تحلیل ارتعاشات اجباری ورق ضخیم مستطیلی هدفمند بر اساس تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و قائم

علیرضا سعیدی [۱]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید باهنر کرمان

حامد رضانیایی اقدم [۲]، رضا حسن‌نژاد قدیم [۳] و زهره موسوی [۴]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه تبریز

(تاریخ دریافت: ۹۴/۰۸/۴؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۲۵)

چکیده

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات اجباری حالت ماندگار ورق‌های مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی بررسی شده است. بر پایه تئوری جدید مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و قائم که توسط باترا و ویدولی ارائه شده است، معادلات حاکم با استفاده از اصل کار مجازی به‌دست می‌آیند. در این تئوری هر دو اثر تغییر شکل برشی و قائم در راستای ضخامت لحاظ می‌شود. همچنین، خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت درنظر گرفته نمی‌شود. برای بیان خواص مکانیکی مواد هدفمند در راستای ضخامت از تابع توانی، استفاده شده است. نتایج عددی براساس تئوری مرتبه اول تا پنجم تغییر شکل برشی و قائم در قالب جدول‌ها و نمودارها بیان شده‌اند. اثر خواص مواد هدفمند و پارامترهای هندسی ورق روی خیز و تنش‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. این بررسی نشان می‌دهد که این تئوری نه تنها برای ورق‌های نازک و نیمه‌ضخیم، بلکه برای ورق‌های ضخیم نیز نتایج بسیار دقیقی می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات اجباری، ماده هدفمند، ورق ضخیم، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و قائم

Forced Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plate Based on the Higher-order Shear and Normal Deformable Theory

A.R. Saidi
Mechanical Engineering Department
Shahid Bahonar University of Kerman

H. Rezaniaiee Aqdam, R. Hassannejad Qadim and Z. Mousavi
Mechanical Engineering Department University of Tabriz

(Received: October 26, 2015; Acceptedl: May 14, 2016)

ABSTRACT

In this paper, forced vibration steady analysis of thick functionally graded isotropic and transversely isotropic rectangular plates has been investigated. Based on the higher-order shear and normal deformable plate theory which was introduced By Batra and Vidoli, the governing equations are obtained using the principle of virtual work. In this theory, both shear and normal deformation effects in the thickness direction are considered. Also, the deflection of the plate along the thickness is not constant. A power law distribution is used to describe the mechanical properties of the functionally graded materials through the thickness. The numerical results have been presented for first to fifth order shear and normal deformable theory in tables and diagrams. The effects of functionally graded material properties and the geometric parameters of the plate on deflection and stresses have been studied. This investigation is shown that this theory gives accurate results not only for thin and moderately thick plates, but also for functionally graded thick plates.

Keywords: Forced Vibration, Fuctionally Graded Material, Thick Plate, Higher-order Shear and Normal Deformable Theory

۱- استاد: saidi@uk.ac.ir
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: hamedwestside@yahoo.com
۳- استادیار: rhassannejad@gmail.com
۴- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): z.mousavi2014@yahoo.com

۱- مقدمه

مواد هدفمند، مواد مرکبی هستند که حاصل ترکیب دو فلز یا یک فلز و یک نافلز (معمولا سرامیک) می‌باشند و در آن‌ها خواص مواد در یک یا چند جهت به‌طور پیوسته از یک لایه‌به‌لایه دیگر تغییر می‌کند. مقاومت بسیار خوب سرامیک‌ها در برابر حرارت و سایش، در کنار چقرمگی بالای فلزات این مواد را به موادی با کارایی دوگانه تبدیل کرده است. امروزه بیش‌ترین کاربرد این مواد در محیط‌هایی با دمای بالا صورت می‌گیرد.

تاکنون تئوری‌های مختلفی برای تحلیل‌های دوبعدی ورق ارائه شده است، که براساس نسبت ضخامت به طول ورق مورد استفاده قرار می‌گیرند. در تمامی این تئوری‌ها، تحلیل دوبعدی ورق و بسط میدان جابجایی در راستای ضخامت صورت می‌گیرد. اگرچه تئوری‌های برشی ورق در تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج خوبی می‌دهند، اما به‌دلیل درنظرنگرفتن اثر کرنش‌های عمودی، هنوز با جواب‌های دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل، تئوری جدیدی به‌نام تئوری تغییر شکل برشی و قائم توسط باترا و ویدولی[۱] [۱] معرفی شده است. این تئوری، کامل کننده تئوری‌های قبل بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و قائم را در راستای ضخامت در نظر می‌گیرد.

در سامانه‌های مکانیکی ارتعاشات ناخواسته باعث ایجاد ترک در قطعات، لق‌شدن اتصالات، شکست سازه‌ها، نقص عملکرد وسایل الکترونیکی و بسیاری از موارد دیگر می‌شود. با اندازه‌گیری مشخصات نوسانی سامانه همچون فرکانس‌های طبیعی آن می‌توان سرعت‌های دور از حالت تشدید را انتخاب کرده و از بسیاری از آثار نامطلوب ارتعاشات جلوگیری نمود. ردی[۲] [۲] در سال ۱۹۹۹ مطالعه جامعی بر اصول حاکم در تئوری‌های مورد استفاده همچون تئوری کلاسیک و تئوری‌های برشی در تحلیل ورق‌های هوشمند داشت. ردی [۳] در سال ۲۰۰۰ به ارائه مدل اجزاء محدود برای آنالیز استاتیکی و دینامیکی ورق‌هایی از جنس مواد هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم پرداخت. شن[۳] و همکارانش [۴] در سال ۲۰۰۱ به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی آزاد تحت بستر الاستیک پرداختند. در سال ۲۰۰۳، شن و همکارانش [۵] پاسخ‌های دینامیکی ورق‌های مستطیلی لایه‌ای با تکیه‌گاه‌های ساده تحت اثر بستر الاستیک ناشی از بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. کیان[۴] و باترا [۶] در سال ۲۰۰۳ ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مستطیلی ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی و روش بدون المان محلی پتروف – گالرکین[۵] بررسی کردند. ژانگ و یانگ[۶][۷] در سال ۲۰۰۴ با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی آنالیز استاتیکی ورق‌های هدفمند پرداختند. افشار و زنکور[۷] [۸] در سال ۲۰۰۵ به بررسی خمش ورق‌های هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. باترا و ایمنی[۸] [۹] در سال ۲۰۰۵ ارتعاشات آزاد و توزیع تنش ورق‌های مستطیلی همگن و همسانگرد را با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و قائم را بررسی کردند. باترا و ایمنی [۱۰] در سال ۲۰۰۷ به بررسی ارتعاشات ورق‌های الاستیک خطی غیرقابل تراکم همسانگرد با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی پرداختند. باترا [۱۱] در سال ۲۰۰۷ با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی را برای ورق‌های الاستیک خطی غیرقابل تراکم هدفمند ارائه کرد. او معادلات حرکت را برای ارتعاشات آزاد ورق به‌دست آورد. ماتسوناگا[۹] [۱۲] در سال ۲۰۰۸، نوعی از تئوری مرتبه بالاتر برشی و عمودی را با استفاده از بسط سری تیلور برای آنالیز ارتعاشات و پایداری ورق‌های هدفمند با تکیه‌گاه ساده ارائه کرد. تفاوت اصلی میان این دو تئوری، در نحوه فرض میدان جابجایی و بسط آن در راستای ضخامت می‌باشد. سعیدی و آتشی‌پور [۱۳] در سال ۲۰۰۸ به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. در سال ۲۰۰۹ امینی و همکارانش

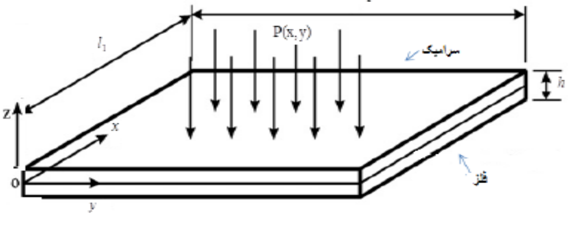
1 - Batra and Vidoli
2- Reddy
3- Shen
4- Qian
5-Petrov–Galerkin
6- Zhong and Yang
7- Zenkour
8- Aimmanee
9- Matsunaga

[۱۴] با درنظرگرفتن چندجمله‌ای‌های چبیشف و روش ریتز[1]، رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مطالعه کردند. در سال ۲۰۰۹ لی[2] و همکارانش [۱۵] به‌کمک چندجمله‌ای‌های چبیشف به بررسی ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداختند. حسنی و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۰ با ارائه حل دقیق برای شرایط مرزی مختلف، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی نازک ساخته‌شده از مواد هدفمند را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک معادلات حرکت را به‌دست آوردند. در این تحقیق علاوه‌بر بررسی پارامترهای هندسی، به بررسی اثر درنظرگرفتن جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی سامانه نیز پرداخته‌اند. لیو[3] و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۱۰ با فرض توزیع درون صفحه‌ای مواد هدفمند و با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند را بررسی کردند. یانگ و همکارانش [۱۸] در سال ۲۰۱۱ با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی خمش ورق‌های هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی با شرایط مرزی مختلف پرداختند و در نهایت تنش‌ها و جابجایی‌های مجهول را به‌دست آوردند. بافرانی و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۱ جوابی دقیق برای ارتعاشات ورق‌های مستطیلی هدفمند ضخیم قرار گرفته روی بستر الاستیک ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و اصل همیلتون و با درنظرگرفتن جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای معادلات حرکت را به‌دست آوردند، و به این نتیجه دست یافتند که در برخی از شرایط مرزی، جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای اثری مهم بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق‌های هدفمند ضخیم دارند. حسینی‌هاشمی و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۱ به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتا ضخیم مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. شیخ‌الاسلامی و سعیدی [۲۱] در سال ۲۰۱۳ با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر برشی و عمودی به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند همسانگرد با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند. عیسوند زیبایی و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۰۹ به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای نازک با رینگ تقویت شده ساخته شده از مواد هوشمند که ترکیبی از فولاد ضدزنگ و نیکل می‌باشد، پرداختند. این تحقیق براساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی و براساس اصل همیلتون انجام پذیرفت، این مطالعه نشان می‌دهد که رینگ تقویت‌شده روی فرکانس‌ها اثر می‌گذارد و این اثر به موقعیت رینگ و شرایط مرزی بدنه استوانه‌ای هوشمند بستگی دارد. موسوی و سعیدی [۲۳] در سال ۲۰۱۵ به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند بر پایه تئوری مرتبه بالاتر برشی و عمودی پرداختند.

