

((یادداشت مهندسی))

## تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر روی بستر ویسکوالاستیک و تحت اثر جریان خارجی هوا با سرعت زیر صوت

احمد مامندی<sup>۱</sup>      حسن نجفی<sup>۲</sup>

گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند،

دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۰۲)

### چکیده

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای از جنس ماده مرکب لایه‌ای متقارن بر روی بستر ویسکوالاستیک که جریان هوا با سرعت زیر صوت از روی آن عبور می‌کند مورد بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی دو انتهای پوسته استوانه‌ای، گیردار فرض شده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی با استفاده از نظریه پوسته غیرخطی دائل به دست آمده است. بهره‌گیری از روش گالرکین، سه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی حاکم بر ارتعاشات جانبی (شعاعی) تبدیل می‌گردد. سپس، روابط فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی و رابطه دامنه ارتعاشات برحسب فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته محاسبه گردیده است. تاثیر تغییر پارامترهای مختلف شامل زاویه لایه‌های ماده مرکب در لایه چینی، سفتی و میرایی بستر ویسکوالاستیک و بار تحریک خارجی بر روی رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته در تحلیل‌ها مطالعه می‌گردد. همچنین، منحنی‌های جابجایی شعاعی پوسته برحسب زمان در حالت خطی و غیرخطی ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** پوسته استوانه‌ای، ماده مرکب، بستر ویسکوالاستیک، ارتعاشات غیرخطی، پاسخ فرکانسی، جریان خارجی هوا

با سرعت زیر صوت

## Nonlinear Vibration Analysis of a Composite Cylindrical Shell on a Viscoelastic Foundation and under Subsonic External Air Flow

A. Mamandi

H. Najafi

Mechanical Engineering Department,  
Parand Branch, Islamic Azad University,  
Parand, Iran

(Received: 02/October/2017 ; Accepted: 21/February/2018)

### ABSTRACT

In this paper, the nonlinear vibration analysis of a symmetric laminated composite cylindrical shell on a viscoelastic foundation under a subsonic external air flow has been investigated. The boundary conditions for both ends of the cylindrical shell are clamped conditions. The governing equations of motion in the longitudinal, circumferential and radial directions are derived in accordance with the Donnell's nonlinear shell theory. Using Galerkin method, three nonlinear partial differential equations of motion are transformed to a nonlinear ordinary equation of motion governing lateral (radial) vibration of the shell. Then, the relations for linear and nonlinear natural frequencies and amplitude-dimensionless natural frequency of the shell are calculated. The effects of variations in different values of parameters including orientation angles of lamina in layerwise laminate, stiffness and damping of viscoelastic foundation and the external applied load on the free and forced vibration behavior of the shell are all studied in this paper analyses. Moreover, the time history of radial displacement of midpoint of the shell using linear and nonlinear analyses. Are also presented.

**Keywords:** Cylindrical Shell, Composite Material, Viscoelastic Foundation, Nonlinear Vibration, Frequency Response, Subsonic External Air Flow.

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): am\_2001h@yahoo.com

۲- کارشناس ارشد: hasannajafi22@gmail.com

## ۱- مقدمه

استفاده شد. پوسته در معرض هم‌زمان بار استاتیکی فشاری و بار محوری هارمونیک قرار داده شد. فرض شد سیال غیرلزج و غیرقابل تراکم باشد. روش گالرکین برای به‌دست آوردن معادله غیرخطی حرکت استفاده شد. سپس این معامله با روش رانج- کوتا حل شد. تاثیر خواص ماده ارتوتروپیک بر روی رفتار کمانش غیرخطی و خصوصیات ارتعاشی پوسته بررسی شد. لم و کیان [۲]، به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌های متقارن پرداخته‌اند. با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول حل‌های تحلیلی ارائه شد. مشاهده شد با افزایش نسبت ضخامت پوسته به شعاع آن فرکانس افزایش می‌یابد و با افزایش نسبت طول پوسته به شعاع پوسته فرکانس کاهش می‌یابد. رحمانی و همکاران [۳]، به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای از جنس ماده مرکب ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر با استفاده از نظریه پنل- ساندویچ مرتبه بالا پرداخته‌اند. با استفاده از نظریه الاستیسیته ورق‌ها فرمولاسیون پوسته نوشته شده و معادلات حاکم با توجه به شرایط مرزی استخراج شده‌اند. مشاهده شد که پوسته ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر دارای الگوی ارتعاشی پیچیده‌ای نسبت به پوسته‌های همگن می‌باشد. لیو و چو [۴]، به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای نازک دورانی پرداختند. معادله حرکت با استفاده از اصل هامیلتون براساس نظریه پوسته نازک لاو و در نظر گرفتن شرایط مرزی گیردار- آزاد استخراج و با روش گالرکین حل شد. پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای دوار و اثرات عوامل غیرخطی و فرکانس تحریک بر روی پاسخ فرکانسی حالت پایدار بررسی شد. بختیاری‌نژاد و بیدله [۵]، به تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای تحت پیش‌تنش بر روی بستر پسترناک پرداختند. اثرات وضعیت پیش‌تنش و بستر الاستیک روی فرکانس‌های طبیعی پوسته تحت شرایط مرزی مختلف بررسی شد. نظریه پوسته ساندورز- کوئیر به‌منظور استخراج روابط کرنش- جابجایی به‌کار گرفته شد. از تئوری کلاسیک پوسته نازک غیرخطی لاو نیز استفاده شد. معادلات حاکم در حالت خطی با استفاده از روش ریلی- ریتز حل شد. روش‌های اغتشاشی به‌منظور یافتن روابط میان دامنه و فرکانس ارتعاشات در حالت غیرخطی استفاده شد. مشاهده گردید با افزایش فشار هیدرواستاتیکی داخلی، تنش غیرمحوری اولیه و سفتی

پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مرکب (کامپوزیتی) به‌خاطر دارا بودن مزایایی همچون استحکام بالا، سبکی و مقاومت مکانیکی و خستگی نسبت به ترک امروزه به‌طور گسترده‌ای در بسیاری از حوزه‌های مهندسی از قبیل قطارهای پرسرعت، صنایع هوایی و فضایی، صنایع موشکی و دریایی در ساخت بدنه سازه‌ها به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب با توجه به ساختار هندسی و فیزیکی خود قابلیت تحمل شرایط بارگذاری مختلف را دارند. پوسته‌ها معمولاً به‌صورت فیزیکی بر روی بستر قرار دارند و یا اثرات محیط سیال پیرامون آن را می‌توان با در نظر گرفتن سفتی و میرایی (هرچند که اندک باشند) به‌صورت دقیق‌تری شبیه‌سازی نمود. از سوی دیگر، این پوسته‌ها تحت تاثیر بارگذاری‌های مختلفی مانند تحریک ناشی از بار دینامیکی خارجی و یا حرکت سیال عبوری از روی (و یا درون) آن قرار دارند. بارهای دینامیکی ناشی از تحریک خارجی و یا بارهای ناشی از برهم‌کنش سیال و سازه باعث ارتعاشات سازه می‌شوند. بررسی رفتار ارتعاشی سازه در اثر بارگذاری دینامیکی از زمینه‌های مهم کاربردی در طراحی سازه‌ها می‌باشد. مطالعه پوسته‌ها با توجه به نظریه‌های کلاسیک موجود شامل نظریه غشایی و نظریه خمشی عموماً رفتار خطی پوسته را لحاظ می‌نمایند. در تحلیل‌های مکانیکی، با توجه به مشخصات فیزیکی مسئله و بارگذاری، زمانی که تغییرشکل‌های بزرگ و یا اثرات غیرخطی هندسی (و یا ماده) مدنظر باشند از مدل‌های ریاضی پیشرفته‌تر پوسته مانند نظریه پوسته دانل<sup>۱</sup> و یا نظریه پوسته ساندورز<sup>۲</sup> با در نظر گرفتن اثر ترم‌های غیرخطی در هندسه پوسته استفاده می‌شود. در ذیل به برخی از کارهای انجام شده در تحلیل دینامیکی پوسته‌های ارتوتروپیک اشاره می‌گردد.

