

# طراحی کنترل پسگام مقاوم فازی برای کنترل سامانه‌های فرو تحریک مکانیکی با دو درجه آزادی

محمد رضا سلطانپور<sup>۱</sup>

دانشکده مهندسی برق

دانشگاه هوایی شهید ستاری

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۳۰)

## چکیده

در این مقاله، کنترل پسگام مقاوم فازی برای کنترل سامانه‌های فرو تحریک مکانیکی با دو درجه آزادی ارائه می‌شود. برای این کار در ابتدا این سامانه به دو زیر سامانه‌ی اول و دوم تقسیم می‌گردد. در ادامه برای هر کدام از این زیر سامانه‌ها، یک کنترل کننده پسگام مقاوم طراحی می‌شود. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که زیر سامانه‌های اول و دوم، با اعمال کنترل کننده‌های پیشنهادی در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری هستند. از آنجاکه این سامانه تنها دارای یک ورودی است، بنابراین، اعمال هم‌زمان کنترل کننده‌های زیر سامانه‌ی اول و دوم امکان پذیر نخواهد بود. به همین دلیل برای مرتبط نمودن زیر سامانه‌ها، یک تابع با ویژگی‌های خاص تعریف می‌شود که استفاده از آن می‌تواند کنترل هم‌زمان این زیر سامانه‌ها را امکان پذیر نماید و پایداری مجانبی سراسری سامانه‌ی حلقه بسته را نیز در حضور عدم قطعیت‌های موجود حفظ نماید. سپس با استفاده از منطق فازی، یک تقریب‌گر فازی برای پیاده‌سازی این تابع خاص ارائه می‌گردد. از آنجاکه در ورودی کنترل پیشنهادی از ترم‌های سوئیچینگ استفاده می‌شود، بروز پدیده نامطلوب لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. بنابراین، با استفاده از نظریه فازی، راه‌کاری برای برطرف نمودن این پدیده و نرم نمودن دامنه ورودی کنترل ارائه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** سامانه فرو تحریک با دو درجه آزادی، عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، کنترل پسگام مقاوم، تقریب‌گر فازی

## Fuzzy Robust Backstepping Control Design for Control of Underactuated Mechanical Systems with Two Degrees of Freedom

M. R. Soltanpour

Electrical Engineering Faculty,

Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology.anpour

(Received: 23/October/2017 ; Accepted: 20/May/2018)

### ABSTRACT

In this paper, a fuzzy robust backstepping control is presented to control of underactuated mechanical systems with two-degrees of freedom. To do this, the system is divided into two first and second subsystems. Subsequently, for each of these sub-systems, a robust backstepping controller is designed. The mathematical proof shows that the first and second subsystems, with the application of controllers in the presence of existing structured and un-structured uncertainties, have global asymptotic stability. Because this system only has one input, so simultaneous control of the first and second subsystems will not be possible. For this reason, for connecting sub-systems, a function with specific characteristics is defined, which can be used to control these subsystems simultaneously, and also the global asymptotic stability of closed loop system in the presence of existing uncertainties can be guaranty. Then, using fuzzy logic, a fuzzy approximator is presented to implement this particular function. Since the switching terms are used in proposed control input, the occurrence of undesirable chattering phenomenon in the control input is inevitable. Therefore, using fuzzy theory, a solution is proposed to overcome this phenomenon in the amplitude control input.

**Keywords:** Underactuated System with Two Degrees of Freedom, Structured and Un-Structured Uncertainties, Robust Backstepping Control, Fuzzy Approximator

## ۱- مقدمه

در حوزه مهندسی کنترل به سامانه‌هایی که دارای ورودی‌های کم و درجات آزادی زیادی هستند، سامانه‌های فرو تحریک گفته می‌شود. دلایلی که باعث می‌شود تا سامانه‌ای، یک سامانه فرو تحریک باشد عبارتند از:

- دینامیک ذاتی بعضی از سامانه‌ها نظیر فضاپیماها، بالگردها، موشک‌ها، زیردریایی‌ها و ربات‌های متحرک به‌گونه‌ای هستند که آن‌ها را در دسته سامانه‌های فرو تحریک قرار می‌دهد [۳-۱].
- در بعضی از مواقع، به‌صورت تعمدی طراحی سامانه را به‌گونه‌ای انجام می‌دهند، که سامانه فرو تحریک گردد. به‌عنوان مثال می‌توان به سامانه‌ی ماهواره با دو پیش‌رانه و ربات‌های با رابط‌های قابل انعطاف اشاره نمود [۴].
- در سامانه‌های چند ورودی- چند خروجی، در بعضی از شرایط به‌دلیل وقوع عیب در محرکه‌ها، سامانه ناخواسته به یک سامانه‌ی فرو تحریک تبدیل می‌گردد.
- در مواقعی برای کسب دیدگاه فیزیکی از نحوه کنترل سامانه‌های فرو تحریک با درجات آزادی بالا، از سامانه‌های پیچیده فرو تحریک با درجات آزادی کمتر نظیر سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس تک لینکی، سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس دو لینکی، سامانه‌ی توپ و میله و غیره استفاده می‌شود [۵].

از آن‌جا که سامانه‌های فرو تحریک دارای تعداد محرکه‌های کمتری هستند، بنابراین، این امر باعث کاهش ابعاد فیزیکی، مصرف انرژی و کاهش هزینه‌های اقتصادی ساخت این نوع از سامانه‌ها شده است. به‌همین دلیل محققین مطالعه، طراحی و کنترل این‌گونه از سامانه‌ها را از دیر باز شروع نموده‌اند [۶-۱۰].

برای کنترل سامانه‌های تحریک کامل، روش‌های کنترلی متعددی وجود دارد که دسترسی به عملکرد مطلوب در این سامانه‌ها را امکان‌پذیر نموده است. اما برای کنترل سامانه‌های فرو تحریک تنها می‌توان از روش‌های کنترلی محدودی استفاده نمود و در مواردی نیز این روش‌ها قادر به کنترل سامانه‌ی خاصی بوده و نمی‌توان این روش‌ها را برای کنترل دسته‌ای از سامانه‌های فرو تحریکی استفاده نمود [۱۰]. به‌همین دلیل کنترل سامانه‌های فرو تحریک، از حوزه‌های دشوار و چالش برانگیز در مهندسی کنترل محسوب می‌شود.

کنترل مدلغزشی، یکی از روش‌های کنترل ساختار متغیر است که از آن برای کنترل سامانه‌های غیرخطی دارای عدم قطعیت استفاده می‌شود [۱۱-۱۲]. تا کنون محققین از کنترل مدلغزشی برای کنترل سامانه‌های غیرخطی متعددی استفاده نموده‌اند و نتایج ارائه شده، موفقیت این روش کنترلی در غلبه بر عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در این سامانه‌ها را نشان می‌دهند [۱۳-۱۵]. در این روش، کنترل‌کننده با سوئیچ نمودن به موقع از ساختاری به ساختاری دیگر، متغیرهای حالت سامانه را وادار می‌نماید که به سمت سطح لغزش که تابعی از متغیرهای حالت یا خطاهای سامانه است، همگرا شوند. در مراحل طراحی کنترل مدلغزشی، تابع لیاپانوفی ارائه می‌گردد که پایداری سامانه‌ی حلقه بسته را تضمین می‌نماید. زمانی که متغیرهای حالت سامانه به سطح لغزش می‌رسند، درجه سامانه کاهش می‌یابد و به‌همین دلیل سامانه‌ی حلقه بسته در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات موجود مقاوم شده و دینامیک سامانه سریع‌تر می‌گردد [۱۶]. از آن‌جا که پیاده‌سازی عملی این روش کنترلی بسیار ساده است، بنابراین، استفاده از کنترل مدلغزشی در بین محققین از جذابیت بالایی برخوردار است. تا کنون پژوهشگران از کنترل مدلغزشی، برای کنترل سامانه‌های فرو تحریک استفاده نموده‌اند [۲۰-۱۷]. نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب کنترل‌کننده‌های پیشنهادی را نشان می‌دهند. اما با وجود تمامی این مزایا، کنترل مدلغزشی دارای معایب زیر است:

- کنترل مدلغزشی را برای کنترل سامانه‌هایی استفاده می‌نمایند که از یکدیگر مجزا باشند. از آن‌جا که بین زیر سامانه‌های فرو تحریک، همبندی شدیدی وجود دارد، به‌همین دلیل استفاده از روش مدلغزشی کلاسیک، در کنترل سامانه‌های فرو تحریک کار بسیار دشواری است.
- برای بر طرف نمودن مشکل فوق، محققین کنترل مدلغزشی را با روش‌های کنترلی دیگری ترکیب نموده‌اند. اما در بسیاری از موارد عملکرد کنترل پیشنهادی مناسب نبوده و از طرف دیگر نمی‌توان یک روش نظام‌مندی برای ارائه تابع لیاپانوف در این‌گونه از روش‌ها ارائه نمود.
- در پیاده‌سازی کنترل مدلغزشی کلاسیک، بروز لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب‌ناپذیر بوده و این پدیده احتمال وقوع پدیده‌ی تشدید را افزایش داده و عمر محرکه‌های سامانه را کاهش می‌دهد.