در این مقاله برای نخستین بار، ارتعاشات اجباری ورق ضخیم مستطیلی هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی، بر اساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و قائم ارائه شده است. ورق چهار طرف تکیه‌گاه ساده است و بار بر روی سطح بالای ورق اعمال می‌گردد. مؤلفه‌های میدان جابجایی بر اساس چندجمله‌ای‌های لژاندر در امتداد ضخامت تا پنج ترم بسط داده می‌شوند. با استفاده از اصل کار مجازی معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند. نتایج عددی برای نسبت‌های متفاوت ضخامت به طول با مقالات معتبر مقایسه شده و نشان داده شده است که مرتبه پنجم این تئوری برای تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج بسیار دقیقی ارائه می‌دهد.

۲- میدان جابجایی و تنش

هندسه ورق را به‌صورت مستطیلی با طول l_1 و عرض l_2 و ضخامت h که خواص آن در راستای ضخامت (z) متغییر است را در نظر بگیرید. دستگاه مختصات دکارتی ساعت‌گرد به‌نحوی روی جسم قرار می‌گیرد که محورهای x_1 و x_2 به‌ترتیب موازی اضلاع l_1 و l_2 بوده و صفحه میانی ورق منطبق بر صفحه x_1, x_2 می‌باشد (شکل ۱).



شکل (۱): نمای شماتیک ورق.

1- Chebyshev Polynomials and Ritz
2- Li
3- Liu

تغییرات خواص ورق در راستای ضخامت به‌طور پیوسته به صورت تابع توانی زیر تغییر می‌کند [۲۱]:

$$E(z) = E_d + (E_u - E_d)(\frac{1}{2} + \frac{z}{h})^N \quad (۱)$$

که در این رابطه، E بیانگر خواص فیزیکی یا مکانیکی جسم مانند چگالی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و غیره می‌باشد. که، E_u و E_d به‌ترتیب معرف خواص در $\left\{z = h/2\right\}$ و $\left\{z = -h/2\right\}$ بوده و پارامتر N نشان‌دهنده توان ماده هدفمند می‌باشد.

در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، میدان جابجایی به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود [۱۱]:

$$u_i(x_1, x_2, z, t) = v_\alpha(x_1, x_2, z, t)\delta_{i\alpha} + w(x_1, x_2, z, t)\delta_{i3} \quad (۲)$$

که در آن، u_i معرف مؤلفه‌های میدان جابجایی کلی جسم بوده، v_α و w به‌ترتیب مؤلفه های جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای و خارج از صفحه می‌باشند. زیرنویس α نشان‌دهنده راستاهای x_1 و x_2 بوده و δ بیانگر تابع دلتای کرونکر می‌باشد. از آنجا که ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر کوچک است، می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را در راستای z به‌صورت بسط چند جمله‌ای لژاندر نوشت. این چندجمله‌ای‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۱]:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a(z)L_b(z)dz = \delta_{ab} \qquad a, b = 0, 1, 2, ..., K \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} L_{n-1}(z) &= \sqrt{\frac{(2n-1)}{h}}P_{n-1}(z) \qquad n \geq 1 \\ P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= \frac{2z}{h}, \\ P_{n+1}(z) &= (\frac{2n+1}{n+1})(\frac{2z}{h})P_n(z) - (\frac{n}{n+1})P_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن، K مرتبه تئوری مورد استفاده می‌باشد.

با استفاده از چندجمله‌ای‌های فوق می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, z, t) &= L_a(z)v_1^a(x_1, x_2, t), \\ v_2(x_1, x_2, z, t) &= L_a(z)v_2^a(x_1, x_2, t), \\ w(x_1, x_2, z, t) &= L_a(z)w^a(x_1, x_2, t). \\ a &= 0, 1, 2, ..., K \end{aligned} \quad (۵)$$

می‌توان مشتق چندجمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چندجمله‌ای‌ها به‌صورت زیر نوشت:

$$L'_a(z) = D_{ab}L_b(z) \quad (۶)$$

که در معادله فوق، D ماتریس ضرایب مشتق می‌باشد. برای نمونه، برای تئوری مرتبه ۵ درایه‌های این ماتریس به‌صورت زیر می‌باشند:

$$[D] = \frac{2}{h}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

بنابراین مشتق اول مؤلفه‌های میدان جابجایی نسبت به z را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} v_{\alpha,\beta} &= L_a v^a_{\alpha,\beta}, \qquad v_{\alpha,z} = D_{ab}L_b v^a_\alpha, \\ w_{,\alpha} &= L_a w^a_{,\alpha}, \qquad w_{,z} = D_{ab}L_b w^a. \end{aligned} \quad (۸)$$

که در این روابط، زیرنویس‌های α, β نشان‌دهنده راستاهای x_1، x_2 می‌باشند.

تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \quad (۹)$$

با جایگزینی معادلات (۸) در (۹)، رابطه کرنش برحسب جابجایی حاصل می‌شود [۲۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = L_a[&\frac{1}{2}(v^a_{\alpha,\beta} + v^a_{\beta,\alpha})\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j\alpha}) \\ &.(D_{ba}v^b_\alpha + w^a_{,\alpha}) + \delta_{i3}\delta_{j3}D_{ba}w^b] \end{aligned} \quad (۱۰)$$

روابط بین تنش-کرنش برای ماده هدفمند به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}(z) & C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}(z) & C_{12}(z) & C_{11}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱)، $[C]$ ماتریس سختی ماده هدفمند می‌باشد، نکته قابل توجه این است که خواص این مواد به‌صورت تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ماده هدفمند همسانگرد دو ثابت مستقل و ماده هدفمند همسانگرد عرضی پنج ثابت مستقل دارند، ثوابت الاستیک در ماده هدفمند همسانگرد طبق

رابطه (۱۲) و در ماده هدفمند همسانگرد عرضی طبق رابطه (۱۳) می‌باشد:

$$\begin{aligned} C_{11}&=C_{22}=C_{33}=\frac{E(z)(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}=\lambda(z)+2\mu(z)\\ C_{12}&=C_{13}=C_{23}=\frac{E(z)\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}=\lambda(z)\\ C_{44}&=C_{55}=C_{66}=\frac{E(z)}{2(1+\upsilon)}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})=\mu(z)\end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} &C_{44}(z)=C_{55}(z),\ C_{11}(z)=C_{22}(z)\\ &C_{13}(z)=C_{23}(z),\ C_{66}(z)=\frac{1}{2}(C_{11}(z)-C_{12}(z)),\ C_{33}(z)\end{aligned} \quad (۱۳)$$

۳- معادلات حاکم بر ورق

برای به‌دست آوردن معادلات حرکت ورق مستطیلی، از معادلات کلی حرکت در دستگاه دکارتی به‌شکل زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=\rho\ddot{u}_i \quad (۱۴)$$

که در آن، σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش، ρ چگالی ورق و b_i مؤلفه‌های بردار نیروهای حجمی ورق می‌باشند. به‌منظور دست‌یابی به معادلات حاکم، از اصل کار مجازی استفاده می‌شود. میدان جابجایی مجازی $\delta\eta_i$ و ضرب داخلی آن در معادله (۱۴) و با انتگرال‌گیری روی حجم ورق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\int_A\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\delta\eta_i\sigma_{ij,j}dzdA+\int_A\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\delta\eta_i b_i dzdA\\ &=\int_A\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\delta\eta_i\ddot{u}_i dzdA\\ &i=1,2,3\end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در آن، A مساحت صفحه میانی ورق می‌باشد. با فرض این‌که تابعیت میدان جابجایی مجازی $\delta\eta_i$ از z را بتوان به صورت چندجمله‌ای های‌لژاندر نوشت، داریم:

$$\delta\eta_i(x_1,x_2,z)=L_a(z)\delta\eta_i^a(x_1,x_2) \quad (۱۶)$$

با تعریف پارامترهای زیر:

$$\begin{aligned} &M_{\alpha\beta}^a=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\alpha\beta}L_a dz, \qquad T_i^a=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{i3}L_a dz,\\ &R_{ab}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_b dz, \qquad b_i^a=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a b_i dz,\\ &B_i^a=L_a(\frac{h}{2})\sigma_{i3}(x_1,x_2,\frac{h}{2})\\ &-L_a(-\frac{h}{2})\sigma_{i3}(x_1,x_2,-\frac{h}{2}).\end{aligned} \quad (۱۷)$$

و با قراردادن معادله (۱۶) در (۱۵) و همچنین استفاده از روابط (۵) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned} &\int_A\delta\eta_\alpha^a M_{\alpha\beta,\beta}^a dA+\int_A\delta\eta_3^a T_{\alpha,\alpha}^a dA\\ &+\int_A\delta\eta_i^a(b_i^a+B_i^a-D_{ab}T_i^b)dA\\ &=\int_A\delta\eta_i^a\ddot{u}_i^b R_{ab}dA \qquad \alpha,\beta=1,2\end{aligned} \quad (۱۸)$$