دل پرادو و گانکالوز [۱]، به بررسی ارتعاشات غیرخطی و ناپایداری‌های پوسته استوانه‌ای از جنس ماده ارتوتروپیک با جریان سیال داخلی پرداخته‌اند. معادله‌های پوسته غیرخطی دانل برای مطالعه ناپایداری دینامیکی پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دوسر ساده با جریان سیال داخلی

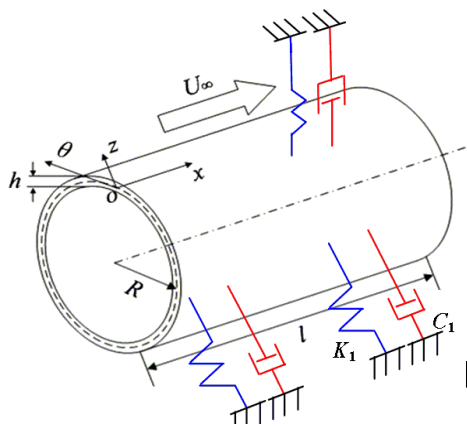
1- Donnell

2- Sanders

روی رفتار دینامیکی پوسته بررسی شده است. لی و یائو [۱۲]، به بررسی ارتعاشات زیر هارمونیک از نوع یک سوم در رزونانس پوسته استوانه‌ای کامپوزیت مدور با دو انتهای گیردار در معرض جریان هوای مافوق صوت تحت تحریک خارجی در راستای شعاعی پرداخته‌اند. آنها به این نتیجه رسیدند که وجود ناحیه زیر هارمونیک رزونانس و دامنه ارتعاشات با افزایش سرعت جریان سیال کاهش می‌یابد. همچنین پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با زاویه الیاف ۴۵ درجه دارای بهترین مشخصات دینامیکی می‌باشد. همچنین، فاصله نسبت فرکانسی برای ناپایداری حالت پایدار زیر هارمونیک رزونانس هنگامی که زاویه الیاف ۴۵ درجه است گسترده‌تر می‌باشد. خلیلی و همکاران [۱۳]، به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه تحت بارهای ترکیبی محوری استاتیکی، فشار داخلی و بار ضربه‌ای بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پرداخته‌اند. آنها شرایط مرزی را دوسر ساده در نظر گرفته‌اند. مؤلفه‌های تغییر شکل برحسب تابعی از مکان و زمان در نظر گرفته شده است. مؤلفه‌های تابع مکان به شکل سری فوریه به دست آمده است. همچنین، حل معادلات تعادل ارتعاشات آزاد پوسته با استفاده از روش گالرکین انجام شد. جعفری و همکاران [۱۴]، به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارهای فشاری محوری و ضربه‌ای عرضی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته‌اند. شرایط مرزی گیردار-آزاد در نظر گرفته شد. بار فشاری محوری کمتر از بارهای بحرانی کمانش است. اثرات جهت الیاف، بار محوری و پارامترهای هندسی روی پاسخ زمانی پوسته بررسی شد. نشان داده شد پاسخ دینامیکی پوسته به جنس پوسته بستگی دارد. آذرافزا و همکاران [۱۵]، به بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای لایه‌ای که در معرض بار فشاری محوری و بارهای دینامیکی عرضی قرار دارد پرداخته‌اند. ارتعاش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی اول به دست آمد. شرایط مرزی دو سر ساده در نظر گرفته شد. پاسخ دینامیکی پوسته تحت بارهای ضربه‌ای عرضی و فشاری محوری مطالعه شد.

در پژوهش کنونی، ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای از جنس ماده مرکب به صورت لایه‌ای متقارن بر روی بستر ویسکوالاستیک که جریان هوا با سرعت زیر صوت از روی

بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. امابیلی [۶]، به بررسی ارتعاشات اجباری غیرخطی هندسی برای پوسته‌های استوانه‌ای مدور لایه‌ای با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالای آمابیلی-ردی پرداختند. فرض شد یک هارمونیک نقطه‌ای در جهت شعاعی به پوسته اعمال شده و همچنین فرض شد شرایط مرزی پوسته دوسر ساده باشد. کاراجیویس و همکاران [۷]، ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدور خالی یا پر از سیال در شرایط مرزی دوسر گیردار و در معرض تحریک هارمونیک شعاعی را بررسی کردند. سیال غیرقابل تراکم و غیرلزج فرض شد. ژی و همکاران [۸]، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدور کامپوزیتی را که به طور جزئی حاوی سیال است با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی عرضی با استفاده از روش نیمه تحلیلی بررسی کردند. در این روش جابجایی و دروان پوسته و فشار دینامیکی سیال با سری فوریه و اجزای محدود در جهت محوری و محیطی مدل شد. مشاهده شد اثر سیال روی فرکانس طبیعی پوسته برحسب نسبت ضخامت به شعاع کاهش می‌یابد. همچنین اثر سیال روی فرکانس طبیعی پوسته با نسبت شعاع افزایش می‌یابد. لم و لوی [۹]، با استفاده از نظریه تقریب اول لاو و روش ریدرز به بررسی تاثیر شرایط مرزی و جهت الیاف بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای نازک از ماده ارتوتروپیک پرداختند. شرایط مرزی در حالت‌های گیردار-گیردار، گیردار-ساده، گیردار-لغزشی و گیردار-آزاد بررسی شد. ژانگ و همکاران [۱۰]، به بررسی تحلیل ارتعاش پوسته استوانه‌ای جدار نازک با استفاده از روش انتشار موج پرداختند. نتایج حاصل با روش‌های عددی و اجزای محدود مقایسه شده است. بیچ و انگویان [۱۱]، به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدور  $FG$  تحت بارهای عرضی و محوری بر مبنای معادلات پیشرفته دائل پرداختند. معادلات حاکم با استفاده از تئوری پیشرفته دائل استخراج شد. روش حل تقریبی برای ارضا کردن شرایط مرزی ساده فرض شد. روش گالرکین، فرض‌های والمیر<sup>۳</sup> و روش رانج-کوتای<sup>۴</sup> مرتبه چهارم برای بررسی رفتار دینامیکی پوسته استفاده شد. تاثیر تغییر خواص فیزیکی مواد  $FG$ ، پیش بار محوری فشاری و نسبت‌های ابعادی بر



شکل (۱): پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر روی بستر ویسکوالاستیک در پیرامون آن و در معرض جریان خارجی هوا.

با استفاده از نظریه غیرخطی پوسته دائل، مؤلفه‌های کرنش‌ها و انحنای سطح میانی پوسته عبارتند از [۱۲]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, k_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, k_{x\theta} = -\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

با استفاده از تئوری کلاسیک لایه‌ای رابطه تنش-کرنش برای یک لایه از پوسته کامپوزیتی در مختصات هندسی سازه  $(x, \theta, z)$  عبارت است از [۱۴]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

مؤلفه‌های بردارهای نیروها  $[N]$  و ممان‌ها  $[M]$  برای  $N$  لایه از روابط زیر محاسبه می‌گردند [۱۴]:

$$\begin{aligned} [N] &= \begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix}_k dz, \\ [M] &= \begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix}_k z dz \end{aligned} \quad (3)$$

جدار خارجی آن عبور می‌کند مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی دو انتهای پوسته استوانه‌ای گیردار فرض شده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی با استفاده از نظریه پوسته غیرخطی دائل به دست آمده است. لازم به ذکر است که با در نظر گرفتن بستر ویسکوالاستیک (ترم‌های شامل دمپینگ و سفتی بستر) اثرات غیرخطی در معادله حاکم بر ارتعاشات پوسته علاوه بر غیرخطی بودن هندسی مسئله، لحاظ می‌گردد. با بهره‌گیری از روش گالرکین سه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت پوسته به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی (شعاعی) تبدیل می‌گردد. سپس روابط فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی و رابطه دامنه ارتعاشات برحسب فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته محاسبه گردیده است. در تحلیل و بررسی نتایج شبیه‌سازی، تاثیر تغییر زاویه لایه‌های ماده مرکب در لایه چینی پوسته، پارامترهای سفتی و میرایی بستر ویسکوالاستیک و بار تحریک خارجی بر روی رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین، منحنی‌های جابجایی عرضی (شعاعی) پوسته برحسب زمان در حالت خطی و غیرخطی ارائه شده‌اند.

