

طراحی و شبیه‌سازی نانوحسگر شتاب‌سنج چند گانه پیزوالکتریک

مقاومتی - خازنی

احمد مامندی^۱ و معصومه اسدی^۲

گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند،

دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۱۶)

چکیده

در این مقاله، طراحی و شبیه‌سازی ریاضی یک نانوحسگر شتاب‌سنج ترکیبی پیزوالکتریک خازنی - مقاومتی با استفاده از نرم‌افزار مالتی فیزیک Comsol مورد بررسی قرار گرفته است. معادله حاکم بر جابه‌جایی عرضی حسگر با فرض تیر اولر- برنولی یکسر گیردار یکسر آزاد با در نظر گرفتن نیروهای الکترواستاتیک و واندروالس- کازیمیر ارائه شده است. اثر در نظر گرفتن لایه پیزوالکتریک، پیزومقاومت و صفحه خازنی در رفتار خمشی نانوحسگر با اعمال خواص فیزیکی لایه‌ها به کمک واسط‌های ریاضی در محیط نرم‌افزار Comsol شبیه‌سازی شده و سپس تحلیل شده است. تحلیل نتایج شامل محاسبه مقدار تغییرات مقاومت $\Delta R/R$ ، تغییرات پتانسیل الکتریکی $\Delta V/V$ لایه پیزوالکتریک و تغییرات ظرفیت خازنی $\Delta C/C$ بر حسب شتاب، توزیع تنش فون مایز به‌ازای شتاب‌های مختلف و مقایسه بیشینه مقدار تنش با تنش تسلیم حسگر، توزیع خیز بر اساس شتاب وارد شده به نانوحسگر، تحلیل خستگی و تعیین شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی حسگر برای حصول اطمینان از کارکرد آن ارائه شده‌اند. همچنین، تاثیر تغییر پارامترهای مختلف شامل شتاب اعمالی g و تغییر ماده پیزومقاومت بر رفتار حسگر بررسی شده است. از نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌گردد که نانوحسگر از نظر حساسیت اندازه‌گیری، سطح تنش و عمر خستگی به‌طور مناسبی طراحی شده است.

واژه‌های کلیدی: نانوحسگر شتاب‌سنج، نانوتیر یکسر گیردار، نانوحسگر پیزوالکتریک خازنی - مقاومتی، تحلیل المان محدود،

نرم‌افزار Comsol، تحلیل خستگی

Design and Simulatuion of a Hybrid Nano Piezoelectric Resistive-Capacitive Accelerometer Sensor

A. Mamandi and M. Asadi

Department of Mechanical Engineering, Parand Branch,
Islamic Azad University, Parand, Iran

(Received: 22/May/2018 ; Accepted: 07/December/2018)

ABSTRACT

In this paper, design and mathematical simulation of a hybrid piezoelectric capacitive-resistive nano accelerometer sensor has been investigated using Comsol multiphysics finite element software. The governing equation of motion in the transverse direction for a cantilever Euler-Bernoulli beam has been used considering electrostatic and van der Waals-Casimir forces. The effect of existence of piezoelectric layer, piezoresistive and capacitive patches in the bending behavior of the sensor is considered applying the physical properties of piezopatches and then simulated and solved using mathematical modules of the Comsol software. The obtained results are included the values of $\Delta R/R$, $\Delta V/V$ and $\Delta C/C$ for piezo patches with respect to the variation of applied acceleration of the sensor, stress distribution along the length of the beam and maximum value of von Mises stress to compare with the yield stress of the sensor, deflction of the beam with respect to the variation of applied acceleration of the sensor, fatigue analysis for the sensor and the sensor's mode shapes and natural frequencies to determine the performance of the sensor. The effects of changes of different values including *nano g* acceleration and material properties of piezoresistive patch on the behavior of the sensor are also considered in the analyses. It can be observed that nansensor has been satisfactory well designed from measuring sensitivity, stress level and fatigue life point of views.

Keywords: Nano accelelrmeter sensor, Nanocantilever beam, Piezoelectric capacitive-resistive nano sensor, Finite Element analysis, Comsol multiphysics software, Fatigue analysis.