همچنین از آنجا که معادله (۱۸) برای تمامی مقادیر $\delta\eta^a$ برقرار است، معادلات حرکت بر ورق با استفاده از اصل کار مجازی در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &M_{11,1}^a+M_{12,2}^a+b_1^a+B_1^a-D_{ab}T_1^b=R_{ab}\ddot{v}_1^b\\ &M_{21,1}^a+M_{22,2}^a+b_2^a+B_2^a-D_{ab}T_2^b=R_{ab}\ddot{v}_2^b\\ &T_{\alpha,\alpha}^a+b_3^a+B_3^a-D_{ab}T_3^b=R_{ab}\ddot{w}^b\end{aligned} \quad (۱۹)$$

در بررسی ارتعاشات اجباری ورق، از نیروی حجمی در مقابل نیروی عرضی وارد بر ورق صرف نظر شده است، و شرایط مرزی در بالا و پایین ورق به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma_{13}=\sigma_{23}=0,\sigma_{33}\neq 0 \quad (۲۰)$$

بنابراین، با توجه به روابط (۲۰) معادلات (۱۹) به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} &M_{11,1}^a+M_{12,2}^a-D_{ab}T_1^b=R_{ac}\ddot{v}_1^c\\ &M_{21,1}^a+M_{22,2}^a-D_{ab}T_2^b=R_{ac}\ddot{v}_2^c\\ &T_{1,1}^a+T_{2,2}^a+B_3^a-D_{ab}T_3^b=R_{ad}\ddot{w}^d\end{aligned} \quad (۲۱)$$

به‌منظور حل این معادلات، لازم است با استفاده از معادلات (۱۰)، (۱۱)، (۱۷)، روابط را برای ماده هدفمند نوشته و تمام کرنش‌ها را برحسب مؤلفه‌های میدان جابجایی بیان کرد. در این‌صورت، به معادلات به‌دست آمده، معادلات حرکت ورق گفته می‌شود.

با فرض جواب هارمونیک برای ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی، داریم:

$$\begin{aligned} &v_\alpha^a(x_1,x_2,t)=e^{i\omega_{ext}t}V_\alpha^a(x_1,x_2)\\ &w^a(x_1,x_2,t)=e^{i\omega_{ext}t}W^a(x_1,x_2)\\ &\alpha=1,2\\ &B_3^a=\left[L_a(\frac{h}{2})\sigma_{33}(x_1,x_2,\frac{h}{2})-L_a(-\frac{h}{2})\sigma_{33}(x_1,x_2,-\frac{h}{2})\right]e^{i\omega_{ext}t}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

که در آن، ω_{ext} فرکانس تحریک ارتعاشات ورق می‌باشد. با این فرض، میدان جابجایی جدید (W^a, V_α^a) تنها تابع مختصات درون‌صفحه‌ای می‌شوند. با بازنویسی معادلات (۲۱) بر حسب مؤلفه‌های جابجایی و با فرض جواب هارمونیک برای ارتعاشات اجباری ورق، معادلات حاکم بر ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی هدفمند به‌دست می‌آیند. در این معادلات تابعیت زمان از میدان جابجایی جدید حذف شده و در مقابل، به فرم مسئله ناهمگن تبدیل می‌شوند (پیوست **۱**). به‌منظور حل این معادلات، از شرایط مرزی مکانیکی ورق کمک گرفته می‌شود.

۴- حل ناویر

به‌منظور حل معادلات حاکم، شرایط مرزی روی چهار لبه ورق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &W^a = 0\,, M_{21}^a = 0,\, M_{11}^a = 0,\, on\ x_1 = 0, l_1 \\ &W^a = 0\,, M_{22}^a = 0,\, M_{12}^a = 0,\, on\ x2 = 0, l_2 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

بنابراین، با توجه به شرط مرزی (۲۳)، میدان جابجایی جدید را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V_1^a &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \tilde{V}_1^{amn} \cos(\frac{m\pi x_1}{L_1}) \sin(\frac{n\pi x_2}{L_2}) \\ V_2^a &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \tilde{V}_2^{amn} \sin(\frac{m\pi x_1}{L_1}) \cos(\frac{n\pi x_2}{L_2}) \\ W^a &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \tilde{W}^{amn} \sin(\frac{m\pi x_1}{L_1}) \sin(\frac{n\pi x_2}{L_2}) \end{aligned} \tag{۲۴}$$

در این سری‌ها، m و n تعداد جملات موجود در سری می‌باشد.

با قرار دادن روابط (۲۴) در معادلات حاکم در پیوست **۱** و باز کردن معادلات، معادلات حاکم ناهمگن در پیوست **۲** به‌دست می‌آیند.

۵- به‌دست آوردن تنش‌ها

با استفاده از رابطه (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= C_{55}\gamma_{23} \\ \sigma_{13} &= C_{55}\gamma_{13} \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2}\left(C_{11} - C_{12}\right)\gamma_{12} \end{aligned} \tag{۲۵}$$

با بازنویسی معادلات (۲۵) برحسب مؤلفه‌های جابجایی و با فرض جواب هارمونیک و حل ناویر، تنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \left\{ -C_{13}L_c\tilde{V}_1^{cmn}(\frac{m\pi}{L_1}) - C_{13}L_c\tilde{V}_2^{cmn}(\frac{n\pi}{L_2}) + D_{db}L_b\tilde{W}^{dmn}C_{33} \right\} \\ &\sin(\frac{m\pi x_1}{L_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{L_2}).e^{i\omega_{ext}t} \\ \sigma_{11} &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \left\{ -C_{11}L_c\tilde{V}_1^{cmn}(\frac{m\pi}{L_1}) - C_{12}L_c\tilde{V}_2^{cmn}(\frac{n\pi}{L_2}) + D_{db}L_b\tilde{W}^{dmn}C_{13} \right\} \\ &\sin(\frac{m\pi x_1}{L_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{L_2}).e^{i\omega_{ext}t} \\ \sigma_{22} &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \left\{ -C_{12}L_c\tilde{V}_1^{cmn}(\frac{m\pi}{L_1}) - C_{11}L_c\tilde{V}_2^{cmn}(\frac{n\pi}{L_2}) + D_{db}L_b\tilde{W}^{dmn}C_{13} \right\} \\ &\sin(\frac{m\pi x_1}{L_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{L_2}).e^{i\omega_{ext}t} \\ \sigma_{12} &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}\left(C_{11} - C_{12}\right)L_c\left[\tilde{V}_1^{cmn}(\frac{n\pi}{L_2}) + \tilde{V}_2^{cmn}(\frac{m\pi}{L_1})\right] \right\}. \\ &\cos(\frac{n\pi x_1}{L_1})\cos(\frac{n\pi x_2}{L_2}).e^{i\omega_{ext}t} \\ \sigma_{23} &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \left\{ C_{55}L_d\left(\tilde{V}_2^{cmn}D_{cd}\right) + C_{55}(\frac{n\pi}{L_2})L_d\tilde{W}^{dmn} \right\} \\ &\sin(\frac{n\pi x_1}{L_1})\cos(\frac{n\pi x_2}{L_2}).e^{i\omega_{ext}t} \\ \sigma_{13} &= \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \left\{ C_{55}L_d\left(\tilde{V}_1^{cmn}D_{cd}\right) + C_{55}(\frac{m\pi}{L_1})L_d\tilde{W}^{dmn} \right\} \\ &\cos(\frac{n\pi x_1}{L_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{L_2}).e^{i\omega_{ext}t} \end{aligned} \tag{۲۶}$$

برای حل دستگاه معادلات ناهمگن در پیوست **۲** می‌توان از روش کرامر یا روش‌های دیگر حل معادلات ناهمگن استفاده کرد و مجهولات $\tilde{W}^{amn}, \tilde{V}_2^{amn}, \tilde{V}_1^{amn}$ را به‌دست آورد، و در نهایت تنش‌های مجهول را با استفاده از رابطه (۲۶) به‌دست آورد. دیده می‌شود برای هر تئوری از مرتبه K تعداد معادلات $3(K+1)$ می‌باشد.

۶- بحث و نتایج عددی

برای به‌دست آوردن نتایج عددی از دو ماده هدفمند فلز-سرامیک استفاده شده است. ماده اول (ماده هدفمند همسانگرد) ترکیب آلومینیوم و آلومینا و ماده دوم (ماده هدفمند همسانگرد عرضی) ترکیب آلومینا و تیتانیوم می‌باشد. توزیع فلز و سرامیک به‌صورت توانی در نظر گرفته شده است.

فلز در سطح پایین و سرامیک در سطح بالا قرار می‌گیرد. خصوصیات فیزیکی و مکانیکی این مواد در جدول **۱** آمده است. در ارتعاشات اجباری وقتی فرکانس طبیعی ورق صفر شود و تابعیت زمان در نظر گرفته نشود نتایج آنالیز استاتیکی ورق حاصل می‌شود. بنابراین با توجه به این‌که تاکنون نتایج عددی برای ارتعاشات اجباری حالت ماندگار ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی ارائه نشده است، برای بررسی صحت نتایج تنها به مقایسه نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مراجع [۱۹و۷] اکتفا می‌شود (جدول **۲**).