## ۲- مدل‌سازی ریاضی مسئله، استخراج معادلات حاکم بر حرکت و روش حل

در شکل ۱، یک پوسته نازک استوانه‌ای از ماده مرکب لایه‌ای (کامپوزیت) نشان داده شده است. طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب  $l$ ،  $R$  و  $h$  می‌باشند. مبدأ مختصات استوانه‌ای  $O$  بر روی سطح میانی پوسته قرار دارد. محورهای  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  به ترتیب در راستای محوری (طول)، محیطی و شعاعی پوسته قرار دارند. جابجایی سطح میانی پوسته در راستای محورهای  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  به ترتیب  $u$ ،  $v$  و  $w$  می‌باشند. بر روی پوسته جریان هوای زیرصوت با سرعت  $U_\infty$  و چگالی  $\rho_\infty$  در راستای محور طولی استوانه عبور می‌کند. فرض شده است که جریان هوا تراکم‌ناپذیر، غیرلزج و غیرچرخشی می‌باشد. پوسته استوانه‌ای بر روی بستر ویسکوالاستیک در پیرامون جدار خارجی آن با سفتی  $K_1$  و میرایی  $C_1$  قرار دارد.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (8)$$

$$Q_{66} = G_{12},$$

در رابطه (۸)،  $E_1, E_2, G_{12}$  مدول‌های الاستیک و برشی و  $\nu_{12}$  و  $\nu_{21}$  ضرایب پواسون ماده مرکب می‌باشند. همچنین، رابطه  $\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$  برای مواد مرکب لایه‌ای برقرار است. معادله کلی حرکت برای ارتعاشات عرضی پوسته استوانه‌ای عبارت است از [۱۲]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_{x\theta}}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( Q_\theta + N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{N_\theta}{R} = \quad (9)$$

$$\rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_0 \frac{\partial w}{\partial t} + C_1 \frac{\partial w}{\partial t} + K_1 w - \Delta P - \delta(x - x_0) \delta(\theta - \theta_0) f \cos(\omega t),$$

که در رابطه فوق،  $t$  بیانگر زمان و  $Q_x$  و  $Q_\theta$  نشان دهنده نیروهای برشی لبه‌ای پوسته هستند و به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$Q_x = N_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}, Q_\theta = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}, \quad (10)$$

که در آن، چگالی جرمی پوسته و  $f$  و  $\omega$  به ترتیب دامنه و فرکانس زاویه‌ای تحریک خارجی هستند. نماد  $\delta$  نشانگر تابع دلتای دیراک است و  $(x_0, \theta_0)$  مختصات نقطه اعمال تحریک بار خارجی است. همچنین، کمیت  $c_0 = 2\xi\rho_m h\omega_p$  ضریب میرایی پوسته و  $\omega_p$  فرکانس طبیعی اصلی پوسته می‌باشد.  $\Delta P$  فشار آیرودینامیکی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\Delta P = \rho_\infty A_{mn} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U_\infty^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (11)$$

$$A_{mn} = \frac{RK_n(\lambda_m)}{nK_n(\lambda_m) - \lambda_m K_{n+1}(\lambda_m)},$$

که در روابط (۱۱)،  $K_n$  تابع بسل<sup>۵</sup> صلاح شده نوع دوم،  $m$  تعداد نیم‌موج‌های طولی در جهت محوری  $z$ ،  $n$  تعداد موج‌های محیطی و  $\lambda_m$  مقادیر ویژه بی‌بعد می‌باشد که با توجه به شرایط تکیه‌گاهی (مرزی) پوسته تعیین می‌شوند. شرایط مرزی پوسته با دو انتهای گیردار به‌صورت زیر بیان می‌شود:

که در رابطه بالا،  $z_k$  فاصله سطح پایینی لایه  $k$  ام از سطح میانی پوسته و  $z_{k-1}$  فاصله سطح بالایی این لایه از سطح میانی پوسته می‌باشد. مولفه‌های نیروها و ممان‌ها برای یک پوسته چند لایه ارتوتروپ براساس رابطه (۱) عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

که در آن:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}(\beta_k)) (Z_k - Z_{k-1}),$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}(\beta_k)) (Z_k^2 - Z_{k-1}^2), \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}(\beta_k)) (Z_k^3 - Z_{k-1}^3),$$

که در روابط بالا،  $A_{ij}$  سختی محوری،  $B_{ij}$  وابسته به سختی‌های خمشی - محوری و  $D_{ij}$  سختی خمشی در پوسته چند لایه می‌باشند. همچنین،  $N$  تعداد کل لایه‌های کامپوزیت،  $\beta_k$  زاویه الیاف  $k$  امین لایه، و  $\bar{Q}_{ij}(\beta_k)$ ،  $(i, j = 1, 2, 6)$  درایه‌های ماتریس سفتی انتقال هستند که به‌صورت  $\bar{Q}_k = \bar{H}_k^{-1} Q [H_k^{-1}]^T$  برای  $k$  امین لایه تعریف می‌شود که  $H_k$  ماتریس انتقال قائم و  $Q$  ماتریس سفتی محلی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[H_k] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_k & \sin^2 \beta_k & 2 \sin \beta_k \cos \beta_k \\ \sin^2 \beta_k & \cos^2 \beta_k & -2 \sin \beta_k \cos \beta_k \\ -\sin \beta_k \cos \beta_k & \sin \beta_k \cos \beta_k & \cos^2 \beta_k - \sin^2 \beta_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

9

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن،  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{16}$  و  $Q_{26}$  ضرایب سفتی لایه کامپوزیت هستند و برای ماده مرکب ارتوتروپیک به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{(A_{12} + A_{66})n\pi}{R} \int_0^1 (\varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2}) d\bar{x} \right) u_{mn}(\bar{t}) \\ & + \left( \frac{A_{66}hR}{l^2} \int_0^1 (\varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2}) d\bar{x} - \frac{A_{22}n^2\pi}{R} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \right) v_{mn}(\bar{t}) \quad (20) \\ & \left( -\frac{A_{22}hn\pi}{R^2} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \right) w_{mn}(\bar{t}) = 0, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & \left( \pi(\rho_m h - \rho_\infty A_{mn}) \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \right) \frac{\partial^2 w_{mn}(\bar{t})}{\partial \bar{t}^2} \\ & + \left( \frac{\pi(c_0 + C_1)}{l} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} - \frac{2\rho_\infty U_\infty \pi A_{mn}}{l} \int_0^1 (\varphi_m \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}}) d\bar{x} \right) \frac{\partial w_{mn}(\bar{t})}{\partial \bar{t}} \\ & + \left( \frac{D_{22}\pi n^4}{R^4} + \frac{A_{22}\pi}{R^2} + K_1 \right) \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} - \\ & \left( \frac{2D_{12}\pi n^2 + 4D_{66}\pi n^2}{l^2 R^2} + \frac{U_\infty^2 \pi \rho_\infty A_{mn}^2}{l^2} \right) \int_0^1 (\varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2}) d\bar{x} \\ & + \left( \frac{D_{11}\pi}{l^4} \int_0^1 (\varphi_m \frac{d^4 \varphi_m}{d\bar{x}^4}) d\bar{x} \right) w_{mn}(\bar{t}) + \left( \frac{A_{12}\pi}{Rh} \int_0^1 (\varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2}) d\bar{x} \right) u_{mn}(\bar{t}) \quad (21) \\ & + \left( \frac{A_{22}\pi n}{Rh} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \right) v_{mn}(\bar{t}) + \left( \frac{3A_{22}h^2 \pi n^4}{8R^4} \int_0^1 \varphi_m^4 d\bar{x} \right. \\ & - \frac{(A_{12} + 2A_{66})h^2 \pi n^2}{8l^2 R^2} \left[ \int_0^1 (\varphi_m^3 \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2}) d\bar{x} + \int_0^1 \varphi_m^2 (\frac{d\varphi_m}{d\bar{x}})^2 d\bar{x} \right] \\ & \left. - \frac{9A_{11}\pi h^2}{8l^4} \int_0^1 \varphi_m (\frac{d\varphi_m}{d\bar{x}})^2 (\frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2}) d\bar{x} \right) w_{mn}^3(\bar{t}) \\ & = \frac{f}{h} \varphi_m \left( \frac{x_0}{l} \right) \cos(n\theta_0) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