مرحله به مرحله و نظام‌مند انجام می‌شود بنابراین، تابع لیاپانف نهایی نیز در مراحل طراحی به راحتی به دست می‌آید. در پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی، اطلاعات مربوط به زیر سامانه‌ی اول سامانه فروتحریک لازم و کافی است. بنابراین، راه‌کار پیشنهادی از حجم محاسبات بسیار پایینی برخوردار است. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سامانه‌ی حلقه بسته با کنترل پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است.

در ادامه ساختار مقاله به صورتی است که در بخش ۲، معادلات دینامیکی سامانه‌ی فروتحریک با دو درجه آزادی معرفی و فرضیات حاکم بر طراحی کنترل پیشنهادی ارائه می‌شود. بخش ۳ مقاله، به بیان روش طراحی کنترل پسگام مقاوم برای سامانه‌ی فرو تحریک اختصاص دارد. در بخش ۴ و زیر بخش ۴-۱، راه‌کار کنترل همزمان زیر سامانه‌های مربوط به سامانه‌ی فروتحریک بیان می‌گردد. در ادامه در بخش ۵، با استفاده از سامانه‌ی فازی TSK، راه‌کاری برای حذف پدیده لرزش در ورودی کنترل پیشنهادی ارائه می‌شود. در بخش ۶، برای بررسی راه‌کار پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه‌های گاری با پاندول معکوس تک لینیکی و سپس دو لینیکی پیاده‌سازی می‌گردد و در نهایت، بخش ۷ مقاله به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

## ۲- سامانه‌های فروتحریک دو درجه آزادی

در این مقاله، راه‌کاری برای کنترل سامانه‌های فروتحریک دو درجه آزادی با معادله زیر ارائه می‌شود [۲۰-۱۷]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= f_2(X) + b_2(X)u(t) + d_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که بردار متغیرهای  $X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$  حالت،  $u(t)$  ورودی کنترل و  $f_1(X)$ ،  $f_2(X)$  و  $b_1(X)$  و  $b_2(X)$  توابعی غیرخطی، نرم و دارای عدم قطعیت بوده،  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$  اغتشاشات کران‌دار خارجی هستند. در ادامه مقاله، به منظور اختصار از بیان فاکتور زمان در متغیرهای حالت پرهیز می‌شود. برای طراحی کنترل پسگام، فرضیات زیر باید برقرار باشند [۲۰-۱۷]:

کنترل پسگام، یکی از روش‌های مبتنی بر روش لیاپانف است که می‌توان با استفاده از آن، کلاس خاصی از سامانه‌های غیرخطی را پایدار نمود [۲۱]. در روش پسگام، در ابتدا سامانه‌ی کلی به زیر سامانه‌های کوچکی تقسیم شده و برای هر زیر سامانه، یک کنترل‌کننده‌ی مجازی به گونه‌ای طراحی می‌نمایند که آن زیر سامانه را خطی نموده و مشتق تابع لیاپانف را کوچک‌تر از صفر نماید. در این صورت کنترل‌کننده مجازی باعث پایداری آن زیر سامانه می‌شود. سپس همین روش را تا آخرین زیر سامانه اجرا می‌نمایند. در نهایت با به دست آمدن تابع لیاپانف کل سامانه و براساس منفی شدن مشتق آن، کنترل‌کننده واقعی سامانه به گونه‌ای محاسبه می‌شود که پایداری مجانبی سراسری سامانه‌ی حلقه بسته را تضمین می‌نماید. از آنجا که فرایند طراحی این روش کنترلی در یک فرایند بازگشت به عقب صورت می‌پذیرد بنابراین، به این روش کنترل پسگام گفته می‌شود. فرایند طراحی کنترل پسگام مرحله به مرحله انجام می‌شود بنابراین، یادگیری روش طراحی آن برای مهندسين و محققين حوزه کنترل آسان است. اما معایب این روش کنترلی به قرار زیر است:

- روش پسگام را برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های غیرخطی می‌توان استفاده نمود. با تحقیقاتی که در طول سالیان گذشته انجام گردیده، محققین راه‌کارهایی را ارائه نموده‌اند تا گستره استفاده از این روش کنترلی را افزایش دهند [۲۱].
- کنترل پسگام در مواجهه با عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی سامانه‌ی غیرخطی مقاوم نیست [۲۱].

برای مقاوم سازی روش پسگام، محققین از ترکیب کنترل پسگام و کنترل مدلزغشی استفاده نموده‌اند [۲۲-۲۳]. با ترکیب نمودن این روش‌های کنترلی، ضعف‌ها و معایب کنترل پسگام تا حدود زیادی برطرف گردیده و مزایای کنترل مدلزغشی نیز به آن افزوده می‌شود.

در این مقاله با ترکیب کنترل پسگام و کنترل مدلزغشی، راه‌کاری برای کنترل سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی ارائه می‌شود. از آنجا که در روش پسگام، سامانه‌ی کلی به زیر سامانه‌های کوچکی تقسیم می‌شود، این مجزا سازی به پیاده‌سازی کنترل مدلزغشی کمک نموده و عملکرد آن را مطلوب‌تر می‌نماید. از آنجا که روش طراحی کنترل پسگام

به سمت صفر همگرا می‌گردد. برای این کار تابع منتخب لیپانف زیر معرفی می‌شود:

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (۶)$$

از تابع منتخب لیپانف زیر نسبت به زمان مشتق‌گیری و با جای‌گذاری معادلات (۴) و (۵)، معادله‌ی زیر نتیجه می‌گردد:

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1 \dot{e}_1 = e_1(x_2 - \dot{x}_{d1}) = -k_1 e_1^2 \leq 0 \quad (۷)$$

### مرحله ۳:

در این مرحله، متغیر  $Z_1$  به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$z_1 = x_2 + k_1 e_1 - \dot{x}_{d1} \quad (۸)$$

از معادله فوق نسبت به زمان مشتق‌گیری و معادله‌ی (۴) در آن جای‌گذاری می‌گردد:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_2 + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d1} = f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d1} \quad (۹)$$

در این صورت معادلات زیر سامانه‌ی اول برحسب متغیر  $Z_1$  به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_2 - \dot{x}_{d1} \\ \dot{z}_1 &= f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d1} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

### مرحله ۳:

در این مرحله، ورودی کنترل  $u(t)$  به گونه‌ای طراحی می‌شود که خطای ردگیری  $e_1$  به سمت صفر همگرا شود. برای این کار تابع منتخب لیپانف زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$V_2(e_1, z_1) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2 \quad (۱۱)$$

از معادله‌ی فوق نسبت به زمان مشتق‌گیری و معادلات (۴)، (۵) و (۱۰) در آن جای‌گذاری می‌شوند:

$$\dot{V}_2(e_1, z_1) = e_1 \dot{e}_1 + z_1 \dot{z}_1 = -k_1 e_1^2 + z_1(f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d1}) \quad (۱۲)$$

ورودی کنترل  $u(t)$  به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$u(t) = \frac{1}{b_1(X)}(-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 + u_s) \quad (۱۳)$$

که  $k_2$  ثابتی مثبت،  $\hat{f}_1(X)$  و  $\hat{b}_1(X)$  بخش‌های معلوم توابع غیرخطی  $f_1(X)$  و  $b_1(X)$  و  $u_s$  ورودی کنترل جدیدی است که باید طراحی شود. معادله (۱۳) در (۱۲) جای‌گذاری و به آن یکبار  $u_s$  و  $k_2 z_1$  اضافه و کم و در نهایت به صورت زیر مرتب می‌شود:

**فرضیه ۱:** تمامی متغیرهای حالت قابل اندازه‌گیری هستند.

**فرضیه ۲:** توابع غیرخطی  $f_1(X)$  و  $f_2(X)$  دارای عدم‌قیمت هستند و کران بالای آن‌ها یعنی  $f_i(X) \leq f_i^{max}$  مشخص است.