در این مقاله برای بار هارمونیک از پارامترهای بی‌بعد (۲۷) و محور z رو به پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود (فقط در این حالت محور z اینگونه فرض شده است در بقیه حالات محور z رو به بالا مثبت است) و برای بار یکنواخت عرضی از پارامترهای بی‌بعد (۲۸) استفاده شده است با این تفاوت که در بار یکنواخت برای ماده هدفمند همسانگرد به‌جای E، از E_M و برای ماده هدفمند همسانگرد عرضی از (c_{11M}) استفاده شده است در هر دو بارگذاری از مدل توانی استفاده شده است و بار به سطح بالای ورق وارد می‌شود. با میل‌کردن پارامتر N به سمت صفر و بی‌نهایت، به-ترتیب ورق همگن از جنس سرامیک و فلز به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\bar{w}^{\bullet}=w\left(\frac{L_1}{2},\frac{L_2}{2},0\right)\frac{E_C h^3}{q_0 L_1{}^4}\,\mathrm{x}10\\
&\bar{\sigma}_x^{\bullet}=\sigma_x\left(\frac{L_1}{2},\frac{L_2}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{h}{q_0L_1}\\
&\bar{\sigma}_y^{\bullet}=\sigma_y\left(\frac{L_1}{2},\frac{L_2}{2},\frac{h}{3}\right)\frac{h}{q_0L_1}\\
&\bar{\sigma}_{xy}^{\bullet}=\sigma_{xy}\left(0,0,-\frac{h}{3}\right)\frac{h}{q_0L_1}\\
&\bar{\sigma}_{xz}^{\bullet}=\sigma_{xz}\left(0,\frac{L_2}{2},0\right)\frac{h}{q_0L_1}\\
&\bar{\sigma}_{yz}^{\bullet}=\sigma_{yz}\left(\frac{L_1}{2},0,0\right)\frac{h}{q_0L_1}\\
&\bar{u}^{\bullet}=u\left(0,\frac{L_2}{2},-\frac{h}{4}\right)\frac{E_C h^3}{q_0 L_1{}^4}\,\mathrm{x}100\\
&\bar{v}^{\bullet}=v\left(\frac{L_1}{2},0,-\frac{h}{2}\right)\frac{E_C h^3}{q_0 L_1{}^4}\,\mathrm{x}100
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{w}^{*}=w\left(\frac{L_1}{2},\frac{L_2}{2},0\right)\frac{E}{q_0L_1}\\
&\bar{u}^{*}=u\left(\frac{L_1}{4},\frac{L_2}{4},0\right)\frac{E}{q_0L_1}\\
&\bar{\sigma}_x^{*}=\frac{\sigma_x\left(\frac{L_1}{2},\frac{L_2}{2},\frac{h}{2}\right)}{q_0}\\
&\bar{\sigma}_{xy}^{*}=\frac{\sigma_{xy}\left(\frac{L_1}{4},\frac{L_2}{4},0\right)}{q_0}\\
&\bar{\sigma}_{xz}^{*}=\frac{\sigma_{xz}\left(\frac{L_1}{4},\frac{L_2}{4},0\right)}{q_0}\\
&\bar{\sigma}_{zz}^{*}=\frac{\sigma_{xz}\left(\frac{L_1}{4},\frac{L_2}{4},0\right)}{q_0}\\
&E=100x10^9
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

در این مقایسه تغییرات خواص در جهت ضخامت به‌صورت تابع نمایی زیر در نظر گرفته شده است:

$$\overset{\vee}{C}_{ij}=C_{ij}e^{\left(\frac{h}{2L_1}+\frac{z}{L_1}\right)} \tag{۲۹}$$

پس از نشان‌دادن صحت تحلیل‌های حاضر، نتایج جدیدی برای بیان رفتار ارتعاشی ورق ارائه گردیده است. مقادیر پارامتر بی‌بعد تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد و نسبت‌های مختلف طول مشخصه به ضخامت تحت بار سینوسی (هارمونیک) و تحت بار یکنواخت با استفاده از تئوری مرتبه اول تا پنجم برشی و قائم آورده شده است. وقتی ورق تحت بار هارمونیک عرضی قرار می‌گیرد σ_{33} را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{33}(x,y,-\frac{h}{2},t)=q\left(x,y,t\right)=-q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega_{ext}t}\\
&\sigma_{33}(x,y,\frac{h}{2},t)=0\\
&q_0=1
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

اگر بار یکنواخت $q(x,y)=q_0$ به ورق وارد شود σ_{33} را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$q_{mn}=\frac{16q_0}{\pi^2 mn}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{33}(x,y,\frac{h}{2},t)=q\left(x,y,t\right)=-\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=1,3,..}^{\infty}\frac{16q_0}{mn\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega_{ext}t}\\
&q_0=1\\
&\sigma_{33}(x,y,-\frac{h}{2},t)=0
\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

برای نشان‌دادن همگرایی مقادیر پارامترهای بی‌بعد تنش و جابجایی‌ها، برای ورق مربعی هدفمند همسانگرد در یک N و h/l_1 خاص تحت بار هارمونیک در جدول **۳** آورده شده است. ω_{ext} فرکانس کاری و ω_N کوچک‌ترین فرکانس طبیعی می‌باشد که از نتایج مرجع [۲۳] استفاده شده است. مقادیر پارامتر بی‌بعد تنش‌ها و جابجایی‌ها برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد و نسبت‌های مختلف طول مشخصه به ضخامت با استفاده از تئوری مرتبه اول، تا پنجم برشی و قائم تحت بار یکنواخت در جدول‌های **۴** و **۵** آمده است.

مقادیر پارامتر بی‌بعد تنش‌ها و جابجایی‌ها برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد عرضی و نسبت‌های مختلف طول مشخصه به ضخامت تحت بار یکنواخت q_0 با استفاده از تئوری مرتبه اول تا پنجم برشی و قائم در جدول‌های **۶** و **۷** آمده است.

همان‌طورکه در جدول‌ها مشاهده می‌شود، در نسبت‌های ضخامت به طول خیلی کم (ورق نازک و خیلی نازک) نتایج از تئوری مرتبه سوم به بعد ثابت می‌شوند و جواب دقیق حاصل می‌شود و نیاز به نوشتن مرتبه‌های بالاتر نیست ولی برای ورق‌های ضخیم هرچه مرتبه تئوری بالاتر برود جواب‌های دقیق‌تر حاصل می‌شود. همچنین، ملاحظه می‌شود که با افزایش توان ماده هدفمند و نزدیک شدن به سطح فلزی قدر مطلق $\bar{w}^*$ ، $\bar{\sigma}_x^*$ و $\bar{\sigma}_{xy}^*$ افزایش و $\bar{\sigma}_{xz}^*$ کاهش می‌یابند، همچنین، با افزایش ضخامت ورق قدرمطلق $\bar{w}^*$ ، $\bar{\sigma}_x^*$ و $\bar{\sigma}_{xz}^*$ کاهش می‌یابند.

تغییرات پارامتر بی‌بعد جابجایی عرضی و جابجایی درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت، برای نسبت ضخامت به طول مشخصه ۰/۱ و ۰/۵ برای ورق مربعی هدفمند در شکل‌های **۵-۲** تحت بار یکنواخت ارائه شده است. همان‌گونه‌که ملاحظه می‌شود در حالتی‌که نسبت ضخامت به طول کم است، در همه فرکانس‌های تحریک پارامتر بی‌بعد جابه‌جایی عرضی در راستای ضخامت تقریباً یکنواخت باقی می‌ماند و تغییرات جابجایی درون‌صفحه‌ای به‌صورت خطی می‌باشد، درصورتی‌که وقتی ضخامت به طول افزایش می‌یابد جابجایی عرضی در راستای ضخامت دیگر یکنواخت نیست و جابجایی درون‌صفحه‌ای به‌صورت خطی تغییر نمی‌کند. همچنین، ملاحظه می‌گردد که وقتی فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی ورق نزدیک می‌شود پارامترهای بی‌بعد جابجایی افزایش می‌یابند و وقتی که فرکانس تحریک خیلی نزدیک به فرکانس طبیعی شود پدیده تشدید رخ می‌دهد و دامنه جابجایی‌ها خیلی زیاد می‌شوند. هرچه توان ماده هدفمند کم‌تر شود مقدار خیز در راستای ضخامت کم‌تر و یکنواخت‌تر می‌شود همچنین، رنج تغییرات جابجایی درون‌صفحه‌ای کم‌تر شده و خطی‌تر می‌شوند، به‌دلیل این‌که به سطح سرامیکی نزدیک‌تر می‌شود در نتیجه سختی ورق بیش‌تر می‌شود. از طرف دیگر چون در حالت کلی فرکانس‌های طبیعی ورق همسانگرد در مقایسه با ورق همسانگرد عرضی مشابه، اندکی بیش‌تر است [۲۳]، به این دلیل که ثوابت سختی ورق هدفمند همسانگرد بیش‌تر از ورق هدفمند همسانگرد عرضی می‌باشد، بنابراین جابجایی‌های ورق هدفمند همسانگرد کم‌تر از ورق هدفمند همسانگرد عرضی مشابه می‌باشد (شکل **۳**).