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): a.mamandi@rkiau.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: zohamasadi@yahoo.com

۱- مقدمه

خطوط راه آهن، صنایع خودروسازی برای سامانه‌های حسگر واکنش سریع به تصادفات در زمان ترمز (کیسه‌های هوا) و راحتی سرنشین و سواری مناسب در خودروها، صنایع کامپیوتری در ساخت لپ‌تاپ‌های حساس به تغییر مکان‌های سریع جهت حفاظت از درایوها، حافظه‌ها، میکروچیپ‌ها و joystickها و صنایع و فناوری‌های مرتبط با حوزه رباتیک نام برد. با کاهش ابعاد در مقیاس نانو پدیده‌های مختلفی ظاهر می‌گردد که می‌توان به عنوان نمونه، تاثیر نیروهای بین مولکولی را نام برد. نیروهای بین مولکولی بر حسب فاصله اولیه بین یک تیر و یک صفحه بر دو نوع کازیمیر و واندروالس می‌باشد. اگر این فاصله کمتر از ده نانومتر باشد، نیروهای واندروالسی و اگر بیشتر از آن باشد نیروهای کازیمیر بر تیر اعمال می‌شوند.

رضانی و همکارانش [۱]، در سال ۲۰۰۷، ناپایداری استاتیکی و دینامیکی یک نانوتیر یکسر گیردار تحت تاثیر جریان مستقیم اعمالی و ناگهانی با استفاده از نظریه غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح‌شده در حضور اثرات تنش سطحی را با استفاده از روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند. پارامترهای پایه برای طراحی مهندسی در مقیاس نانو مانند خیز بحرانی انتهایی تیر و ولتاژ pull-in در دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی گردید. تادی و همکارانش [۲]، در سال ۲۰۱۱، ناپایداری pull-in و اثر اندازه را بر روی یک نانوتیر یکسر گیردار تحت اثر نیروی الکترواستاتیک و نیروهای بین مولکولی (نیروی کازیمیر و واندروالس) با استفاده از نظریه گرادیان کرنش مورد مطالعه قرار دادند. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل و روش عددی، معادلات دیفرانسیل حاکم حل شده و خیز بحرانی انتهایی تیر و ولتاژ pull-in محاسبه شده‌است. در سال ۲۰۱۳، کوکا و سودانو [۳]، با استفاده از نانوسیم شتاب‌سنج با حساسیت بالا در کاربرد برداشت انرژی ساختند. در سال ۲۰۱۵، مهران و مهاجرزاده [۴]، نانساختاری برای شتاب‌سنج خازنی سیلیکونی با حساسیت بالا ارائه نمودند. کیوانی و همکارانش [۵]، در سال ۲۰۱۶، برای دو نوع مختلف نانو شتاب‌سنج از نوع دو صفحه‌ای تحت نیرو و شتاب با استفاده از نظریه تنش کوپل و در نظر گرفتن پارامتر اندازه و نیروی کازیمیر، اثر pull-in را بررسی نمودند. جهت بررسی بیشتر کارهای انجام‌شده در زمینه میکرو و نانوحسگرها به مراجع [۱۴-۶] ارجاع داده می‌شود. از کارهای مورد بررسی مشاهده