**فرضیه ۳:** توابع غیرخطی  $b_1(X)$  و  $b_2(X)$  کران‌دار، غیرصفر و دارای علامت معلومی به‌ازای هر  $X$  هستند. علامت  $b_i(X)$  تغییر نمی‌کند و بدون از دست دادن هر کلیتی فرض بر آن است که علامت آن‌ها مثبت است. همچنین کران بالا و پائین این توابع یعنی  $b_i^{min} < b_i(X) \leq b_i^{max}$  مشخص هستند.

**فرضیه ۴:** اغتشاشات خارجی نامعلوم اما کران بالای مشخصی دارند، یعنی  $d_i(t) \leq d_i^{max}$ .

## ۳- طراحی کنترل‌کننده پسگام مقاوم برای کنترل سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی

در این بخش، در ابتدا کنترل‌کننده‌ی پسگام مقاومی برای کنترل متغیرهای حالت  $x_1$  و  $x_2$  در زیر سامانه‌ی اول طراحی می‌شود. برای این کار مرحله به مرحله به صورت زیر عمل می‌نمائیم [۲۱]:

### مرحله ۱:

در ابتدا خطای ردگیری متغیر حالت  $x_1$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_1 = x_1 - x_{d1} \quad (۲)$$

که  $x_{d1}$  مسیر مطلوبی است که باید متغیر حالت  $x_1$  طی نماید. از معادله فوق نسبت به زمان مشتق‌گیری می‌گردد:

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{d1} = x_2 - \dot{x}_{d1} \quad (۳)$$

بنابراین، معادله‌ی زیر سامانه اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_2 - \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_2(t) &= f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) \end{aligned} \quad (۴)$$

### مرحله ۲:

در این مرحله، متغیر حالت  $x_2$  به عنوان ورودی مجازی به گونه‌ای طراحی می‌شود که  $e_1$  را به سمت صفر همگرا نماید:

$$x_2 = -k_1 e_1 + \dot{x}_{d1} \quad (۵)$$

که  $k_1$  ثابتی مثبت است. در ادامه اثبات می‌شود که اگر متغیر حالت  $x_2$ ، مطابق معادله‌ی فوق انتخاب شود، آن‌گاه  $e_1$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 + u_s) \\ u_s &= -\rho_1 \text{sign}(z_1) \\ z_1 &= x_2 + k_1 e_1 - \dot{x}_{d1} \\ e_1 &= x_1 - x_{d1}, \dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{d1} \end{aligned} \quad (19)$$

در ادامه ورودی کنترل  $u(t)$  به گونه‌ای طراحی می‌شود که متغیرهای حالت  $x_3$  و  $x_4$  مربوط به زیر سامانه‌ی دوم نیز کنترل شوند. برای این کار مجدداً مراحل طراحی ۱ تا ۵ را مجدداً تکرار نموده و به کنترل زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\hat{b}_2(X)} (-\hat{f}_2(X) - k_3 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{d3} - k_4 z_2 + u_s) \\ u_s &= -\rho_2 \text{sign}(z_2) \\ z_2 &= x_4 + k_3 e_3 - \dot{x}_{d3} \\ e_3 &= x_3 - x_{d3}, \dot{e}_3 = x_4 - \dot{x}_{d3} \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن،  $k_3$ ،  $k_4$  و  $\rho_2$  ثابت‌های مثبت و  $\dot{x}_{d3}$  و  $\ddot{x}_{d3}$  به ترتیب مسیر مطلوب متغیر حالت  $x_3$  و مشتقات مرتبه اول و دوم آن نسبت به زمان هستند.

**نکته ۲:** تا این بخش از مقاله نتیجه می‌گیریم که برای کنترل زیر سامانه‌ی اول، از ورودی کنترل (۱۹) و برای کنترل زیر سامانه‌ی دوم، باید از ورودی کنترل (۲۰) استفاده شود. از آن-جا که مطابق معادله (۱)، این سامانه تنها دارای یک ورودی کنترل است نمی‌توانیم که ورودی‌های کنترلی (۱۹) و (۲۰) را هم‌زمان به سامانه‌ی فرو تحریک (۱) اعمال نماییم. پس در این صورت ناچار به انتخاب کنترل زیر سامانه‌ی اول یا کنترل زیر سامانه‌ی دوم خواهیم بود. به عبارت دیگر نمی‌توانیم هر دو زیر سامانه را هم‌زمان کنترل نماییم. در بخش بعدی مقاله، راه‌کاری برای برطرف نمودن این مشکل ارائه می‌شود تا زیر سامانه‌های اول و دوم بتوانند به صورت هم‌زمان کنترل گردند.

#### ۴- کنترل هم‌زمان زیر سامانه‌های اول و دوم سامانه‌های فرو تحریک با دو درجه آزادی

در این بخش از مقاله برای کنترل هم‌زمان زیر سامانه‌های اول و دوم، معادله (۱۹) را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 + u_s) \\ u_s &= -\rho_1 \text{sign}(z_1) \\ z_1 &= x_2 + k_1(e_1 - \varepsilon) - \dot{x}_{d1} \\ e_1 &= x_1 - x_{d1}, \dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{d1} \\ \varepsilon &= g(s)\varepsilon_{max} \\ s &= \dot{e}_3 + k_3 e_3 \\ e_3 &= x_3 - x_{d3}, \dot{e}_3 = x_4 - \dot{x}_{d3} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, z_1) &= -k_1 e_1^2 + z_1(f_1(X) - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} \hat{f}_1(X) + \\ &\left(1 - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)}\right) k_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} - 1\right) \ddot{x}_{d1} + \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} d_1(t) + \\ &\left(\frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} - 1\right) u_s + \left(1 - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)}\right) k_2 z_1 - k_2 z_1 + u_s) \end{aligned} \quad (14)$$

در ادامه و برای ساده‌سازی،  $\eta_1$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(X) - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} \hat{f}_1(X) + \left(1 - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)}\right) k_1 \dot{e}_1 + \\ &\left(\frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} - 1\right) \ddot{x}_{d1} + \left(\frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} - 1\right) u_s + \left(1 - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)}\right) k_2 z_1 + \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} d_1(t) \end{aligned} \quad (15)$$

**نکته ۱:** معادله (۱۵) در حقیقت جمع کل عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی زیرسامانه‌ی اول است. بنابراین ورودی کنترل  $u_s$  باید به گونه‌ای طراحی شود که بر این عدم قطعیت‌ها غلبه نماید.