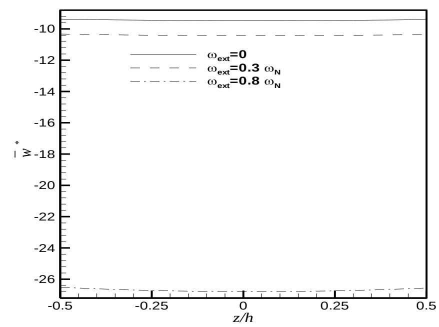
تغییرات پارامترهای بی‌بعد تنش‌ها در راستای ضخامت برای ورق مربعی برای ماده همگن سرامیک همسانگرد عرضی در شکل‌های **۹-۶** آورده شده است. در نسبت ضخامت به طول کم تنش‌های بیرون‌صفحه‌ای در مقابل تنش‌های درون‌صفحه‌ای قابل اغماض هستند، همان‌طورکه در شکل‌ها ملاحظه می‌شود $\bar{\sigma}_{xy}^*$، $\bar{\sigma}_x^*$ در مرزها بیش‌تر هستند و $\bar{\sigma}_{yz}^*$، در هر دو مرز صفر می‌باشد و $\bar{\sigma}_{zz}^*$، در مرز پایین صفر و در مرز بالا یک می‌باشد. در حالت کلی $\bar{\sigma}_{xy}^*$، $\bar{\sigma}_x^*$ رفتارشان عکس یک‌دیگر می‌باشد در مرزی که یکی از این دو تنش تحت کشش باشد تنش دیگر تحت فشار می‌باشد و بالعکس (تنش $\bar{\sigma}_{xy}^*$ در بالای ورق به‌صورت کششی و $\bar{\sigma}_x^*$ به‌صورت فشاری می‌باشد).

شکل **۱۰** تغییرات پارامترهای بی‌بعد تنش‌های درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت برای ورق مربعی همگن همسانگرد و همسانگرد عرضی را نشان می‌دهد. همان‌طورکه ملاحظه می‌گردد مقدار تنش‌های درون‌صفحه‌ای ماده همسانگرد عرضی بیش‌تر از ماده همسانگرد می‌باشد. در ورق‌های همگن ضخیم تنش‌های درون‌صفحه‌ای به‌صورت

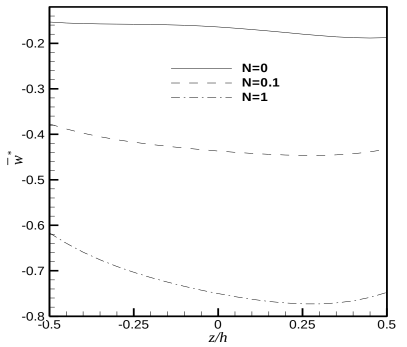
غیرخطی هستند. برای بارگذاری‌های مکانیکی تنش‌های درون‌صفحه‌ای در یک ورق همگن (همسانگرد و همسانگرد عرضی) در صفحه میانی ورق صفر می‌باشند و با افزایش توان ماده هدفمند تنش‌های درون‌صفحه‌ای، در صفحه‌ای غیر از صفحه میانی ورق نزدیک صفر هستند.

شکل‌های **۱۱** و **۱۲** تغییرات پارامترهای بی‌بعد تنش‌های درون‌صفحه‌ای و جابجایی‌ها در راستای ضخامت را برای ورق هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی نشان می‌دهند. با توجه به شکل **۱۱** می‌توان گفت مقدار تنش‌های درون‌صفحه‌ای $\bar{\sigma}_x^*$، $\bar{\sigma}_{xy}^*$ در یک ورق هدفمند همسانگرد با هر نسبت ابعادی و با توان ماده هدفمند $N=5$ در صفحه $(z \approx 0.20h)$ نزدیک صفر هستند، بنابراین می‌توان صفحه $(z \approx 0.20h)$ را به‌عنوان رویه خنثی ورق دانست. همچنین با توجه به شکل (۱۲) می‌توان گفت مقدار تنش‌های درون‌صفحه‌ای $\bar{\sigma}_x^*$، $\bar{\sigma}_{xy}^*$ در یک ورق هدفمند همسانگرد عرضی با هر نسبت ابعادی و با توان ماده هدفمند $N=5$ در صفحه $(z \approx 0.15h)$ نزدیک صفر هستند، بنابراین می‌توان صفحه $(z \approx 0.15h)$ را به‌عنوان رویه خنثی ورق دانست.

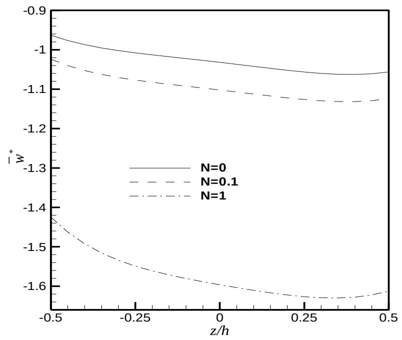
شکل **۱۳** تغییرات پارامترهای بی‌بعد جابجایی‌ها را در راستای ضخامت برای نسبت‌های مختلف l_1/l_2 برای ورق هدفمند همسانگرد را نشان می‌دهد. همان‌طورکه مشاهده می‌گردد هرچه این نسبت کمتر شود، پارامتر بی‌بعد جابجایی عرضی و رنج تغییرات جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت بیش‌تر می‌شود.



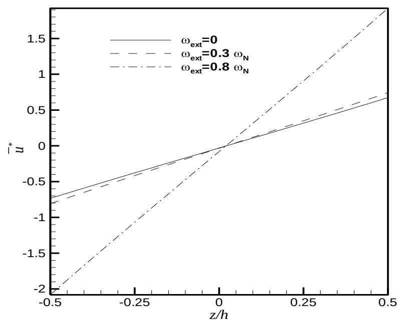
شکل (۲): تغییرات پارامتر بی‌بعد جابجایی عرضی در راستای ضخامت برای ورق مربعی برای ماده هدفمند همسانگرد در $N=0.1$، $\frac{h}{l_1}=0.1$.



شکل (۳- الف): تغییرات پارامتر بی‌بعد جابجایی عرضی در راستای ضخامت برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد، برای ورق مربعی، $\omega_{ext}=0.8\omega_N$ ، $\frac{h}{l_1}=0.5$.



شکل (۳- ب): تغییرات پارامتر بی‌بعد جابجایی عرضی در راستای ضخامت برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد عرضی، ورق مربعی، $\omega_{ext}=0.8\omega_N$ ، $\frac{h}{l_1}=0.5$.



شکل (۴): تغییرات پارامتر بی‌بعد جابجایی درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت برای ورق مربعی برای ماده هدفمند همسانگرد در $N=0.1$، $\frac{h}{l_1}=0.1$.

جدول (۱- الف): خصوصیات ماده هدفمند همسانگرد (ایزوتروپ) [۲۱].

مواد	E(Gpa)	ρ(Kg/m^3)	ν
آلومینیوم	70	2702	0/3
آلومینا	380	3800	0/3
تیتانیوم	116	4506	0/3

جدول (۱- ب): خصوصیات ماده هدفمند همسانگرد عرضی [۱۸].

مواد	مدول الاستیسیته $10^9\,(Nm^{-2})$					چگالی
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{55}	ρ(Kg/m^3)
آلومینا	460/2	174/7	127/4	509/5	126/9	3800
تیتانیوم	162/4	92	69	180/7	46/7	4506

جدول (۲): مقایسه پارامترهای بی‌بعد تنش و جابجایی برای ورق مربعی همسانگرد تحت بار یکنواخت در $h/l_1 = 0.15$ ، $\omega_{ext} = 0$ با استفاده از تئوری برشی و قائم مرتبه پنجم با مرجع [۷] و [۱۹].

m	N	مدل	$\bar{w}^*$	$\bar{\sigma}_x^*$	$\bar{\sigma}_{xz}^*$	$\bar{\sigma}_{xy}^*$
		نتایج حاضر	−14/4380	−13/0820	−1/0194	−0/0420
25	0	[۱۹]	−14/4442	−13/0437	−1/0196	−0/0420
		[۷]	−14/4380	−13/0630	−1/0196	−0/0420
		نتایج حاضر	−14/4380	−13/0566	−1/0196	−0/0420
50	0	[۱۹]	−14/4442	−13/0437	−1/0196	−0/0420
		[۷]	−14/4380	−13/0630	−1/0196	−0/0420
		نتایج حاضر	−9/9955	−16/7502	−1/0123	−0/4863
25	5	[۱۹]	−10/0002	−16/7086	−1/0124	−0/4863
		[۷]	−9/8985	−16.7328	−1/0124	−0/4863
		نتایج حاضر	−9/9955	−16/7229	−1/0124	−0/4863
50	5	[۱۹]	−10/0002	−16/7086	−1/0124	−0/4863
		[۷]	−9/8985	−16/7328	−1/0124	−0/4863
		نتایج حاضر	−20/9551	−10/1713	−1/0123	0/4004
25	−5	[۱۹]	−20/9637	−10/1353	−1/0124	0/4004
		[۷]	−21/1604	−10/1550	−1/0124	0/4004
		نتایج حاضر	−20/9552	−10/1475	−1/0125	0/4004
50	−5	[۱۹]	−20/9637	−10/1353	−1/0124	0/4004
		[۷]	−21/1604	−10/1550	−1/0124	0/4004

جدول (۳): مقادیر پارامترهای بی‌بعد برای ورق مربعی آلومینیوم – آلومینا (هدفمند همسانگرد) با نسبت ضخامت به طول مشخصه $h/l_1 = 0.2$ با تئوری‌های مرتبه اول تا پنجم برشی و قائم ($N = 5$)، تحت بار سینوسی، $\omega_{ext} = 0.8\,\omega_N$.

K	$\bar{u}^{\bullet}$	$\bar{v}^{\bullet}$	$\bar{w}^{\bullet}$	$\bar{\sigma}_x^{\bullet}$	$\bar{\sigma}_y^{\bullet}$	$\bar{\sigma}_{xy}^{\bullet}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{\bullet}$
K=1	4/84640	3/82617	2/39655	6/29245	1/64400	0/65328	0/28383
K=2	5/69538	4/57927	2/77356	5/87910	1/44920	0/75596	0/33801
K=3	5/50395	4/36857	2/89913	6/11634	1/38524	0/74572	0/51983
K=4	5/48321	4/37327	2/90259	5/96289	1/43409	0/74153	0/53227
K=5	5/4665	4/34276	2/90453	5/9646	1/42863	0/74241	0/55553

جدول (۴): مقادیر پارامترهای بی‌بعد تنش و جابجایی برای ورق مربعی از جنس آلومینیوم – آلومینا با توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد تحت بار یکنواخت در $\frac{l_1}{h} = 10$، $\omega_{ext} = 0.8\,\omega_N$ با استفاده از تئوری برشی و قائم مرتبه‌ی اول تا پنجم.

