
۲۰/۴۰۵۱	۲۰/۳۳۵۹	۲۰/۱۷۶۲	۱۹/۸۷۹۶	۱۸/۵۵۵۵	۱۵/۵۷۸	λ_3	

جدول (۱۰): تغییرات فرکانس طبیعی با تغییرات شعاع طوقه دوار، $P = 0, \eta = 2, L/h = 10$.

$\delta = 0.12$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.08$	$\delta = 0.06$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0$	فرکانس طبیعی
۲.۳۳۱۴	۲.۳۲۳۱	۲.۳۱۴۹	۲/۳۰۶۶	۲/۲۹۸۳	۲/۲۸۹۹	۲/۲۸۱۵	λ_1
۱۱.۹۹۲۵	۱۱.۹۸۳۹	۱۱.۹۷۵۳	۱۱/۹۶۶۷	۱۱/۹۵۸۱	۱۱/۹۴۹۵	۱۱/۹۴۰۸	λ_2
۳۰.۹۴۳۲	۳۰.۹۳۳۸	۳۰.۹۲۴۳	۳۰/۹۱۴۹	۳۰/۹۰۵۴	۳۰/۸۹۶	۳۰/۸۸۶۵	λ_3



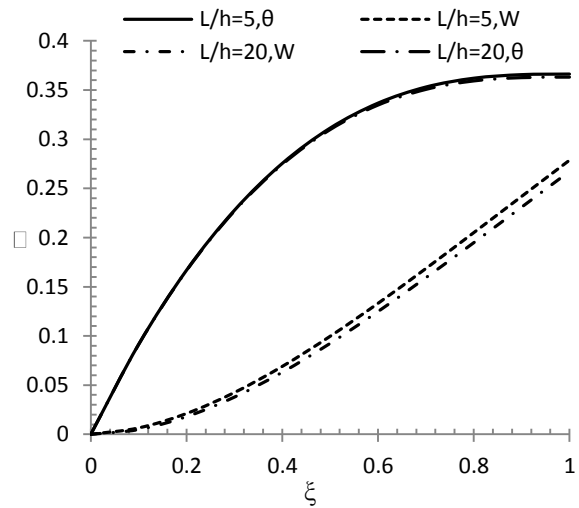
شکل (۱۰): تأثیر ضریب لاغری بر شکل مد دوم در شرایط مرزی یک سرگیردار.



شکل (۸): تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییرات شعاع طوقه دوار، $P = 0, \eta = 2, L/h = 10$.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، رفتار ارتعاشی تیر مدرج تابعی دوار با استفاده از روش عددی تبدیل دیفرانسیل و براساس تئوری تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدل سازی ماده مدرج تابعی از مدل توانی استفاده شده است. تأثیر پارامترهای مختلف شامل شاخص جزء حجمی ماده مدرج تابعی، ضریب لاغری، سرعت دورانی هاب و شعاع هاب بر روی فرکانس طبیعی اول تا سوم تیرمدرج تابعی بررسی شده است. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان می دهد روش تبدیل دیفرانسیل، روش بسیار مناسبی برای حل مسائل مقدار ویژه می باشد. از نتایج به دست آمده برای تغییرات شاخص جزء حجمی در می یابیم که با تغییر دادن این پارامتر می توان مقادیر فرکانس طبیعی را به صورت دلخواه تغییر داد به این صورت که با کاهش سهم ماده با مدول الاستیسیته پایین تر ($P \rightarrow \infty$) فرکانس طبیعی کاهش می یابد. با افزایش ضریب لاغری تا مقدار تقریبی ($L/h = 30$) فرکانس طبیعی به طور محسوسی افزایش می یابد و به تدریج با افزایش بیش تر به سمت مقدار ثابتی همگرا می شود. شعاع دوران تأثیر محسوسی روی فرکانس طبیعی ندارد و تغییرات صعودی با شیب کم ایجاد می کند. مؤثرترین



شکل (۹): تأثیر ضریب لاغری بر شکل مد شرایط مرزی یک سرگیردار - شکل مد اول.

در شکل های ۹-۱۰ نیز شکل مد اول و دوم برای دو مقدار ضریب لاغری ۵ و ۲۰ ترسیم شده است. برای نمایش بهتر تغییر، شکل مد مربوط به هر دو ضریب لاغری در یک شکل رسم شده است.