معادله (۱۵) در (۱۴) جای‌گذاری می‌گردد:

$$\dot{V}_2(e_1, z_1) = -k_1 e_1^2 + z_1(\eta_1 - k_2 z_1 + u_s) \quad (16)$$

#### مرحله ۵:

در این مرحله، ورودی کنترل  $u_s$  به گونه‌ای طراحی می‌شود که زیرسامانه‌ی حلقه بسته‌ی اول را در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری نماید. برای این کار ورودی کنترل  $u_s$  به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$u_s = -\rho_1 \text{sign}(z_1) \quad (17)$$

که  $\rho_1$  ثابتی مثبت و  $\text{sign}(z_1)$  تابع علامت است. معادله (۱۷) در (۱۶) جای‌گذاری و به صورت زیر مرتب می‌شود:

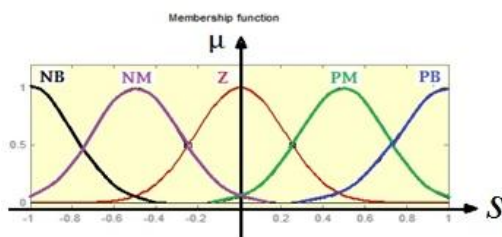
$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, z_1) &= -k_1 e_1^2 - k_2 z_1^2 + z_1 \eta_1 - \rho_1 \text{sign}(z_1) = \\ &-k_1 e_1^2 - k_2 z_1^2 + z_1 \eta_1 - \rho_1 |z_1| \end{aligned} \quad (18)$$

در معادله‌ی فوق اگر براساس فرضیات بیان شده در بخش ۲ مقاله،  $\rho_1 > |\eta_1|$  انتخاب شود، آن‌گاه  $\dot{V}_2(e_1, z_1) \leq 0$  می‌گردد. از آن‌جا که همواره  $\dot{V}_2(e_1, z_1) < 0$  است و تنها برای  $e_1 = 0 = z_1$  برابر با صفر می‌گردد بنابراین، براساس قضیه‌ی لاسال [۲۱]، در زیر سامانه‌ی حلقه بسته اول،  $e_1$  و  $z_1$  به سمت صفر همگرا می‌شوند. در این صورت زیر سامانه‌ی اول با کنترل پیشنهادی زیر و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود:

استنتاج این سامانه‌ی فازی، از ۵ قاعده فازی TS زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} R^1: & \text{if } s \text{ is NB then } y^1 = -\varepsilon_{max} \\ R^2: & \text{if } s \text{ is NM then } y^2 = -\frac{\varepsilon_{max}}{2} \\ R^3: & \text{if } s \text{ is Z then } y^3 = 0 \\ R^4: & \text{if } s \text{ is PM then } y^4 = \frac{\varepsilon_{max}}{2} \\ R^5: & \text{if } s \text{ is PB then } y^5 = \varepsilon_{max} \end{aligned} \quad (22)$$

که در قواعد فازی فوق، منظور از متغیرهای زبانی NB، NM، Z، PM و PB به ترتیب منفی بزرگ، منفی متوسط، صفر، مثبت متوسط و مثبت بزرگ است و  $0 < \varepsilon_{max} < 1$  انتخاب می‌شود. توابع عضویت ورودی S در شکل ۱ آمده است:



شکل (۱): توابع عضویت ورودی S.

براساس قواعد فازی (۲۲) و به دلیل انتخاب موتور استنتاج ضرب ممدانی، نتیجه می‌شود که خروجی هر کدام از قواعد فازی به صورت زیر است:

$$\mu_{f_s^i}(s^*) \cdot y^i, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (23)$$

که  $\mu_{f_s^i}(s^*)$  شدت آتش و  $y^i$  خروجی قاعده  $i$  ام هستند. از آنجا که در طراحی سامانه‌ی فازی از غیرفازی‌ساز میانگین مراکز استفاده شده است بنابراین، خروجی سامانه فازی به صورت زیر است:

$$g(s) = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_s^i}(s^*) \cdot y^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_s^i}(s^*)} \quad (24)$$

تقریب‌گر معادله (۲۴)، به گونه‌ای طراحی شده است که ۲ ویژگی بیان شده در بخش قبل را دارا است. زیرا:

۱. در پایگاه قواعد فازی (۲۲)، خروجی هر کدام از آنها  $-\varepsilon_{max} \leq y^i \leq \varepsilon_{max}$  است. بنابراین، تقریب‌گر معادله (۲۴) ویژگی ۱ بخش قبل را ارضاء می‌نماید.

که  $k_1, k_2, k_3$  و  $\rho_1$  ثابت‌های مثبت و تابع  $g(s)$  باید به گونه‌ای طراحی شود که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. تابع  $g(s)$  باید کراندار باشد. یعنی  $-\varepsilon_{max} \leq g(s) \leq \varepsilon_{max}$  و باید  $0 \leq \varepsilon_{max} < 1$  انتخاب شود.
۲. هرگاه  $|s|$  به سمت صفر همگرا می‌شود، آن‌گاه باید  $|g(s)|$  نیز به مقدار صفر نزدیک شده و به ازاء  $s = 0, g(s) = 0$  شود.

نکته ۳: در راه‌کار پیشنهادی، باید به صورتی زیر سامانه‌های اول و دوم را به یکدیگر مرتبط نماییم، در این صورت متغیرهای حالت زیر سامانه‌های اول و دوم هم‌زمان به سمت صفر همگرا می‌گردند. مطابق معادله (۲۱)، متغیر  $\varepsilon$  به گونه‌ای طراحی گردیده است که این ارتباط را بین زیر سامانه‌ها به وجود می‌آورد. با اعمال ورودی کنترل (۲۱)، نتیجه می‌شود که  $e_1$  به جای صفر به سمت مقدار  $\varepsilon$  همگرا می‌گردد. در صورتی که  $\varepsilon$  به سمت صفر نزدیک شود، آن‌گاه  $e_1$  نیز صفر خواهد شد. اگر  $\varepsilon > 0$  باشد، در این صورت ورودی کنترل (۲۱) به گونه‌ای عمل می‌نماید که  $s$  به سمت صفر همگرا شود. با صفر شدن  $s$ ، متغیر  $\varepsilon$  نیز صفر می‌شود. در این صورت خطاهای ردگیری  $e_1$  و  $e_3$  نیز صفر می‌گردند بنابراین، خطاهای ردگیری زیر سامانه‌های اول و دوم هم‌زمان به سمت صفر همگرا شده و دیگر نیازی به ورودی کنترل (۲۰) نبوده و سامانه‌ی حلقه بسته فرودتحریک دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود.

یکی از مهم‌ترین مزیت‌های راه‌کار پیشنهادی این است که در پیاده‌سازی آن، تنها اطلاعات مربوط به زیر سامانه‌ی اول یعنی توابع غیرخطی  $f_1(X)$  و  $\hat{b}_1(X)$  لازم و کافی است. به همین دلیل حجم محاسبات این کنترل‌کننده بسیار پایین بوده و این امر هزینه‌های اقتصادی پیاده‌سازی عملی کنترل پیشنهادی را کاهش می‌دهد.

#### ۴-۱- طراحی تابع $g(s)$ با استفاده از سامانه فازی TS

در این بخش از مقاله با استفاده از منطق فازی، تقریب‌گری طراحی می‌شود که دارای ۲ ویژگی بخش قبل باشد. در این تقریب‌گر فازی، از فازی‌ساز تکین موتور استنتاج ضرب ممدانی و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز استفاده می‌شود. در موتور

$$R^3: \text{if } z_1 \text{ is } Z \text{ then } u^3 = \frac{1}{\hat{b}_1(X)}(-\hat{f}_1(X) - k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2z_1) \quad (25)$$

$$R^4: \text{if } z_1 \text{ is } PM \text{ then } u^4 = \frac{1}{\hat{b}_1(X)}(-\hat{f}_1(X) - k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2z_1 - \frac{\rho_1}{2})$$

$$R^5: \text{if } z_1 \text{ is } PB \text{ then } u^5 = \frac{1}{\hat{b}_1(X)}(-\hat{f}_1(X) - k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2z_1 - \rho_1)$$

در پایگاه قواعد فازی فوق،  $Z_1$  ورودی این سامانه‌ی فازی است و مقدار آن براساس مقادیر معادله (۲۱) محاسبه می‌شود. توابع عضویتی که در این قواعد فازی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، از نظر شکل، عنوان و مقدار دقیقاً مطابق شکل ۱ هستند. با توجه به قواعد فازی فوق و براساس موتور استنتاج ضرب ممدانی و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز، خروجی این سامانه‌ی فازی یا در اصل ورودی کنترل پیشنهادی به صورت زیر است:

$$y = u(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_{z_1}^i}(z_1^*) \cdot u^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_{z_1}^i}(z_1^*)} \quad (26)$$

در تنظیم پایگاه قواعد فازی (۲۵)، مواردی مد نظر قرار گرفت که به صورت مختصر به آن‌ها اشاره می‌شود: تنظیم قواعد فازی باید به گونه‌ای انجام شود که باعث تضعیف پایداری سامانه‌ی حلقه بسته نشود. به همین دلیل قواعد فازی  $R^1$  و  $R^5$  طوری تنظیم گردیدند که اگر  $|z_1|$  افزایش یابد، آن‌گاه براساس معادله (۲۱)، عملکرد این قواعد باعث حفظ پایداری سامانه‌ی حلقه بسته می‌گردد:

۱. در طراحی قواعد فازی تلاش گردید تا کاهش دامنه ورودی کنترل اتفاق بیفتد. همان‌طور که در قواعد فازی  $R^2$  و  $R^4$  مشاهده می‌شود، با کاهش  $|z_1|$ ، مقدار ضریب  $\rho_1$  نیز نصف می‌گردد. به همین دلیل با کاهش  $|z_1|$ ، دامنه‌ی کنترل پیشنهادی نیز کاهش می‌یابد و این امر از اشباع محرکه‌های سامانه‌ی فروتحریک جلوگیری می‌نماید.