در معادلات (۱۹) و (۲۰)،  $u_{mn}(\bar{t})$  و  $v_{mn}(\bar{t})$  را به صورت توابعی برحسب  $w_{mn}(\bar{t})$  به دست آورده و در معادله (۲۱) جای گذاری نموده تا معادله ای به شکل معادله دیفرانسیلی معمولی غیرخطی حاکم بر حرکت به صورت زیر به دست آید:

$$M \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial \bar{t}^2} + C \frac{\partial w_{mn}}{\partial \bar{t}} + K w_{mn} + \theta w_{mn}^3 = F \cos(\omega t) \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، کمیت های  $M$ ،  $C$ ،  $K$  و  $\theta$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$M = \pi(\rho_m h - \rho_\infty A_{mn}) \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x}, \quad (23)$$

$$C = \frac{\pi(c_0 + C_1)}{l} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} - \frac{2U_\infty \pi \rho_\infty A_{mn}}{l} \int_0^1 (\varphi_m \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}}) d\bar{x}, \quad (24)$$

$$u = v = w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad : x = 0, l \quad \text{در} \quad (12)$$

با تعریف متغیرهای بی بعد زیر،

$$\bar{u} = \frac{u}{l}, \bar{v} = \frac{v}{R}, \bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{t} = t\omega_{mn} \quad (13)$$

شرایط مرزی پوسته به شکل زیر تغییر می یابند،

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0 \quad : \bar{x} = 0, 1 \quad \text{در} \quad (14)$$

جابجایی های بی بعد پوسته با بهره گیری از روش جمع مودها و جداسازی متغیرهای مکانی و زمانی به صورت زیر بیان می شوند [۱۲]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{t}) &= \frac{d\varphi_m(\bar{x})}{d\bar{x}} \cos(n\theta) u_{mn}(\bar{t}), \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{t}) &= \varphi_m(\bar{x}) \sin(n\theta) v_{mn}(\bar{t}), \\ \bar{w}(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{t}) &= \varphi_m(\bar{x}) \cos(n\theta) w_{mn}(\bar{t}), \end{aligned} \quad (15)$$

که در روابط بالا،  $\varphi_m(\bar{x})$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \varphi_m(\bar{x}) &= [\sin(\lambda_m \bar{x}) - \sinh(\lambda_m \bar{x})] - \\ & \frac{\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)}{\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)} [\cos(\lambda_m \bar{x}) - \cosh(\lambda_m \bar{x})], \end{aligned} \quad (16)$$

که در رابطه فوق،  $\lambda_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) مقادیر ویژه بی بعد هستند و برای پوسته دوسرگیردار از رابطه فرکانسی زیر محاسبه می شوند:

$$\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m) - 1 = 0, \quad (17)$$

فشار آیرودینامیک بی بعد نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$\Delta \bar{P} = \rho_\infty A_{mn} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + 2 \frac{hU_\infty}{l} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + \frac{hU_\infty^2}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right), \quad (18)$$

با جایگزین کردن روابط (۳) در روابط (۱۰) و سپس نتیجه حاصل در رابطه (۹) و انجام انتگرال گیری با استفاده از روش گالرکین، روابط حاکم بر حرکت پوسته استوانه ای در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی به صورت زیر استخراج می شوند:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_{11}\pi}{l} \int_0^1 (\frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3}) d\bar{x} - \frac{A_{66}n^2 \pi l}{R^2} \int_0^1 (\frac{d\varphi_m}{d\bar{x}})^2 d\bar{x} \right) u_{mn}(\bar{t}) \\ & + \left( \frac{(A_{12} + A_{66})n\pi}{l} \int_0^1 (\frac{d\varphi_m}{d\bar{x}})^2 d\bar{x} \right) v_{mn}(\bar{t}) \quad (19) \\ & + \left( \frac{A_{12}h\pi}{Rl} \int_0^1 (\frac{d\varphi_m}{d\bar{x}})^2 d\bar{x} \right) w_{mn}(\bar{t}) = 0, \end{aligned}$$

با جای‌گذاری عبارت‌های فوق در معادله (۲۲) و کمی ساده‌سازی ریاضی به‌دست می‌آید که،

$$\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial t^2} + 2\xi \omega_{mn,lin} \frac{\partial W_{mn}}{\partial t} + \omega_{mn,lin} W_{mn} + \frac{\theta}{M} W_{mn}^3 - F_0 \cos(\omega t) = 0 \quad (29)$$

با فرض [۱۲]،

$$W_{mn} = A \sin(\omega t) \quad (30)$$

که در آن،  $A$  دامنه ارتعاشات می‌باشد. با جای‌گذاری معادله (۳۰) در معادله (۲۹) و تشکیل عبارت زیر [۱۲]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} X \sin(\omega t) dt = 0 \quad (31)$$

که انتگرال‌گیری در یک چهارم دوره تناوب ارتعاشی محاسبه می‌شود. با انجام محاسبات ریاضی و ساده‌سازی معادله به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$\omega^2 - \frac{4\xi}{\pi} \omega \omega_{mn,lin} = \omega_{mn,lin}^2 \left(1 + \frac{3\theta}{4K} A^2\right) - \frac{2F_0}{A} \quad (32)$$

برای ارتعاشات غیرخطی پوسته بدون میرایی ( $\xi = 0$ )،

$$\omega^2 = \omega_{mn,lin}^2 \left(1 + \frac{3\theta}{4K} A^2\right) - \frac{2F_0}{A} \quad (33)$$

اگر  $F_0=0$  باشد، یعنی هیچ تحریک خارجی وجود نداشته باشد، رابطه فرکانس- دامنه زیر، رابطه ارتعاش آزاد غیرخطی پوسته خواهد بود.

$$\omega_{mn}^2 (= \omega_{NL}^2) = \omega_{mn,lin}^2 \left(1 + \frac{3\theta}{4K} A^2\right) \quad (34)$$

که  $\omega_{mn} (= \omega_{NL})$  فرکانس ارتعاشات غیرخطی پوسته می‌باشد.