- of Timoshenko Beams by DSC Method". Communications in Numerical Methods in Engineering, 2009
14. Li, X.F. "A Unified Approach for Analyzing Static and Dynamic Behaviors of Functionally Graded Timoshenko and Euler-Bernoulli Beam", Journal of Sound and Vibration, Composite Structures, Vol. 82, No. 3 pp. 390-402, 2008.
 15. Kapuria, S., Bhattacharyya, M., and Kumar, A.N. "Bending and Free Vibration Response of Layered Functionally Graded Beams, a Theoretical Model and its Experimental Validation". Composite Structure, Vol. 82, No. 3, pp. 390-402, 2008.
 16. Ke, L.L., Yang, J., and Kitippornachi, S. "An analytical Study on Nonlinear Vibration of Functionally Graded Beams". Meccanica, Vol. 45, No. 6, pp. 743-752, 2010.
 17. Jafari A, and Fathabadi M. "Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load". Aerospace Mechanics Journal, Vol. 9, No. 2, pp. 69-77, 2013(In Persian).
 18. Mousavi Z. "Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on The Higher-Order Shear and Normal Deformable". Aerospace Mechanics Journal. Vol. 12, No. 1, pp. 1-12, 2016 (In Persian).
 19. Pradhan, K.K., Chakraverty, S. "Free vibration of Euler and Timoshenko Functionally Graded Beams by Rayleigh – Ritz Method", Composites Part B: Engineering Vol. 51, pp. 175-184, 2013.
 20. Sina, S.A., Navazi, H.M. and Haddadpour, H. "An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams". Materials and Design, Vol. 30, No. 3, pp. 741-747, 2009.
 21. Şimşek M. "Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-order Beam Theories". Nucl Eng Des, Vol. 240, No. 4, pp. 697-705, 2010.
 22. Shahba, A., Attarnejad, R., Zarrinzadeh, H. "Free Vibration Analysis of Centrifugally Stiffened Tapered Functionally Graded Beams". Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 20, pp. 331-338, 2013
 23. Abdel-Halim Hassan, I.H. "On Solving Some Eigenvalue Problems by Using a Differential Transformation" Applied Mathematics and Computation, Vol. 127, No. 1, pp. 1-22, 2012.
- پارامتر بر تغییرات فرکانس طبیعی تیر مدرج تابعی دوار، تغییرات سرعت طوقه دوار است که با افزایش سرعت شیب تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سایر پارامترها بیش تر است. در همه پارامترهای بررسی شده شیب تغییرات به ترتیب در فرکانس اول کم تر و در فرکانس سوم بیشتر است.

۶- مراجع

1. Zhou, J.K. "Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits", Huazhong University Press, Wuhan China, 1986.
2. Ho, S.H., and Chen, C.K. "Free Transverse Vibration of an Axially Loaded Non-uniform Spinning Twisted Timoshenko Beam Using Differential Transform." International Journal of Mechanical Sciences Vol. 48, No. 11, pp. 1323-1331, 2006.
3. Mei, C. "Application of Differential Transformation Technique to Free Vibration Analysis of a Centrifugally Stiffened Beam", Comput. Struct, Vol. 86, No's. 11-12, 2008.
4. Hodges, D.H. and Rutkowski, M.J. "Free Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable Order Finite Element Method", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 19, No. 11, pp. 1459-1466, 1981.
5. Wright, A., Smith, C., Thresher, R. and Wang, J. "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams", Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, No. 1, pp. 197-202, 1982.
6. Banerjee, J.R. "Free Vibration of Centrifugally Stiffened Uniform and Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 233, No. 5, pp. 857-875, 1999.
7. Stafford, R.O. and Giurgiutiu, V. "Semi-analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams", International Journal of Mechanical Sciences Vol. 17, No's. 11-12, pp. 719-727, 1975.
8. Giurgiutiu, V. and Stafford R.O. "Semi-analytic Methods for Frequencies and Mode Shapes of Rotor Blades", Erotica, Vol. 1, pp. 291-306, 1977
9. Yokoyama, T., "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 30, No. 10, pp. 743-755, 1988.
10. Du, H., Lim, M.K. and Liew K.M. "A Power Series Solution for Vibration of a Rotating Timoshenko Beam", Journal of Sound and vibration Vol. 175, No. 4, pp. 505-523, 1994.
11. Reddy, J.N., "On the Dynamic Behavior of the Timoshenko Beam Finite Elements". Sadhana, Vol. 24, No. 3, pp. 175-98, 1997.
12. Kaya, M.O., "Free Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam by Differential Transform Method". Aircraft Engineering and Aerospace Technology. Vol. 78, No. 3, pp. 194-203, 2006.
13. Civalek, O. Kiracioglu, O. "Free Vibration Analysis