K	N	$\bar{w}^{*}$	$\bar{\sigma}_x^{*}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{*}$	$\bar{\sigma}_{xy}^{*}$
K=1	0	−19/86143	−94/12415	−3/27427	−0/04278
	5	−60/46311	−198/50070	−2/13992	−3/72455
K=2	0	−24/01018	−85/36353	−3/50402	−0/04266
	5	−73/95165	−182/9311	−2/69074	−4/65325
K=3	0	−24/16184	−86/22706	−4/88253	−0/04265
	5	−74/80652	−184/14179	−4/10282	−4/60122
K=4	0	−24/16226	−85/86851	−4/88387	−0/04265
	5	−74/81649	−183/11372	−4/20478	−4/62314
K=5	0	−24/16227	−85/87320	−4/88208	−0/04265
	5	−74/86027	−183/31677	−4/39863	−4/61784

جدول (۵): مقادیر پارامترهای بی‌بعد تنش و جابجایی برای ورق مربعی از جنس آلومینیوم – آلومینا با توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد تحت بار یکنواخت در $\frac{l_1}{h} = 2$، $\omega_{ext} = 0.8\,\omega_N$ با استفاده از تئوری برشی و قائم مرتبه اول تا پنجم.

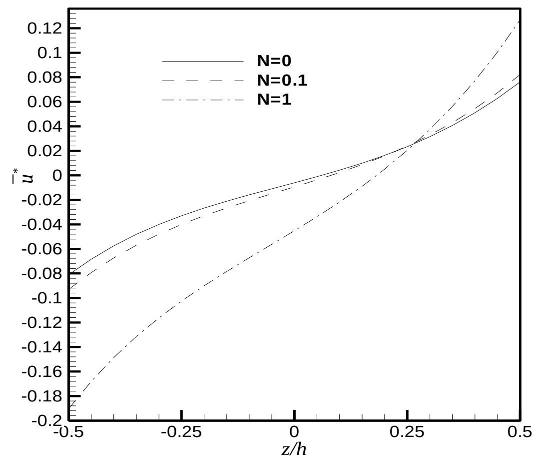
K	N	$\bar{w}^{*}$	$\bar{\sigma}_x^{*}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{*}$	$\bar{\sigma}_{xy}^{*}$
K=1	0	−0/35835	−4/02586	−0/62456	−0/05058
	5	−1/06847	−7/98362	−0/39425	−0/17831
K=2	0	−0/36982	−3/58980	−0/62939	−0/06370
	5	−1/28447	−9/16420	−0/49320	−0/30253
K=3	0	−0/40040	−4/30255	−0/87812	−0/06436
	5	−1/45074	−10/4011	−0/75542	−0/26463
K=4	0	−0/39906	−4/00141	−0/88934	−0/06693
	5	−1/44672	−9/60003	−0/77304	−0/27548
K=5	0	−0/39908	−4/02017	−0/88160	−0/06727
	5	−1/44587	−9/71222	−0/79851	−0/27131

جدول (۶): مقادیر پارامترهای تنش و جابه‌جایی برای ورق مربعی از جنس آلومینا و تیتانیوم با توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد عرضی تحت بار یکنواخت در $\frac{l_1}{h}=10$، $\omega_{ext}=0.8\,\omega_N$ با استفاده از تئوری برشی و عمودی مرتبه اول تا پنجم.

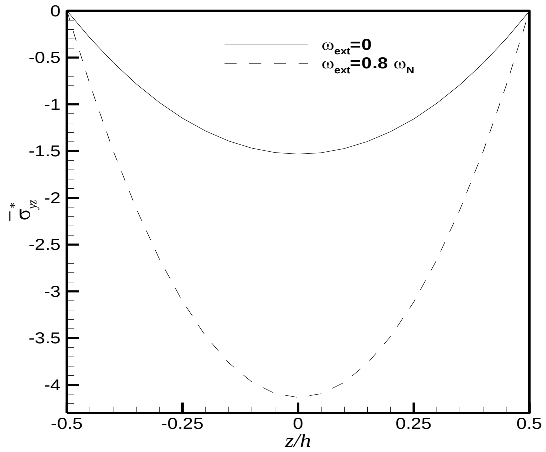
K	N	$\bar{w}^*$	$\bar{\sigma}_x^*$	$\bar{\sigma}_{xz}^*$	$\bar{\sigma}_{xy}^*$
K=1	0	−51/3006	−90/8405	−3/27325	−0/02372
	5	−103/391	−151/779	−2/67082	−2/03711
K=2	0	−54/8262	−87/6681	−3/38682	−0/02370
	5	−117/6348	−148/7766	−2/9324	−2/5070
K=3	0	−55/3157	−88/6022	−4/8939	−0/02369
	5	−119/1500	−152/9117	−4/5046	−2/4765
K=4	0	−55/3162	−88/4268	−4/8946	−0/02369
	5	−119/1859	−153/7798	−4/5062	−2/4781
K=5	0	−55/3162	−88/4307	−4/8916	−0/02369
	5	−119/2019	−153/9137	−4/6085	−2/4770

جدول (۷): مقادیر پارامترهای تنش و جابه‌جایی برای ورق مربعی از جنس آلومینا و تیتانیوم با توان‌های مختلف ماده‌ی هدفمند همسانگرد عرضی تحت بار یکنواخت در $\frac{l_1}{h}=2$، $\omega_{ext}=0.8\,\omega_N$ با استفاده از تئوری برشی و عمودی مرتبه‌ی اول تا پنجم.

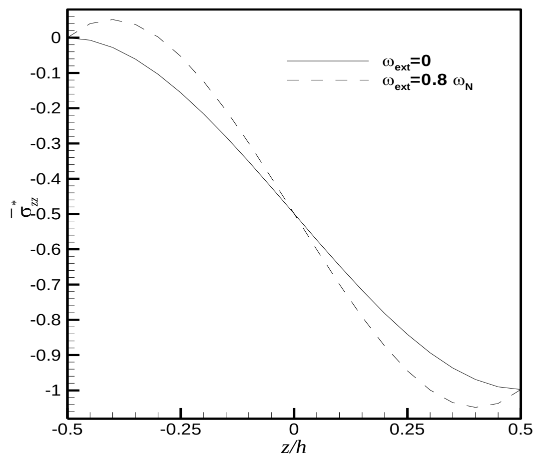
K	N	$\bar{w}^*$	$\bar{\sigma}_x^*$	$\bar{\sigma}_{xz}^*$	$\bar{\sigma}_{xy}^*$
K=1	0	−0/94354	−3/86698	−0/62572	−0/0276
	5	−1/9272	−6/24415	−0/50431	−0/1082
K=2	0	−0/94198	−3/70301	−0/62853	−0/0366
	5	−2/0872	−6/67591	−0/54835	−0/1638
K=3	0	−1/03522	−4/51099	−0/90502	−0/0370
	5	−2/34062	−7/91808	−0/83344	−0/1396
K=4	0	−1/03158	−4/35762	−0/90805	−0/0391
	5	−2/33302	−7/65457	−0/83749	−0/1374
K=5	0	−1/03190	−4/36801	−0/89802	−0/0392
	5	−2/33139	−7/69522	−0/84454	−0.1372



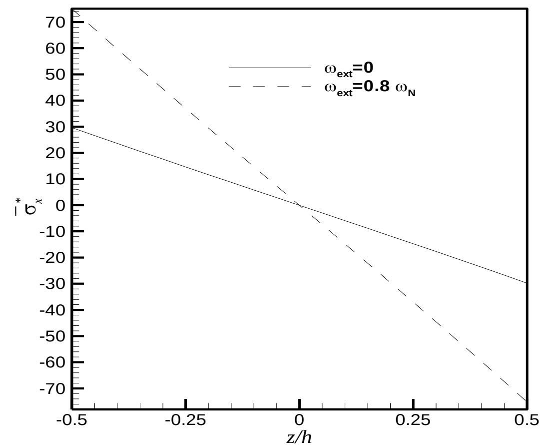
شکل (۵): تغییرات پارامتر بی‌بعد جابجایی درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد، برای ورق مربعی، $\omega_{ext}=0.8\omega_N$ ، $\frac{h}{l_1}=0.5$.



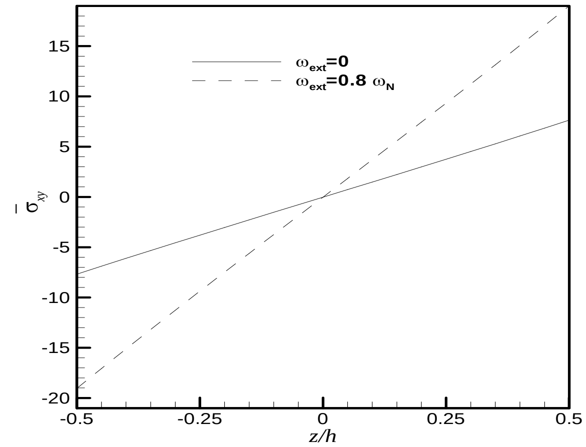
شکل (۷): تغییرات پارامتر بی‌بعد $\bar{\sigma}^*_{yz}$ در راستای ضخامت برای ورق مربعی، ماده همگن سرامیک همسانگرد عرضی، $\frac{h}{l_1}=0.1$.