۲. از ورودی کنترل (۲۱) نتیجه می‌شود که متغیر  $Z_1$ ، از طریق  $\mathcal{E}$  با تقریب‌گر فازی  $g(s)$  ارتباط دارد. از آن‌جا که در طراحی تقریب‌گر فازی  $g(s)$ ، از ۵ قاعده فازی یک ورودی - یک خروجی استفاده گردید، به همین دلیل در

۲. با بررسی پایگاه قواعد فازی (۲۲)، نتیجه می‌شود که با کاهش و نزدیک شدن  $S$  به سمت صفر، خروجی قواعد فازی نیز کاهش یافته و به سمت صفر همگرا می‌گردند. به طوری که، وقتی ورودی  $S$  تقریباً صفر می‌شود، خروجی این قاعده صفر در نظر گرفته شده است. بنابراین، معادله (۲۴) ویژگی ۲ بخش قبل را نیز برآورده می‌سازد.

با طراحی تابع  $g(s)$ ، کنترل پیشنهادی معادله (۲۱) تکمیل می‌شود. با توجه به مطالب فوق نتیجه می‌شود که سامانه‌ی فروتحریک با دو درجه آزادی معادله (۱)، با کنترل پیشنهادی معادلات (۲۱) و (۲۴) و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است.

نکته ۴: اگرچه کنترل پیشنهادی، خواسته‌های مورد نظر را برآورده نموده است، اما به دلیل استفاده از تابع  $sign(*)$  در معادلات (۲۱)، بروز پدیده نامطلوب لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب‌ناپذیر است. وجود لرزش در ورودی کنترل، احتمال بروز پدیده تشدید را در سامانه‌های الکترومکانیک افزایش می‌دهد و این امر باعث فروپاشی سامانه و یا کاهش عمر محرکه‌های سامانه می‌شود [۱۶-۱۴]. به همین دلیل در بخش بعد، راه‌کاری برای جلوگیری از بروز لرزش در ورودی کنترل ارائه می‌گردد.

## ۵- استفاده از سامانه‌ی فازی برای جلوگیری از بروز لرزش در ورودی کنترل

در این بخش از مقاله، برای جلوگیری از بروز لرزش در ورودی کنترل مجدداً از سامانه‌ی فازی TS استفاده می‌شود. در این سامانه‌ی فازی نیز از فازی‌ساز تکین، موتور استنتاج ضرب ممدانی و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز استفاده می‌گردد. پایگاه قواعد فازی این سامانه، براساس معادله (۲۱) تنظیم و به صورت زیر است:

$$R^1: \text{if } z_1 \text{ is } NB \text{ then } u^1 = \frac{1}{\hat{b}_1(X)}(-\hat{f}_1(X) - k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2z_1 + \rho_1)$$

$$R^2: \text{if } z_1 \text{ is } NM \text{ then } u^2 = \frac{1}{\hat{b}_1(X)}(-\hat{f}_1(X) - k_1\dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2z_1 + \frac{\rho_1}{2})$$

برای بررسی عملکرد این سامانه، در ابتدا فرض بر آن است که زاویه پاندول مطابق شکل ۲ بزرگتر از صفر است. برای این که پاندول به حالت عمود یا  $\theta = 0$  برود، باید گاری به سمت چپ رانده شده و سپس دوباره به موقعیت قبلی یعنی  $x = 0$  برگردد. در این صورت موقعیت مطلوب پاندول و گاری برابر با  $x = \theta = 0$  خواهد بود. معادلات دینامیکی این سامانه با استفاده از روش لاگرانژ به دست آمده و به قرار زیر است [۵]:

$$f_1(X) = \frac{m_t g \sin(x_1) - m_p L \sin(x_1) \cos(x_1) x_2^2}{L \left( \frac{4}{3} m_t - m_p \cos^2(x_1) \right)}$$

$$b_1(X) = \frac{\cos(x_1)}{L \left( \frac{4}{3} m_t - m_p \cos^2(x_1) \right)}$$

$$f_2(X) = \frac{-\frac{4}{3} m_p L x_2^2 \sin(x_1) + m_p g \sin(x_1) \cos(x_1)}{\frac{4}{3} m_t - m_p \cos^2(x_1)} \quad (27)$$

$$b_2(X) = \frac{4}{3 \left( \frac{4}{3} m_t - m_p \cos^2(x_1) \right)}, \quad m_t = m_c + m_p$$

که  $m_c$  جرم گاری،  $m_p$  جرم لینک،  $L$  طول لینک و  $g$  شتاب جاذبه است. در معادلات فوق،  $x_1 = \theta$  زاویه پاندول،  $x_2 = \dot{\theta}$  سرعت زاویه‌ای پاندول،  $x_3 = x$  مسافت طی شده توسط گاری و  $x_4 = \dot{x}$  سرعت گاری هستند. پارامترهای سامانه که در این شبیه‌سازی‌ها مورد استفاده قرار گرفت، در جدول ۱ آمده است.

**جدول (۱):** پارامترهای سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس تک لینکی.

$m_p$	۰,۰۵ kg
$m_c$	۱ kg
$L$	۰,۵ m
$g$	۹,۸ m/s <sup>2</sup>

در این مرحله برای اعمال اغتشاش خارجی یا دینامیک مدل نشده، فرض گردید که  $|d_1(t)| = |d_2(t)| \leq 0.08$  است. در طراحی پایگاه قواعد تقریب‌گر فازی  $g(s)$ ،  $\varepsilon_{max} = 0.9425$  تنظیم و توابع عضویت آن از نظر شکل، عنوان و مقدار مطابق با شکل ۱ انتخاب شد. در طراحی پایگاه قواعد کنترل پسگام فازی پیشنهادی، توابع عضویتی عیناً نظیر تقریب‌گر فازی انتخاب نموده و برای لحاظ نمودن عدم قطعیت‌های ساختاری، فرض شد که پارامترهای  $f_1(X)$  و  $b_1(X)$  برابر با ۸۵ درصد مقادیر جدول ۱ هستند و برای مواجهه شدن با اغتشاش متغیر با زمان خارجی از  $d_1(t) = d_2(t) = 0.08 \sin(0.2t)$  استفاده گردید. بنابراین، در این مرحله از شبیه‌سازی، کنترل پیشنهادی با

طراحی پایگاه قواعد کنترل پیشنهادی نیز برای کاهش حجم محاسبات ورودی کنترل، تلاش گردید تا از ۵ قاعده فازی یک ورودی- یک خروجی استفاده شود. بنابراین، مجموع قواعد فازی تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی برابر با ۱۰ قاعده یک ورودی- یک خروجی خواهد بود. به همین دلیل پیاده‌سازی عملی کنترل پیشنهادی به آسانی میسر می‌شود.

در نهایت، در طراحی سامانه فازی پیشنهادی، تلاش گردید تا مزایای ورودی کنترل معادله (۲۱) حفظ گردد، پایداری مجانبی سراسری سامانه‌ی حلقه بسته تضمین شود و دامنه ورودی کنترل نرم و فاقد پدیده نامطلوب لرزش باشد.