### ۳- اعتبارسنجی و تحلیل نتایج شبیه‌سازی

در این بخش ابتدا به صحت‌سنجی مسئله و مقایسه نتایج در حالت‌های خاص موجود در مقالات چاپ شده پرداخته می‌شود سپس، به تحلیل و بررسی نتایج شبیه‌سازی ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای از جنس ماده مرکب با لایه‌چینی متقارن که بر روی بستر ویسکوالاستیک و تحت جریان هوای خارجی زیر صوت قرار دارد پرداخته می‌شود. در تحلیل نتایج، تاثیر تغییر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مورد بررسی و تحقیق قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned} K = & \left( \frac{D_{22}\pi n^4}{R^4 \omega_{mn}^2} + \frac{A_{22}\pi}{R^2 \omega_{mn}^2} \right) \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} - \\ & \left( \frac{2D_{12}\pi n^2 + 4D_{66}\pi n^2}{l^2 R^2 \omega_{mn}^2} - \frac{U_{\infty}\pi \rho_{\infty}^2 A_{mn}^2}{l^2 \omega_{mn}^2} \right) \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \\ & + \frac{D_{11}\pi}{l^4 \omega_{mn}^2} \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^4 \varphi_m}{d\bar{x}^4} \right) d\bar{x} + \pi A_{12} A_{66} \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} [l^2 n^2 A_{22} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} + R^2 A_{12} \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x}] / \\ & \{ \omega_{mn}^2 R^2 A_{11} \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3} \right) d\bar{x} \\ & (l^2 n^2 A_{22} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} - R^2 A_{66} \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x}) - \\ & \omega_{mn}^2 l^2 n^2 \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} [l^2 n^2 A_{66} A_{22} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} + \\ & R^2 A_{12} (A_{12} + 2A_{66}) \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x}] \} \quad (25) \\ & + \{ \pi l^2 n^2 A_{22} (\int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x})^2 [l^2 n^2 B_{66} \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \\ & - R^3 B_{11} \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3} \right) d\bar{x}] \\ & + \pi l^2 n^2 R^2 A_{12} A_{22} (A_{12} + A_{66}) \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \} / \\ & \{ \omega_{mn}^2 R^4 A_{11} \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \frac{d^3 \varphi_m}{d\bar{x}^3} \right) d\bar{x} [n^2 l^2 A_{22} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \\ & - R^2 A_{66} \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x}] \\ & - \omega_{mn}^2 l^2 n^2 R^2 \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} [l^2 n^2 A_{22} A_{66} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \\ & + R^2 (A_{12}^2 + 2A_{12} A_{66}) \int_0^1 \left( \varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x}] \} + \frac{\pi K_1}{\omega_{mn}^2} \int_0^1 \varphi_m^2 d\bar{x} \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{3A_{22} h^2 \pi n^4}{8R^4 \omega_{mn}^2} \int_0^1 \varphi_m^4 d\bar{x} - \frac{(A_{12} + 2A_{66}) h^2 \pi n^2}{8l^2 R^2 \omega_{mn}^2} \int_0^1 \left( \varphi_m^3 \frac{d^2 \varphi_m}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} \\ & + \int_0^1 \varphi_m^2 \left( \frac{d\varphi_m}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} - \frac{9A_{11} \pi h^2}{8l^4 \omega_{mn}^2} \end{aligned} \quad (26)$$

### ۱-۲- فرکانس طبیعی غیرخطی و رابطه

#### فرکانس- دامنه

می‌توان از معادله (۲۲) مقدار تقریبی فرکانس طبیعی اصلی را به‌صورت زیر به‌دست آورد [۱۲]:

$$\omega_{mn,lin} = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (27)$$

با تعریف عبارت‌های:

$$\frac{C}{M} = 2\xi \omega_{mn,lin}, \quad \frac{F}{M} = F_0 \quad (28)$$

شرایط جریان هوای عبوری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$L = 1 \text{ m}, R = 0.35 \text{ m}, h = 0.003 \text{ m}, \rho_m = 1700 \text{ kg / m}^3,$$

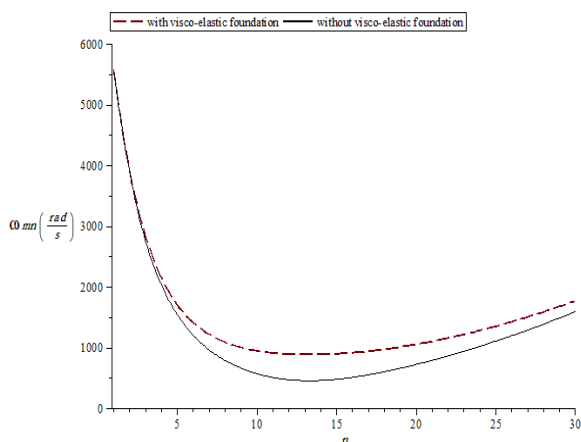
$$E_1 = 1.41 \times 10^{11} \text{ N / m}^2, E_2 = 1.41 \times 10^{11} \text{ N / m}^2,$$

$$G_{12} = 7.2 \times 10^9 \text{ N / m}^2, \nu_{12} = 0.3$$

$$C_1 = 15 \text{ N s / m}^2, K_1 = 300 \text{ kN / m}, \xi = 0.008$$

$$\rho_{\infty} = 1.29 \text{ kg / m}^3, U_{\infty} = 100 \text{ m / s}$$

محل اعمال نیروی تحریک خارجی در نقطه  $x_0=l/2$  و  $\theta_0=0$  بر روی جدار خارجی پوسته استوانه‌ای فرض شده است. نمودارهای فرکانس طبیعی ( $\omega_{mn}$ ) پوسته استوانه‌ای بر حسب تعداد موج‌های محیطی ( $n$ ) به ترتیب برای زوایای الیاف ( $\beta$ ) در لایه چینی‌های مختلف برابر با  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$ ،  $60^\circ$  و  $75^\circ$  در شکل‌های ۶-۲، در دو حالت پوسته بر روی بستر و بدون بستر ویسکوالاستیک با استفاده از تحلیل غیرخطی نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۲ الی ۶ مشاهده می‌گردد که مقدار فرکانس طبیعی غیرخطی پوسته در حالت قرار گرفته بر روی بستر ویسکوالاستیک بیشتر از حالت بدون بستر است. همچنین، کمترین مقدار فرکانس طبیعی غیرخطی در حالت پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک بیشتر از حالت پوسته بدون بستر است. در شکل ۲، برای لایه چینی با  $\beta = 15^\circ$  مشاهده می‌شود که کمترین مقدار فرکانس در حالت پوسته بدون بستر در  $n = 14$  و در حالت پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک در  $n = 13$  اتفاق می‌افتد.



شکل (۲): منحنی فرکانس طبیعی غیرخطی ( $\omega_{mn}$ ) پوسته بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی ( $n$ ) برای لایه چینی  $15^\circ$ .

### ۱-۳- صحت‌سنجی مسئله بدون بستر ویسکوالاستیک

برای اعتبار سنجی، مقادیر پارامتر فرکانسی این پژوهش با مقادیر به دست آمده در مراجع [۱۰] و [۱۳] مقایسه شده است. این مقادیر برای یک پوسته استوانه‌ای همگن و همسان‌گرد با شرایط مرزی دوسر گیردار به دست آمده است. ابعاد و خواص پوسته ایزوتروپیک به صورت ذیل می‌باشند [۱۰] و [۱۳]:

$$L = 20 \text{ m}, R = 1 \text{ m}, h = 0.01 \text{ m}, \nu = 0.3,$$

$$E = 210 \times 10^9 \text{ N / m}^2, \rho_m = 7850 \text{ kg / m}^3$$

پارامتر فرکانسی از رابطه  $\Omega_{mn} = \omega_{mn,lin} R \sqrt{\frac{\rho_m(1-\nu^2)}{E}}$  بدست می‌آید. نتایج در جدول ۱ آورده شده است. با مقایسه نتایج مشاهده می‌گردد که نتایج به دست آمده در پژوهش کنونی دارای دقت قابل قبولی می‌باشند.

جدول (۱): پارامتر فرکانسی برای پوسته استوانه‌ای همگن و همسان‌گرد با شرایط مرزی دوسر گیردار.