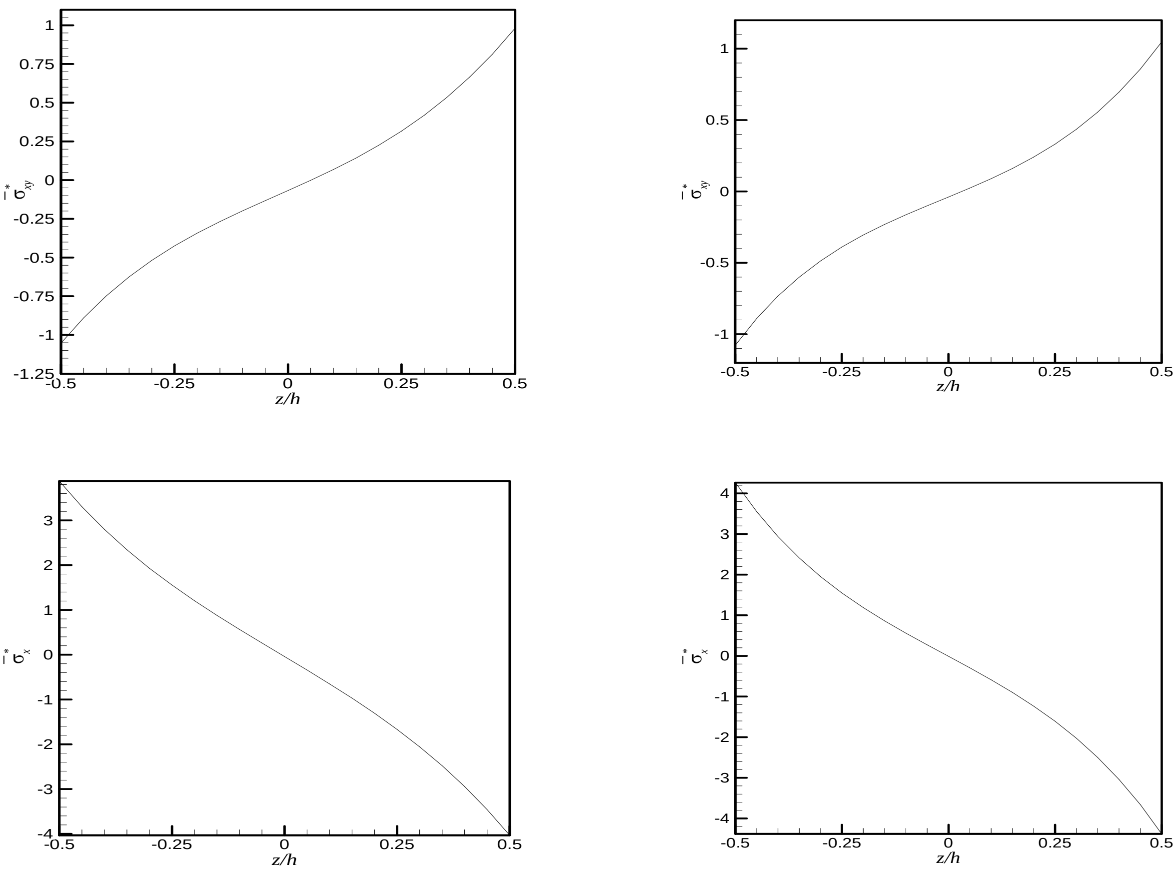
شکل (۶): تغییرات پارامتر بی‌بعد $\bar{\sigma}^*_{zz}$ در راستای ضخامت برای ورق مربعی، ماده همگن سرامیک همسانگرد عرضی، $\frac{h}{l_1}=0.1$.



شکل (۸): تغییرات پارامتر بی‌بعد $\bar{\sigma}^*_{x}$ در راستای ضخامت برای ورق مربعی، ماده همگن سرامیک همسانگرد عرضی، $\frac{h}{l_1}=0.1$.

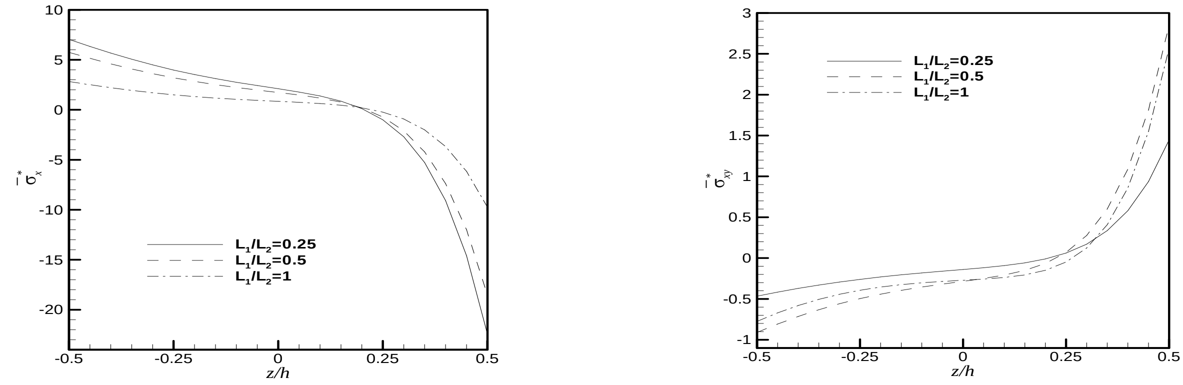


شکل (۹): تغییرات پارامتر بی‌بعد $\bar{\sigma}_{xy}^{*}$ در راستای ضخامت برای ورق مربعی، ماده همگن سرامیک همسانگرد عرضی، $\frac{h}{l_1}=0.1$.

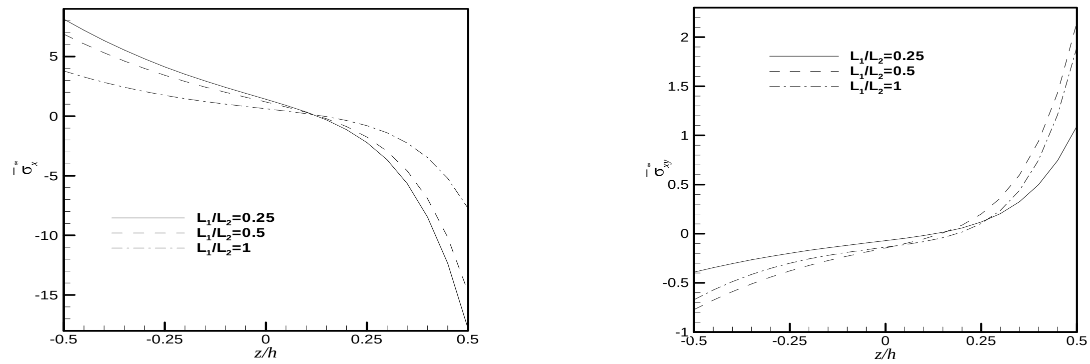


(۱) (۲)

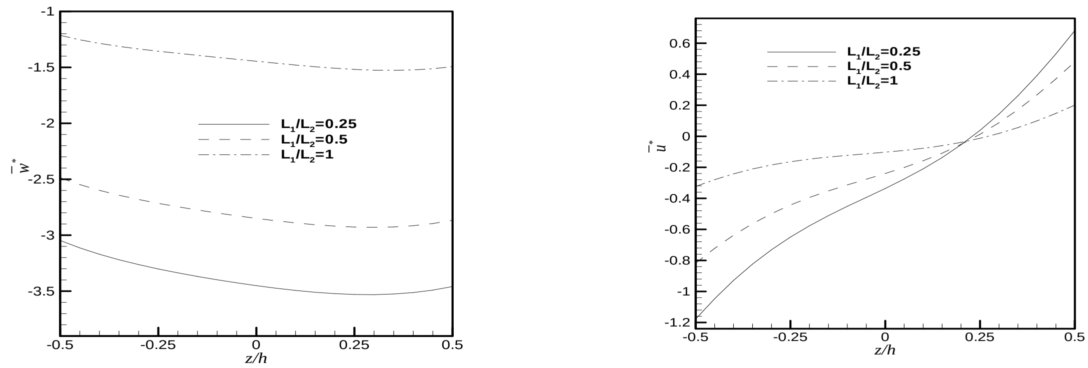
شکل (۱۰): تغییرات پارامترهای بی‌بعد تنش‌های درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت برای ورق مربعی همگن همسانگرد و همسانگرد عرضی، بر اساس تئوری مرتبه پنجم، $\omega = 0.8\omega$، $\frac{h}{l_1}=0.5$ ، ۱) همسانگرد سرامیک ۲) همسانگرد عرضی سرامیک.



شکل (۱۱): تغییرات پارامترهای بی‌بعد تنش‌های درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت برای نسبت‌های مختلف $\frac{l_1}{l_2}$ برای ماده هدفمند همسانگرد ($\omega_{ext}=0.8\omega_N$ ، $\frac{h}{l_1}=0.5$ ، $N=5$).



شکل (۱۲): تغییرات پارامترهای بی‌بعد تنش‌های درون‌صفحه‌ای در راستای ضخامت برای نسبت‌های مختلف $\frac{l_1}{l_2}$ برای ماده هدفمند همسانگرد عرضی ($\omega_{ext}=0.8\omega_N$ ، $\frac{h}{l_1}=0.5$ ، $N=5$).



شکل (۱۳): تغییرات پارامترهای بی‌بعد جابجایی‌ها در راستای ضخامت برای نسبت‌های مختلف $\frac{l_1}{l_2}$ برای ماده هدفمند همسانگرد، ($\omega_{ext}=0.8\omega_N$ ، $\frac{h}{l_1}=0.5$ ، $N=5$).