**نکته ۵:** در پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی، باید در ابتدا تقریب‌گر فازی  $g(s)$  (معادله (۲۴)) طراحی گردد و در ادامه به طراحی سامانه‌ی فازی معادله (۲۶) پرداخته شود. به عبارت دیگر یک سامانه‌ی فازی (تقریب‌گر فازی (۲۴)) در داخل یک سامانه‌ی فازی دیگر (ورودی کنترل (۲۶)) قرار می‌گیرد.

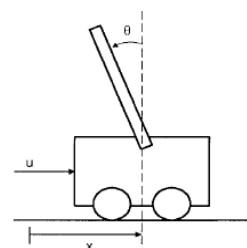
در ادامه مقاله، برای نمایش عملکرد کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس تک لینکی و سپس دو لینکی ارائه می‌شود.

## ۶- مطالعه موردی

در این بخش از مقاله، برای بررسی عملکرد تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس تک لینکی و سپس دو لینکی پیاده‌سازی می‌شود.

### مطالعه موردی ۱:

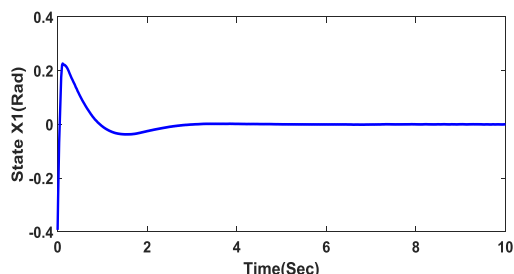
در این بخش، از سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس تک لینکی نشان داده شده در شکل ۲ به عنوان مطالعه موردی استفاده می‌شود [۵].



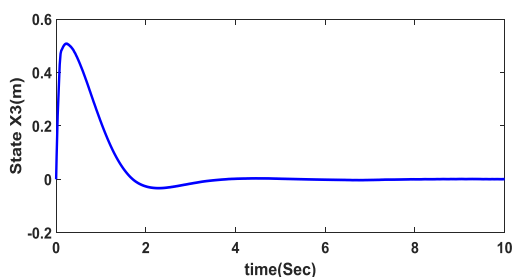
شکل (۲): سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی.



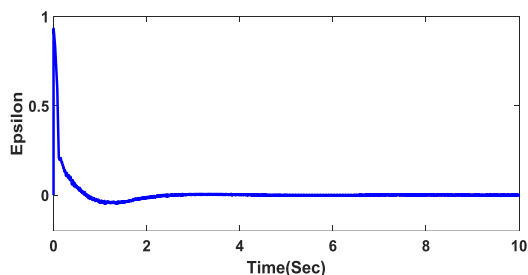
نامطلوب لرزش دیده نمی‌شود و ورودی کنترل دارای تغییراتی نرم، دامنه‌ای کم و در محدوده قابل قبولی است.



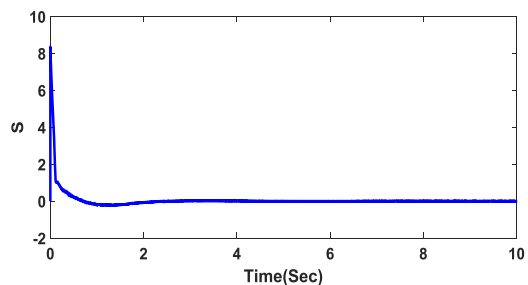
شکل (۳): تغییرات زاویه پاندول معکوس تک لینکی با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۴): تغییرات موقعیت گاری با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۵): تغییرات  $\epsilon$  با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۶): تغییرات  $S$  با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.

عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری روبرو است. مقادیر ضرایب کنترل پیشنهادی در جدول ۲ آمده است.

جدول (۲): ضرایب کنترل‌کننده‌ی پسگام فازی پیشنهادی.

$k_1$	۷,۵
$k_2$	۳,۲
$k_3$	۰,۵
$\rho_1$	۱۲,۵
$\epsilon_{max}$	۰,۹۴۲۵

نکته ۶: در طراحی کنترل پیشنهادی، برای این‌که گاری هیچ‌گاه دچار وقفه‌های بی‌مورد نشود، در تنظیم ضریب  $k_3$  باید دقت لازم را نمود. در حقیقت وقتی علامت متغیر  $S$  تغییر می‌کند، ضریب  $k_3$  نقش ویژه‌ای را ایفا می‌نماید. زیرا وقتی گاری به سمت مبداء یا نقطه‌ی مطلوب حرکت می‌کند، مقدار بزرگ ضریب  $k_3$  علامت متغیر  $S$  را در نزدیک مبداء یا نقطه مطلوب عوض می‌نماید. بنابراین، ورودی کنترل پیشنهادی باید حرکت گاری را کند نموده و آن را در مبداء متوقف نماید. اما زمان لازم برای اعمال تغییر سرعت گاری به اندازه کافی زیاد نخواهد بود که سرعت گاری را صفر کند بنابراین، گاری از مبداء عبور می‌نماید و همین پدیده در مسیر برگشت به مبداء نیز تکرار می‌شود. در این صورت حرکت گاری در اطراف مبداء دارای نوسان می‌شود. برای جلوگیری از بروز این پدیده بهتر است که مقدار ضریب  $k_3$  را بزرگ انتخاب نماییم.

شرایط اولیه حالت‌های سامانه برابر با  $\theta = -\frac{\pi}{8}$  و  $\dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$  تنظیم گردیده و مقادیر مطلوب برابر با  $\theta_d = \dot{\theta}_d = x_d = \dot{x}_d = 0$  انتخاب شده‌اند. پس از اجرای شبیه‌سازی، از شکل‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌شود که کنترل پیشنهادی به‌خوبی عمل نموده و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، زاویه پاندول و موقعیت گاری را به ترتیب در زمان‌هایی برابر با ۳ و ۴ ثانیه به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا نموده است. از شکل‌های ۵ و ۶ نتیجه می‌شود که تقریب‌گر فازی به خوبی تابع  $g(s)$  را تقریب زده و کنترل پیشنهادی نیز با عملکرد مطلوب خود، متغیرهای  $S$  و  $\epsilon$  را در زمان ۳ ثانیه به سمت صفر همگرا کرده است. در شکل ۷، اثری از پدیده

$$a_{11} = \frac{1}{m_1} + \frac{\sin^2(\theta_1)}{m_c}, \quad a_{12} = -\frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{m_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A_{11} = \frac{a_{22}(L_1\dot{\theta}_1^2 - g\cos(\theta_1)) - a_{12}L_2\dot{\theta}_2^2}{\Delta}$$

$$A_{12} = -\frac{a_{22}\sin(\theta_1)}{\Delta m_c}, \quad A_{21} = \frac{-a_{12}(L_1\dot{\theta}_1^2 - g\cos(\theta_1)) + a_{11}L_2\dot{\theta}_2^2}{\Delta}$$

$$A_{22} = -\frac{a_{12}\sin(\theta_1)}{\Delta m_c}$$

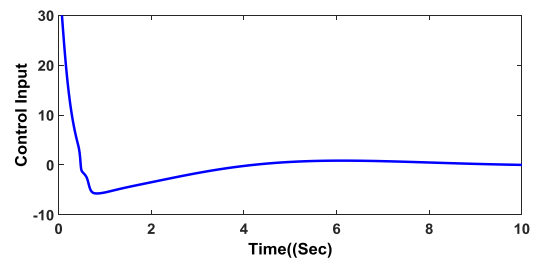
که در آن،  $x_1 = \theta_1$  زاویه لینک اول،  $x_2 = \dot{\theta}_1$  سرعت زاویه‌ای لینک اول،  $x_3 = \theta_2$  زاویه لینک دوم،  $x_4 = \dot{\theta}_2$  سرعت زاویه‌ای لینک دوم،  $x_5 = x$  موقعیت گاری،  $x_6 = \dot{x}$  سرعت گاری هستند.  $L_1$  طول لینک اول،  $L_2$  طول لینک دوم،  $m_c$  جرم گاری،  $m_1$  جرم لینک اول،  $m_2$  جرم لینک دوم،  $g$  شتاب جاذبه،  $u(t)$  ورودی کنترل،  $d_1(t)$ ،  $d_2(t)$  و  $d_3(t)$  اغتشاشات خارجی هستند.