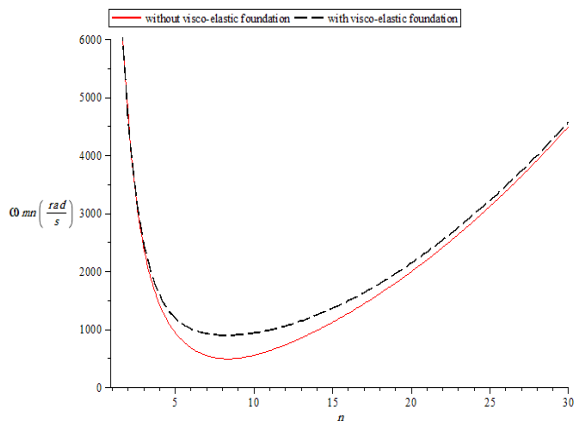
پژوهش کنونی	پارامتر فرکانسی $\Omega_{mn}$		عدد موج محیطی $n$
	مراجع [۱۳]	مراجع [۱۰]	
۰/۰۱۳۶۰	۰/۰۱۳۹۳۲	۰/۰۱۴۰۵۲	۲
۰/۰۲۲۶۳۸	۰/۰۲۲۶۷۲	۰/۰۲۲۷۲۵	۳
۰/۰۴۲۲۶۳	۰/۰۴۲۲۰۸	۰/۰۴۲۲۷۱	۴
۰/۰۶۸۱۳۲	۰/۰۶۸۰۴۶	۰/۰۶۸۱۱۶	۵
۰/۰۹۹۸۴۴	۰/۰۹۹۷۴۸	۰/۰۹۹۸۲۳	۶
۰/۱۳۷۳۴۵	۰/۱۳۷۲۴۹	۰/۱۳۷۳۲۸	۷
۰/۱۸۰۶۲۴	۰/۱۸۰۵۳۵	۰/۱۸۰۶۱۷	۸
۰/۲۲۹۶۷۷	۰/۲۲۹۵۹۹	۰/۲۲۹۶۸۴	۹
۰/۲۸۴۵۰۵	۰/۲۸۴۴۳۹	۰/۲۸۴۵۲۶	۱۰

### ۲-۳- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر روی بستر ویسکوالاستیک و تحت جریان هوا با سرعت زیر صوت

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی متشکل از سه لایه با ضخامت یکسان با لایه چینی متقارن به صورت  $[\beta/-\beta/\beta]$  مورد بررسی قرار می‌گیرد ( $\beta$  زاویه الیاف در هر لایه می‌باشد). مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای، خواص ماده مرکب، پارامترهای بستر، بار تحریک خارجی و

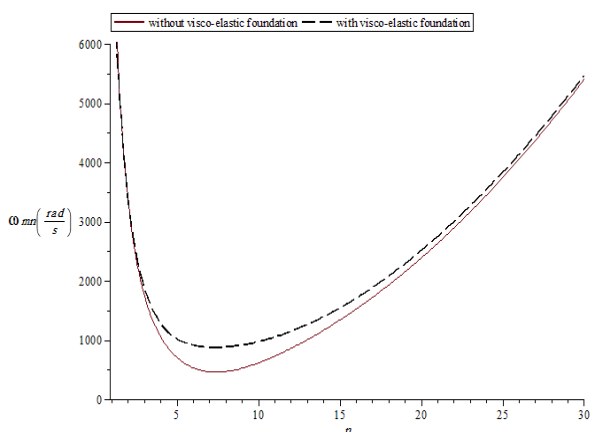


بستر در  $n=8$  و در حالت پوسته که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار دارد در  $n=7$  اتفاق می‌افتد.



شکل (۵): منحنی فرکانس طبیعی غیرخطی  $(\omega_{mn})$  پوسته بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی  $(n)$  برای لایه چینی  $60^\circ$ .

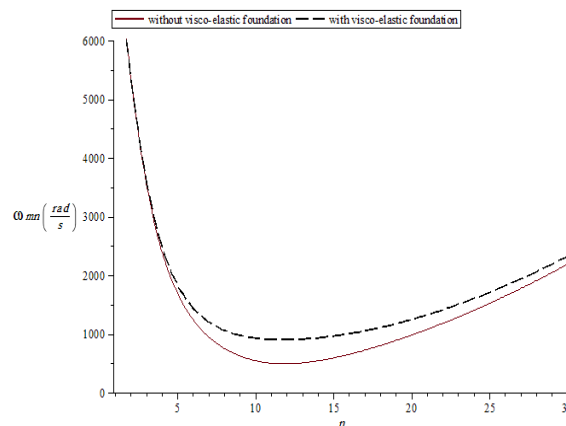
در شکل ۶، برای لایه چینی با  $\beta = 75^\circ$  مشاهده می‌شود که کمترین مقدار فرکانس در حالت پوسته بدون بستر در  $n=7$  و در حالت پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک در  $n=6$  اتفاق می‌افتد.



شکل (۶): منحنی فرکانس طبیعی غیرخطی  $(\omega_{mn})$  پوسته کامپوزیتی بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی  $(n)$  برای لایه چینی  $75^\circ$ .

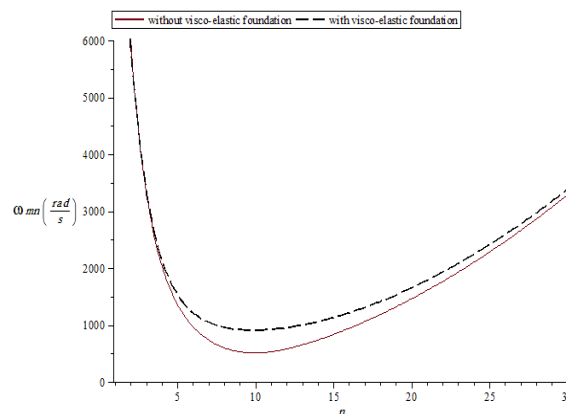
در شکل ۷، نمودار فرکانس زاویه‌ای طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی در حالت بدون بستر ویسکوالاستیک برای زاویه الیاف از  $15^\circ$  تا  $75^\circ$  (برای  $m=1$ ) نشان داده شده است. با توجه به

در شکل ۳، برای پوسته با لایه چینی  $\beta = 30^\circ$  مشاهده می‌شود که کمترین مقدار فرکانس در حالت پوسته بدون بستر در  $n=12$  و در حالت پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک در  $n=11$  اتفاق می‌افتد.



شکل (۳): منحنی فرکانس طبیعی غیرخطی  $(\omega_{mn})$  پوسته بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی  $(n)$  برای لایه چینی  $30^\circ$ .

در شکل ۴، برای پوسته با لایه چینی  $\beta = 45^\circ$  مشاهده می‌گردد که کمترین مقدار فرکانس در حالت پوسته بدون بستر در  $n=10$  و در حالت پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک در  $n=9$  اتفاق می‌افتد.

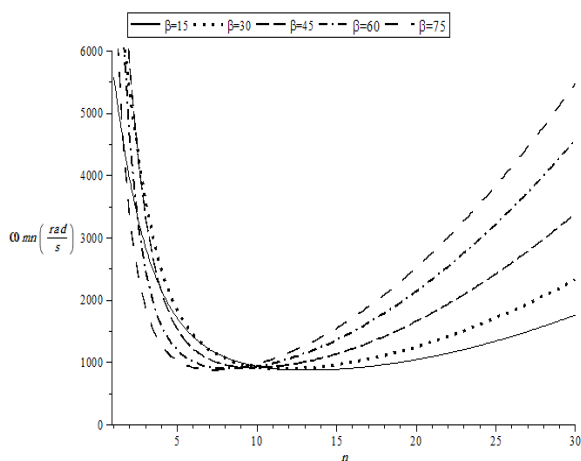


شکل (۴): منحنی فرکانس طبیعی غیرخطی  $(\omega_{mn})$  پوسته بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی  $(n)$  برای لایه چینی  $45^\circ$ .

در شکل ۵، برای پوسته با لایه چینی  $\beta = 60^\circ$  مشاهده می‌شود که کمترین مقدار فرکانس در حالت پوسته بدون

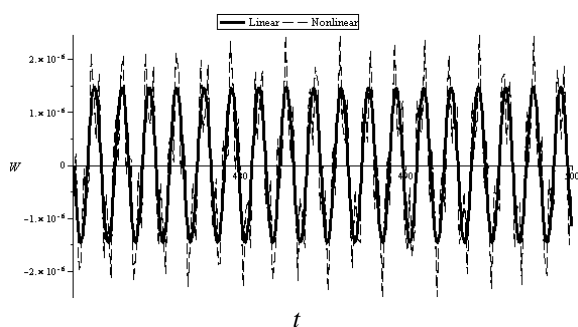
$n=10$  مقدار فرکانس طبیعی پوسته برای تمام زوایای الیاف در لایه چینی‌های مختلف یکسان می‌باشد.