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و قائم، برای به‌دست آوردن جابجایی‌ها و تنش‌های ورق هدفمند چهار طرف تکیه‌گاه ساده، که بار بر روی سطح بالای ورق وارد می‌شود، استفاده شد. شرایط مرزی ورق به‌طور دقیق با حل ناویر ارضا شدند. مزیت این تئوری این است که برخلاف تئوری‌های برشی ورق، در آن از کرنش قائم برون صفحه‌ای صرف‌نظر نشده و همچنین خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نمی‌شود، همچنین دست‌یابی و حل معادلات حاکم بر ورق با استفاده از این تئوری بسیار آسان‌تر از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی است. نشان داده شد این تئوری نه تنها برای ورق‌های نازک و نیمه ضخیم بلکه برای ورق‌های ضخیم نیز نتایج بسیار دقیقی می‌دهد.

۷- مراجع

1. Batra, R.C. and Vidoli, S. “Higher Order Piezoelectric Plate Theory Derived from a Three-Dimensional Variational Principle”, J. AIAA, Vol. 40, No. 1, pp. 91–104, 2002.
2. Reddy, J.N. “On Laminated Composite Plates with Integrated Sensors and Actuators”, J. Engineering Structures, Vol. 21, No. 7, pp. 568–93, 1999.
3. Reddy, J.N. “Analysis of Functionally Graded Plates”, J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, No. 1, pp. 663-84, 2000.
4. Shen, H.S., Yang, J. and Zhang, L. “Free and Forced Vibration Of Reissner-Mindlin Plates with Free Edges Resting on Elastic Foundations”, J. Sound and Vibration, Vol. 244, No. 2, pp. 299-320, 2001.
5. Shen, H.S., Zheng, J.J. and Huang, X.L. “Dynamic Response of Shear Deformable Laminated Plates Under Thermo-Mechanical Loading and Restingon Elastic Foundations”, J. Composite Structures, Vol. 60, No. 1, pp. 57-66, 2003.
6. Qian, L.F., Batra, R.C. And Chen, L.M. “Free and Forced Vibrations of Thick Rectangular Plates by using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method”, J. Computer Modeling in Engineering and Sciences, Vol. 4, No. 5, pp. 519–34, 2003.
7. Yang, Z.G., Zhong, Z., and Dai, Y. "Three Dimensional Elasticity Analysis of a Functionally Graded Rectangular Plate", Chinese Quarterly Mechanic. China, 2004.
8. Ashraf, M., and Zenkour. "Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates". Mathematical Modelling, Vol. 30, No. 1, pp. 67–84, 2006.
9. Batra, R.C., and Aimmanee, S. "Vibrations of Thick Isotropic Plates With Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theories", Computers and Structures, Vol. 83, No. 12, pp. 934–955, 2005.
10. Batra, R.C. and Aimmanee, V. S. “Vibration of an Incompressible Isotropic Linear Elastic Rectangular Plate with a Higher-order Shear and Normal Deformable Theory”, J. Journal of Sound and Vibration, Vol. 307, No. 3, pp. 961–971, 2007.
11. Batra, R.C. “Higher Order Shear and Normal Deformable Theory for Functionally Graded Incompressible Linear Elastic Plates”, J. Thin-Walled Structures, Vol. 45, No. 12, pp. 974–982, 2007.
12. Matsunaga, H. “Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2-D Higher-order Deformation Theory”, J. Composite Structures, Vol. 82, No. 4, pp. 499–512, 2008.
13. Saidi, A.R. and Atashipour, S.R. “Analytical Solution of Free Vibration of Thick Transversely Isotropic Rectangular Plates Based on First Order Shear Deformation Theory”, Aero. Mech. J., Vol. 4, No. 3, pp. 59-69, 2008. (In Persian)
14. Amini, M. H., Soleimani, M. and Rastgoo, A. “Three-dimensional free Vibration Analysis of Functionally Graded Material Plates Resting on an Elastic Foundation”. J. Smart Materials and Structures, Vol. 18, No. 8, pp. 1–9, 2009.
15. Li, Q., Iu, V.P. and Kou, K.P. “Three-dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Material Plates in Thermal Environment”, J. Sound and Vibration, Vol. 324, No. 7, pp. 733-750, 2009.
16. Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E. “Exact Solution for free Vibration of Thin Functionally Graded Rectangular Plates”, J. Mechanical Engineering Science, Vol. 225, No. 10, pp. 526-536, 2010.
17. Liu, D.Y., Wang, C.Y. and Chen, W.Q. “Free Vibration of FGM Plates with In-plane Material Inhomogeneity”, J. Composite Structures, Vol. 92, No. 5, pp. 1047-51, 2010.
18. Yang, B., Ding, H.J., and Chen, W.Q. “Elasticity Solutions for Functionally Grad Rectangular Plates with Two Opposite Edges Simply Supported”, J. Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, pp. 488–503, 2011.
19. Baferani, A.H., Saidi, A.R. and Ehteshami, H. “Accurate Solution for free Vibration Analysis of Functionally Graded Thick Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation”, J. Composite Structures, Vol. 93, No. 7, pp. 1842–1853, 2011.
20. Hosseini Hashemi, Sh., Akhavan, H. and Fadaee, M. “Exact Closed- form free Vibration Analysis of Moderately Thick Rectangular Functionally

Graded Plates with Two Bonded Piezoelectric Layers", J. Modares Mechanical Engineering, Vol. 11, No. 3, pp. 57-74. (In Persion)

21. Sheikholeslami, S.A. and Saidi, A.R "Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-order Shear and Normal Deformable Plate Theory", J. Composite Structures, Vol. 106, No. 12, pp. 350-361, 2013.
22. Isvandzibaei, M.R. Setareh, M. and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-free Boundary Conditions for free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", Aero. Mech. J., Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2009. (In Persian)
23. Mousavi, Z. Saidi, A.R. "Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on The Higher-Order Shear and Normal Deformable", Aero. Mech. J., Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2015. (In Persian)

پیوست ۱:

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11}\left[V_{1,11}^c+\frac{1}{2}\left(V_{1,22}^c+V_{2,12}^c\right)\right]dz\\&+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12}\left[\frac{1}{2}\left(V_{2,21}^c-V_{1,22}^c\right)\right]dz+D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13}dz\left[W_{,1}^d\right]\\&-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz\left[D_{cd}V_1^c+W_{,1}^d\right]dz=-\omega_{ext}{}^2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_b dz V_1^b\end{aligned} \quad (۱-۱)$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11}\left[\frac{1}{2}\left(V_{1,21}^c+V_{2,11}^c\right)+V_{2,22}^c\right]dz\\&+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12}\left[\frac{1}{2}\left(V_{2,12}^c-V_{2,11}^c\right)\right]dz+D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13}dz\left[W_{,2}^d\right]\\&-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz\left[D_{cd}V_2^c+W_{,2}^d\right]dz=-\omega_{ext}{}^2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_b dz V_2^b\end{aligned} \quad (۱-۲)$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55}\left[D_{cd}\left(V_{1,1}^c+V_{2,2}^c\right)+\nabla^2 W^d\right]dz\\&-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13}dz\left[V_{1,1}^c+V_{2,2}^c\right]-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{33}dz\left[D_{cd}W^d\right]\\&+\left[L_a(\frac{h}{2})\sigma_{33}(x_1,x_2,\frac{h}{2})-L_a(-\frac{h}{2})\sigma_{33}(x_1,x_2,-\frac{h}{2})\right]\\&=-\omega_{ext}{}^2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_b dz W^b\end{aligned} \quad (۱-۳)$$

پیوست ۲:

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_1^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})^2+\frac{1}{2}(\frac{n\pi}{L_2})^2\right]+\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12}dz\left[(\frac{n\pi}{L_2})^2\right]-\right.\\&\left.D_{ab}D_{cd}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz+\omega_{ext}{}^2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_c dz\right\}\\&+\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})(\frac{n\pi}{L_2})\right]-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})(\frac{n\pi}{L_2})\right]\right\}\\&+\tilde{W}^{dmn}\left\{D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})\right]-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})\right]\right\}\\&=0\end{aligned} \quad (۲-۴)$$

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_1^{cmn}\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})(\frac{n\pi}{L_2})\right]-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})(\frac{n\pi}{L_2})\right]\right\}\\&+\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11}dz\left[\frac{1}{2}(\frac{m\pi}{L_1})^2+(\frac{n\pi}{L_2})^2\right]+\right.\\&\left.\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})^2\right]-D_{ab}D_{cd}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz+\omega_{ext}{}^2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_c dz\right\}\\&+\tilde{W}^{dmn}\left\{D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13}dz\left[(\frac{n\pi}{L_2})\right]-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz\left[(\frac{n\pi}{L_2})\right]\right\}\\&=0\end{aligned} \quad (۲-۵)$$

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_1^{cmn}\left\{-D_{cd}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55}dz\,(\frac{m\pi}{L_1})+D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13}dz\,(\frac{m\pi}{L_1})\right\}\\&+\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55}dz\left[D_{cd}(\frac{n\pi}{L_2})\right]+D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13}dz\,(\frac{n\pi}{L_2})\right\}\\&+\tilde{W}^{dmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55}dz\left[(\frac{m\pi}{L_1})^2+(\frac{n\pi}{L_2})^2\right]-D_{ab}D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{33}dz\right.\\&\left.+\omega_{ext}{}^2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho L_a L_d dz\right\}+\left[L_a(\frac{h}{2})\sigma_{33}(x_1,x_2,\frac{h}{2},t)\right.\\&\left.-L_a(-\frac{h}{2})\sigma_{33}(x_1,x_2,-\frac{h}{2},t)\right]=0\end{aligned} \quad (۲-۶)$$