در این بخش می‌خواهیم با اعمال کنترل پیشنهادی، لینک‌های اول و دوم در راستای قائم قرار بگیرند و فرض بر آن است که گاری می‌تواند دارای حرکتی آزاد و بدون محدودیت باشد. در این بخش برای شبیه‌سازی سامانه‌ی مورد نظر از مقادیر جدول ۳ استفاده شد و برای اعمال اغتشاشات خارجی متغیر با زمان،  $d_1(t) = d_2(t) = d_3(t) = 0.08\sin(0.2t)$  انتخاب گردید.

**جدول (۳):** پارامترهای سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس دو لینکی.

$m_1$	۱ kg
$m_2$	۱ kg
$m_c$	۱ kg
$L_1$	۱ m
$L_2$	۱ m
$g$	۹.۸
$m/s^2$	

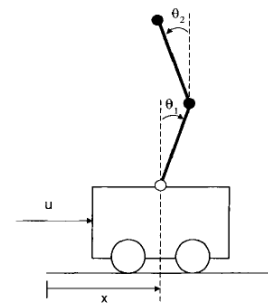
برای اعمال عدم قطعیت‌های ساختاری، پارامترهای  $\hat{f}_1(X)$  و  $\hat{b}_1(X)$  برابر ۹۰ درصد مقادیر جدول ۳ در نظر گرفته شد و شرایط اولیه سامانه برابر با  $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ ،  $\theta_2 = \frac{\pi}{18}$ ،  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ ،  $x = 0.18$  متر و  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$  تنظیم گردید. طراحی توابع عضویت پایگاه قواعد تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی از مقادیر و عناوین شکل ۱ استفاده و  $\epsilon_{\max} = 0.5$  قرار داده شد. مقادیر ضرایب کنترل پیشنهادی در جدول ۴ آمده است:



شکل (۷): دامنه‌ی ورودی کنترل پیشنهادی.

## مطالعه موردی ۲:

در این بخش از مقاله، تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی بر روی گاری با پاندول معکوس دو لینکی نشان داده شده در شکل ۸، پیاده‌سازی می‌شود. مطابق این شکل، در این سامانه لینک دوم بر روی لینک اول سوار گردیده و قائم بودن هر دو لینک به حرکت به موقع گاری وابسته است [۵].



شکل (۸): سامانه‌ی گاری با پاندول معکوس دو لینکی.

معادلات دینامیکی این سامانه به شکل زیر است [۵]:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = f_2(X) + b_2(X)u(t) + d_2(t)$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = f_3(X) + b_3(X)u(t) + d_3(t)$$

$$f_1(X) = \frac{A_{21}}{L_1 m_1} \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{L_1} g \sin(\theta_1) -$$

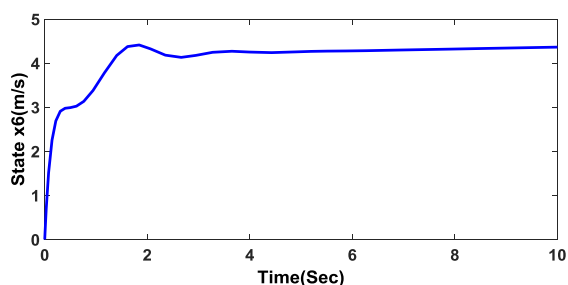
$$\frac{A_{11}}{L_1 m_c} \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)$$

$$b_1(X) =$$

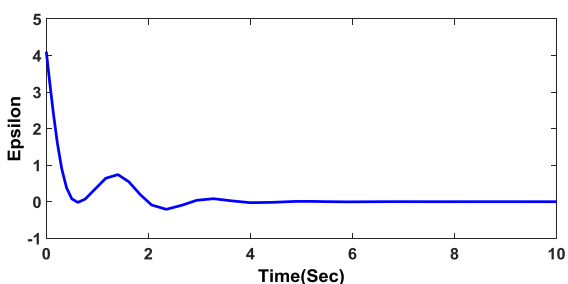
$$\frac{A_{22}}{L_1 m_1} \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{\cos(\theta_1)}{L_1 m_c} - \frac{A_{12}}{L_1 m_c} \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)$$

$$f_2(X) = \frac{A_{11}}{L_2 m_1} \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad b_2(X) = \frac{A_{12}}{L_2 m_1} \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

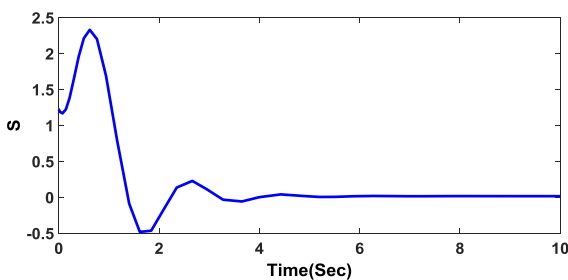
$$f_3(X) = \frac{A_{11}}{m_c} \sin(\theta_1), \quad b_3(X) = \frac{1}{m_c} + \frac{A_{12}}{m_c} \sin(\theta_1) \quad (28)$$



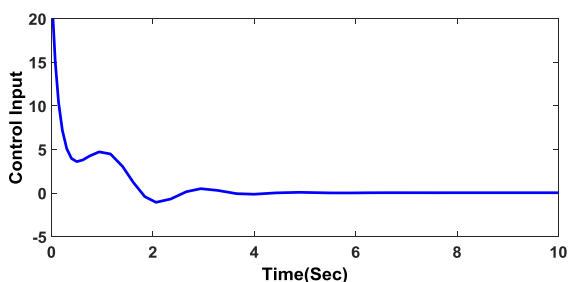
شکل (۱۱): تغییرات سرعت گاری با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۱۲): تغییرات  $\epsilon$  با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۱۳): تغییرات  $S$  با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۱۴): دامنه‌ی ورودی کنترل پیشنهادی.

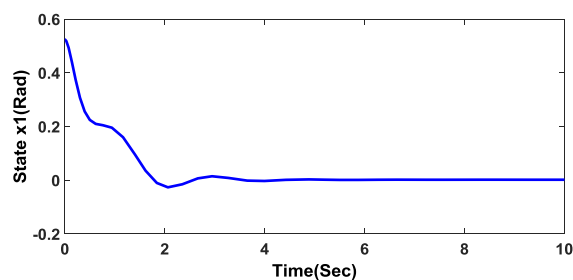
### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل‌کننده‌ی پسگام فازی برای کنترل سامانه‌های فرو تحریک با دو درجه آزادی ارائه شد. در این روش در ابتدا سامانه‌ی کلی به دو زیر سامانه‌ی اول و دوم تقسیم و برای هر کدام از آن‌ها، یک کنترل‌کننده پسگام مقاوم

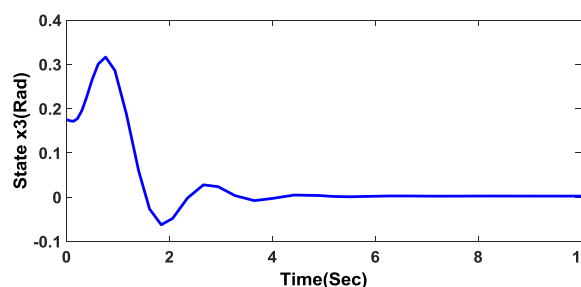
جدول (۴): ضرایب کنترل‌کننده‌ی پسگام فازی پیشنهادی

$k_1$	۸.۵
$k_2$	۵.۳
$k_3$	۴.۲
$\rho_1$	۱۶
$\epsilon_{max}$	۰.۵

پس از اجرای شبیه‌سازی، از شکل‌های ۹ و ۱۰ نتیجه می‌شود که کنترل پیشنهادی به‌خوبی عمل نموده و زوایای لینک‌های اول و دوم را در کمتر از ۵ ثانیه و در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری از شرایط اولیه خود به سمت صفر که حالت قائم و مطلوب است، همگرا نموده است. در شکل ۱۱ مشخص است که برای تضمین پایداری لینک‌های اول و دوم، گاری با سرعت ثابت  $4/3$  متر بر ثانیه به حرکت خود ادامه می‌دهد. از شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نتیجه می‌شود که تقریب‌گر فازی به‌خوبی تابع  $g(s)$  را تقریب زده و کنترل پیشنهادی نیز با عملکرد مطلوب خود، متغیرهای  $S$  و  $\epsilon$  را به سمت صفر همگرا کرده است. در شکل ۱۴ اثری از پدیده نامطلوب لرزش دیده نمی‌شود و دامنه ورودی کنترل نرم و در محدوده قابل قبولی است.