در شکل ۹، پاسخ ارتعاشی نقطه میانی پوسته ( $W$ ) بر حسب زمان ( $t$ ) در دو تحلیل خطی و غیرخطی نشان داده شده است. زاویه الیاف در لایه چینی  $\beta = 45^\circ$  و سرعت جریان هوا  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  فرض شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌گردد که دامنه ارتعاشات در حالت تحلیل غیرخطی بیشتر از حالت خطی است و این لزوم در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی در معادلات حاکم بر حرکت پوسته را تایید می‌کند.



شکل (۸): منحنی فرکانس زاویه‌ای طبیعی پوسته

کامپوزیت بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی بر روی بستر ویسکوالاستیک برای زاویه الیاف از  $15^\circ$  تا  $75^\circ$  ( $m=1$ ).

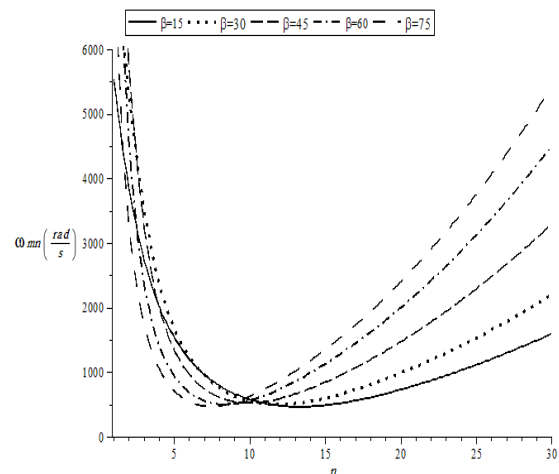


شکل (۹): مقایسه پاسخ دینامیکی نقطه میانی پوسته

بدون بستر در حالت خطی و غیرخطی برای

$$\frac{\omega}{\omega_{nn,lin}} = 3.8, F_0 = 1.4309, U_\infty = 100 \text{ m/s}, \beta = 45^\circ, m = 1$$

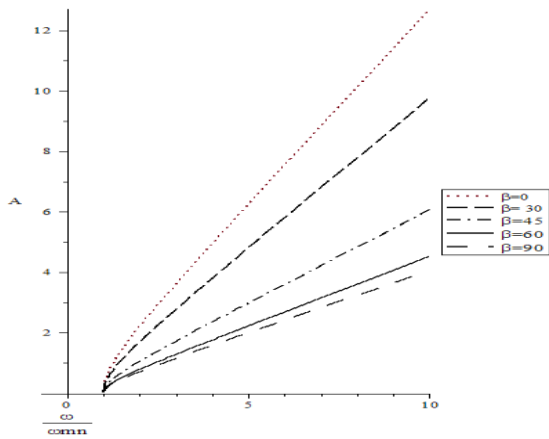
شکل ۷ مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار زاویه الیاف در لایه چینی، کمترین مقدار فرکانس طبیعی در تعداد موج‌های محیطی کمتری می‌باشد. به عبارت دیگر با افزایش  $\beta$ ، کمترین مقدار فرکانس طبیعی در  $n$  کمتری اتفاق می‌افتد. برای مثال برای  $\beta = 15^\circ$  کمترین مقدار فرکانس طبیعی برابر  $460 \text{ rad/s}$  و در  $n=14$  بوده و برای  $\beta = 75^\circ$  کمترین مقدار فرکانس طبیعی برابر با  $470 \text{ rad/s}$  و در  $n=7$  اتفاق می‌افتد. همچنین در  $n=10$  مقدار فرکانس طبیعی پوسته برای تمام زوایای الیاف در لایه چینی‌های مختلف یکسان می‌باشد.



شکل (۷): منحنی فرکانس زاویه‌ای طبیعی پوسته

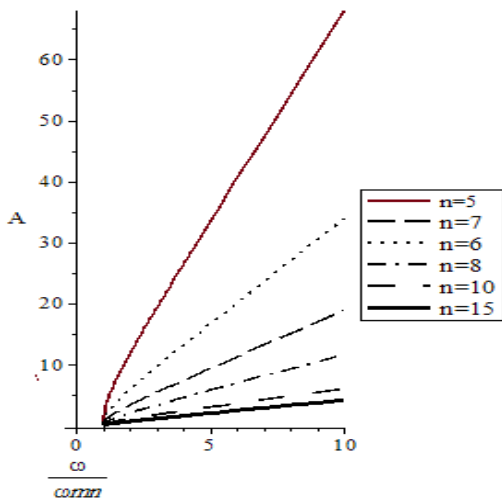
کامپوزیتی بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی در حالت بدون بستر برای زاویه الیاف از  $15^\circ$  تا  $75^\circ$  ( $m=1$ ).

در شکل ۸، نمودار فرکانس زاویه‌ای طبیعی پوسته کامپوزیتی بر حسب تعداد طول موج‌های محیطی بر روی بستر ویسکوالاستیک ( $K_1 = 300 \text{ kN/m}$ ,  $C_1 = 15 \text{ Ns/m}$ ) برای زاویه الیاف از  $15^\circ$  تا  $75^\circ$  (برای  $m=1$ ) نشان داده شده است. با توجه به شکل ۸ مشاهده می‌گردد که با افزایش مقدار زاویه الیاف در لایه چینی، کمترین مقدار فرکانس طبیعی در تعداد موج‌های محیطی کمتری می‌باشد. به عبارت دیگر با افزایش  $\beta$ ، کمترین مقدار فرکانس طبیعی در  $n$  کمتری اتفاق می‌افتد. برای مثال برای  $\beta = 15^\circ$  کمترین مقدار فرکانس طبیعی برابر  $905 \text{ rad/s}$  و در  $n=13$  بوده و برای  $\beta = 75^\circ$  کمترین مقدار فرکانس طبیعی برابر با  $920 \text{ rad/s}$  و در  $n=6$  اتفاق می‌افتد. همچنین در



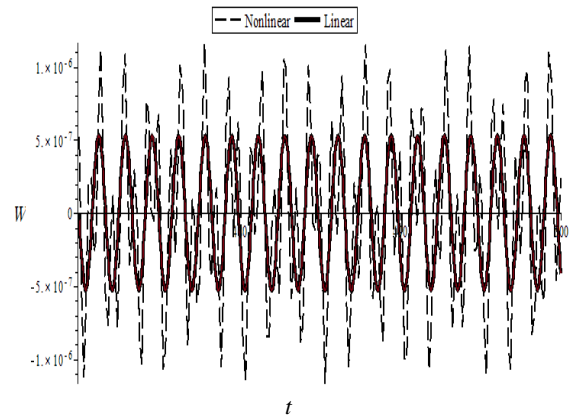
شکل (۱۱): اثر تغییر زاویه الیاف بر روی نمودار دامنه-فرکانس پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در حالت بدون میرایی و ارتعاش آزاد ( $m=1$ ).

در شکل ۱۲، اثر تغییر تعداد موج‌های محیطی ( $n$ ) بر روی نمودار فرکانس-دامنه پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با  $\beta = 45^\circ$  در حالت بدون میرایی و در حالت ارتعاش آزاد رسم شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد موج‌های محیطی ( $n$ ) شیب نمودار کم می‌شود. به عبارت دیگر برای دامنه یکسان، با افزایش تعداد موج‌های محیطی فرکانس بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد.



شکل (۱۲): اثر تغییر تعداد موج‌های محیطی روی نمودار دامنه-فرکانس پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در حالت بدون میرایی و ارتعاش آزاد ( $m=1$ ).