شکل (۹): تغییرات زاویه لینک اول با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.



شکل (۱۰): تغییرات زاویه لینک دوم با اعمال تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی.

- Sliding Modes”, J. App. Res. and Tech. Vol. 13, No. 1, pp. 70-78, 2015.
5. Huang, J., Liang, Z., and Zang, Q. “Dynamics and Swing Control of Double-Pendulum Bridge Cranes with Distributed-Mass Beams”, Mech. Syst. Signal Pr., Vol. 54, No. 5, pp. 357-366, 2015.
  6. Chen, Y. F. and Huang, A. C. “Controller Design for a Class of Underactuated Mechanical Systems”, IET Cont. Theo. App., Vol. 6, No.1, pp. 103-110, 2012.
  7. Man, W. S. and Lin, J. S. “Nonlinear Control Design for a Class of Underactuated Systems”; Proc. Int. IEEE Conf. Control Applications, USA, 2010.
  8. Olfati, S. R. “Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles”, PhD Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
  9. Reyhanoglu, M., Schaft, A., Mcclamroch, N., and Kolmanovsky, I. “Nonlinear Control of a Class of Underactuated Systems”; Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, 1996.
  10. Spong, M. W. “Underactuated Mechanical Systems In: Control Problems in Robotics and Automation”, Springer, USA, 1998.
  11. Utkin, V. “Sliding Modes in Control and Optimization”, Springer, Berlin, 1992.
  12. Utkin, V. “Variable structure systems with sliding modes”, IEEE Trans. on Auto. Cont., Vol. 22, No. 2, pp. 212-222, 1977.
  13. Khooban, M. H. and Soltanpour, M. R. “Swarm Optimization Tuned Fuzzy Sliding Mode Control Design for a Class of Nonlinear Systems in Presence of Uncertainties,” J. Intell. Fuzzy Syst., Vol. 24, No. 2, pp. 383-394, 2013.
  14. Soltanpour, M. R., Zolfaghari, B., Soltani, M. and Khooban, M. H. “Fuzzy Sliding Mode Control Design for a Class of Nonlinear Systems with Structured and Unstructured Uncertainties,” Int. J. of Inn. Comp. Info. and Cont., Vol. 9, No. 7, pp. 2713-2726, 2013.
  15. Soltanpour, M. R., Khooban, M. H., and Soltani, M. “Robust Fuzzy Sliding Mode Control for Tracking the Robot Manipulator in Joint Space and in Presence of Uncertainties,” Robotica, Vol. 32, No. 3, pp. 433-446, 2014.
  16. Veysi, M. and Soltanpour, M. R. “Voltage-Base Control of Robot Manipulator Using Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control,” Int. J. Fuzzy Syst., Vol. 19, No. 5, pp. 1430-1443, 2017.

طراحی گردید. کنترل‌کننده‌های ارائه شده تنها پایداری مجانبی سراسری این زیر سامانه‌ها را تضمین می‌نمایند، در حالی که هدف اصلی تضمین پایداری سراسری کل سامانه‌ی حلقه بسته است. در ادامه برای تحقق این امر و ایجاد ارتباط بین زیر سامانه‌ها، یک تابع با ویژگی‌های خاصی ارائه شد که برای پیاده‌سازی آن از یک تقریب‌گر فازی استفاده گردید. در طراحی این تقریب‌گر فازی تلاش شد تا ویژگی‌های این تابع خاص، حداکثر با ۵ قاعده فازی یک ورودی- یک خروجی محقق شود تا حجم محاسبات آن بسیار پایین باشد. یکی از ویژگی‌های راه‌کار پیشنهادی این است که برای کنترل زیر سامانه‌های اول و دوم و در حالت کلی سامانه‌ی حلقه بسته، تنها اطلاعات مربوط به دینامیک‌های زیر سامانه‌ی اول لازم و کافی است. به همین دلیل کنترل پیشنهادی از حجم محاسباتی بسیار پایینی برخوردار می‌شود. در ادامه برای جلوگیری از بروز پدیده لرزش در ورودی کنترل و اجتناب از پدیده تشدید، با استفاده از نظریه فازی راه‌کاری ارائه شد. در طراحی این سامانه‌ی فازی تلاش گردید تا مزایای کنترل پسگام مقاوم پیشنهادی حفظ، اثبات پایداری سامانه‌ی حلقه بسته تضمین و دامنه ورودی کنترل در محدوده قابل قبولی باشد. سرانجام برای بررسی عملکرد راه‌کار پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه‌های گاری با پاندول معکوس تک لینکی و دو لینکی پیاده‌سازی گردید. نتایج این شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب تقریب‌گر فازی و کنترل پیشنهادی را نشان می‌دهند.

## ۸- مراجع

1. Bandyopadhyay, S., Chung, S. J., and Hadaegh, F. Y. “Nonlinear Attitude Control of Spacecraft with a Large Captured Object”, J. Guid. Control and Dynamics, Vol. 39, No. 4, pp. 754-769, 2016.
2. Hyo, S. A. “Nonlinear Control of Quadrotor for Point Tracking: Actual Implementation and Experimental Tests”, IEEE-ASME T. Mech. Vol. 20, No. 3, pp. 1179-1192, 2015.
3. Alisher, K., Krupenkin, A., and Borgul, A. “Control of the Mobile Robots with ROS in Robotics Courses”, J. Proc. Eng., Vol. 100, No. 6, pp. 1475-1484, 2015.
4. Peza, J. F., Navarro, G. S., and Castro, N. R. “Linares, Trajectory Tracking Control in a Single Flexible-Link Robot using Finite Differences and

21. Khalil, H. K. "Nonlinear Systems," Prentice Hall, USA, 2002.
22. Soltanpour, M. R., Khooban, M. H., and Niknam, T. "A Robust and New Simple Control Strategy for a Class of Nonlinear Mechanical Systems: Induction and Servo motors," *J. Vib. and Cont.*, Vol. 22, No. 6, pp. 131-144, 2014.
23. Ahmadnezhad, M. and Soltanpour, M. R. "Tracking Performance Evaluation of Robust Back-Stepping Control Design for a Nonlinear Electro Hydraulic Servo System," *Int. J. of Mech. Aero. Ind. Mecha. and Man. Eng.*, Vol. 9, No. 7, pp. 1146-1152, 2015.
17. Sankaranarayanan, V. and Mahindrakar, A. D. "Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems Using Sliding Modes," *IEEE Trans. on Rob.* Vol. 25, No. 2, pp. 459-467, 2009.
18. Su, S., Hsueh, Y. C., Tseng, C. P., Chen, S. S., and Lin, Y. S. "Direct Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Under-actuated Uncertain Systems," *Int. J. of Fuzz. Log. and Intell. Sys.* Vol.15, No. 4, pp. 240-250, 2015.
19. Baklouti, F., Aloui, S., and Chaari, A. "Adaptive Fuzzy Sliding Mode Tracking Control of Uncertain Underactuated Nonlinear Systems: a Comparative Study," *J. of Cont. Sci. and Eng.* Vol. 3, No. 13, pp. 110-122, 2016.
20. Moussaoui, S., Boulkroune, A. and Vaidyanathan, S. "Fuzzy Adaptive Sliding-Mode Control Scheme for Uncertain Underactuated Systems," *Adv. and App. in Non. Cont. Sys.*, Vol. 63, No. 5, pp. 351-367, 2016.