در شکل ۱۰، نتایج تحلیل پاسخ ارتعاشی ( $W$ ) نقطه میانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی برحسب زمان ( $t$ ) که بر روی بستر ویسکوالاستیک قرار دارد (با استفاده از دو تحلیل خطی و غیرخطی نشان داده شده است. زاویه الیاف در لایه چینی  $\beta = 45^\circ$  و سرعت جریان هوا نیز  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  فرض شده است. مشاهده می‌گردد که دامنه ارتعاشات در حالت تحلیل غیرخطی بیشتر از حالت خطی است. همچنین، دامنه ارتعاشات پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک نسبت به حالت بدون بستر کاهش یافته است. این موضوع در هر دو حالت خطی و غیرخطی صادق است.



شکل (۱۰): مقایسه پاسخ ارتعاشی پوسته بر روی بستر ویسکوالاستیک در حالت خطی و غیرخطی برای

$$\frac{\omega}{\omega_{mn,lin}} = 3.8, F_0 = 1.4309, U_\infty = 100 \text{ m/s}, \beta = 45^\circ, m = 1$$

در شکل ۱۱، اثر تغییر زاویه الیاف بر روی نمودار دامنه ارتعاشات ( $A$ ) برحسب فرکانس بی‌بعد شده ( $\omega/\omega_{mn}$ ) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در حالت بدون بستر و در حالت ارتعاشات آزاد برای  $n = 10$  نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه الیاف شیب نمودارها کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، برای دامنه یکسان، با افزایش زاویه الیاف فرکانس بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد.

## ۴- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات پوسته استوانه‌ای از جنس ماده مرکب لایه‌ای متقارن بر روی بستر ویسکوالاستیک که جریان هوا با سرعت زیر صوت از روی آن عبور می‌کند مورد بررسی قرار گرفت. شرایط مرزی دو انتهای پوسته استوانه‌ای، گیردار فرض شد. معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی (جانبی) با استفاده از نظریه پوسته غیرخطی دائل به دست آمد. با بهره‌گیری از روش گالرکین سه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت پوسته به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی حاکم بر ارتعاشات شعاعی تبدیل گردید. سپس روابط فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی و رابطه دامنه ارتعاشات بر حسب فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته محاسبه گردید. در تحلیل و بررسی نتایج شبیه‌سازی، تاثیر تغییر زاویه لایه‌های ماده مرکب در لایه چینی متقارن پوسته، سفتی و میرایی بستر ویسکوالاستیک و مقادیر بار تحریک خارجی بر روی رفتار ارتعاش آزاد و اجباری پوسته مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت. همچنین، منحنی‌های جابجایی جانبی پوسته بر حسب زمان در حالت خطی و غیرخطی ارائه شده است. خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده به شرح ذیل می‌باشند:

- ۱- با افزایش زاویه لایه‌های ماده مرکب، عدد موج برای مد اساسی ارتعاشات غیرخطی کاهش می‌یابد.
- ۲- اثر وجود لایه ویسکوالاستیک کمترین فرکانس طبیعی پوسته را افزایش می‌دهد. به عبارت دیگر، از نتایج به دست آمده از تحلیل غیرخطی می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس تشدید پوسته افزایش یافته و در نتیجه پوسته کامپوزیتی بارهای دینامیکی بالاتری را می‌تواند تحمل کند.
- ۳- لایه چینی با زاویه ۴۵ درجه برای پوسته ساخته شده از ماده مرکب دارای مشخصات دینامیکی (فرکانس تشدید بالاتر) بهتری نسبت به دیگر زوایای لایه چینی است.
- ۴- با افزایش سرعت جریان هوا از ده تا صد متر بر ثانیه، فرکانس طبیعی سازه تغییر چندانی ندارد اما دامنه ارتعاشات را به میزان اندکی افزایش می‌دهد.

۵- در حالت پایا، دامنه پاسخ غیرخطی نسبت به دامنه محاسبه شده از تحلیل خطی بیشتر می‌باشد و این نتیجه نشان می‌دهد که از تاثیر ترم‌های غیرخطی در معادلات حاکم بر حرکت پوسته نمی‌توان صرف نظر کرد.

۶- بستر ویسکوالاستیک دامنه ارتعاشات را کاهش می‌دهد. به عبارت دیگر، لایه ویسکوالاستیک با جذب انرژی ارتعاش، دامنه ارتعاشات را کاهش می‌دهد.

۷- برای دامنه یکسان در تحلیل‌های خطی و غیرخطی، با افزایش تعداد موج‌های محیطی، فرکانس بی‌بعد پوسته افزایش می‌یابد.

۸- در تحلیل‌های خطی و غیرخطی برای دامنه یکسان، با افزایش مقدار زوایای الیاف در لایه چینی، فرکانس بی‌بعد پوسته افزایش می‌یابد.

## ۵- منابع

1. Del Prado, Z. and Goncalves, P. B. "Non-linear Vibrations and Instabilities of Orthotropic Cylindrical Shells with Internal Flowing Fluid", International Journal of Mechanics, Vol. 52, pp. 1437-1457, 2010.
2. Lam, K. Y. and Qian, W. "Free Vibration of Symmetric Angle-ply Thick Laminated Composite Cylindrical Shells", Composites: Part B., Vol. 31, pp. 345-354, 2000.
3. Rahmani, O., Khalili, S.M.R. and Malekzadeh, K. "Free Vibration Response of Composite Sandwich Cylindrical Shell with Flexible Core", Computers and Structures, Vol. 92, pp. 1269-1281, 2010.
4. Liu, Y. and Chu, F. "Nonlinear Vibrations of Rotating Thin Circular Cylindrical Shell", Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 2, pp. 1467-79, 2012.
5. Bakhtiari-Nejad, F. and Bideleh, S.M.M. "Nonlinear Free Vibration Analysis of Prestressed Circular Cylindrical Shells on the Winkler/Pasternak Foundation", Thin-Walled Structures, Vol. 53, pp. 26-39, 2012.
6. Amabili, M. "Nonlinear Vibrations of Laminated Circular Cylindrical Shells: Comparison of Different Shell Theories", Composite Structures, Vol. 94, No. 1, pp. 207-215, 2011.
7. Karagiozis, K.N., Amabili, M., Paidoussis, M.P., and Misra, A.K. "Nonlinear Vibrations of Fluid-Filled Clamped Circular Cylindrical Shells", Journal of Fluids and Structures, Vol. 21, No. 5-7, pp. 579-95, 2005.
8. Xi, Z.C., Yam, L.H. and Leung, T.P. "Free Vibration of Laminated Composite Circular Cylindrical Shell Partially Filled with Fluid", Composites part B., Vol. 28B, pp. 399-375, 1997.

13. Khalili, S.M.R., Azarafza, R. and Davar, A. "Transient Dynamic Response of Initially Stressed Composite Circular Cylindrical Shells under Radial Impulse Load", *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 275–284, 2009.
14. Jafari, A.A., Khalili, S.M.R. and Azarafza, R. "Transient Dynamic Response of Composite Circular Cylindrical Shells under Radial Impulse Load and Axial Compressive Loads", *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, pp. 1763–1786, 2005.
15. Azarafza, R., Khalili, S. M. R., Jafari, A. A. and Davar, A. "Analysis and Optimization of Laminated Composite Circular Cylindrical Shell Subjected to Compressive Axial and Transverse Transient Dynamic Loads", *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, pp. 970–983, 2009.
9. Lam, K.Y., and Loy, C.T. "Influence of Boundary Conditions and Fibre Orientation on the Natural Frequencies of Thin Orthotropic Laminated Cylindrical Shells", *Composite Structures*, Vol. 31, No. 1, pp. 21–30, 1995.
10. Zhang, X.M., Liu, G.R. and Lam, K.Y. "Vibration Analysis of Thin Cylindrical Shells using Wave Propagation Approach", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, No. 3, pp. 397–403, 2001.
11. Bich, D.H., and Nguyen, N.X. "Nonlinear Vibration of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Based on Improved Donnell Equations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 5488–5501, 2012.
12. Li, F.-M. and Yao, G. "1/3 Subharmonic Resonance of a Nonlinear Composite Laminated Cylindrical Shell in Subsonic Air Flow", *Composite Structures*, Vol. 100, pp. 249–256, 2013.