اندازه‌گیری شتاب با کمک شتاب‌سنج با قابلیت اطمینان و حساسیت بالا یکی از مباحث مهم در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی می‌باشد. یکی از فناوری‌های مطرح در زمینه کوچک‌سازی حسگرهای شتاب‌سنج، فناوری NEMS^۱ می‌باشد به طوری که بتوان به کمک حسگرهایی با ابعاد کوچکتر از اندازه با مقیاس میکرومتر، حساسیت بالاتر، اختلال در سیگنال پایین و توان مصرفی کمتر را بر پایه این فناوری تولید نمود. برخی از انواع سامانه‌های نانوالکترومکانیکی در واقع وسایل مبتنی بر نانوتیر یکسر گیردار می‌باشند که به صورت نانوحسگر شتاب‌سنج مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به تنوع و گستره کاربرد نانوتیر یکسر گیردار، شناخت رفتار مکانیکی آن می‌تواند راه گشای کاربرد بهتر تجهیزاتی با دقت بالا شود. نمونه‌های واقعی و فراگیرشده از حسگرهایی که در محدوده اندازه نانو ساخته شده باشند اندک می‌باشند و توسعه حسگرها در مقیاس نانو در مراحل اولیه خود می‌باشد اما می‌توان برخی ابزارها و کاربردهای آنها را پیش‌بینی کرد. به طور کلی در صنایع ویژه، کاربرد حسگرهای در مقیاس نانو در حال توسعه می‌باشد. شتاب‌سنج NEMS با حساسیت بالا برای سامانه‌های کنترل و هدایت نسل جدید تجهیزات تست روتور به‌عنوان حسگرهای مجاورتی بسیار دقیق در وسایل اندازه‌گیری ارتعاشات یاتاقان‌های تجهیزات دوار، تثبیت‌کننده سکو برای فضاپیماها و بوم گرانشی ماهواره‌های در حال چرخش در مدار سیارات مانند زمین که تغییرات بسیار اندک در نیروی گرانش (شتاب جاذبه) تاثیر بسیار بزرگ و کاملاً محسوسی در هدایت و کنترل ماهواره دارد، سامانه ناوبری و هدایت و کنترل پروازی هواپیماهای جنگنده مافوق صوت پیشرفته، موشک‌های کروز و بالستیک نقطه‌زن که به دلیل عبور از عوارض طبیعی زمین تحت تاثیر تغییرات بسیار اندک گرانش قرار دارند و سامانه‌های موقعیت‌یاب زیرسطحی برای زیردریایی‌های اتمی و اژدرهای سریع، مورد توجه بسیار زیاد در صنایع نظامی و هوافضایی بوده و در حال توسعه می‌باشند. از کاربردهای دیگر نانوحسگر شتاب‌سنج می‌توان در صنایع میکروماشین‌کاری، صنایع ریلی برای ردیابی لرزش‌های بسیار کوچک و حفاظت

(بج) پیزوالکتریک بر حسب شتاب، تغییرات خازنی $\Delta C/C$ بر حسب شتاب، توزیع تنش فون مایرز به‌ازای شتاب‌های مختلف و مقایسه بیشینه مقدار تنش با تنش تسلیم حسگر، توزیع خیز بر اساس شتاب وارد شده به نانوحسگر، تحلیل خستگی و عمر نانوحسگر و تعیین شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی حسگر برای حصول اطمینان از کارکرد حسگر.

۲- مدل ریاضی نانوتیر یکسر گیردار با در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی

معادله حاکم بر جابه‌جایی عرضی نانوتیر یکسر گیردار با فرض نظریه تیر اویلر-برنولی و در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی عبارت است از [۱۳]

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = F_{elec} + F_{casimir} + F_{vdw} \quad (1)$$

که در آن، x مختصات در راستای طول تیر (با مبدا در انتهای سمت چپ آن)، t زمان، $w = w(x,t)$ خیز مکانی-زمانی (نانوتیر به‌عنوان الکترومتر متحرک) که جهت مثبت آن به سمت پایین در جهت محور z به‌ازای ولتاژ معین، E مدول یانگ، ρ چگالی ماده، A مساحت سطح مقطع تیر به طول L ، عرض b و ضخامت h و I ممان اینرسی دوم سطح مقطع تیر ($I = 1/12bh^3$) می‌باشد. همچنین، F_{elec} نیروی الکترواستاتیک اعمال شده به نانوتیر و F_{vdw} و $F_{casimir}$ نیروهای بین مولکولی واندروالس و کازیمیر که به‌صورت زیر تعریف می‌گردند [۱ و ۱۳]

$$F_{elec} = \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g-w)^2} \left(1 + 0.65 \frac{g-w}{b} \right), \quad (2)$$

$$F_{vdw} = \frac{\bar{A}b}{6\pi(g-w)^3}, \quad F_{casimir} = \frac{\pi^2 \bar{h}bc}{240(g-w)^4}$$

در روابط (۲)، $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ ضریب گذردهی الکترون در خلاء، V ولتاژ اعمالی به تیر، g فاصله اولیه بین تیر و الکتروود پایینی آن، \bar{A} مقدار ثابت هاماکر، $\bar{h} (= h/2\pi)$ ثابت کاهش یافته پلانک که در آن، $h = 1.055 \times 10^{-34} \text{Js}$ و $c = 2.988 \times 10^8 \text{m/s}$ سرعت نور است. با جایگذاری روابط (۲) در رابطه (۱)، معادله حاکم بر جابه‌جایی عرضی نانوتیر یکسر گیردار به‌دست می‌آید

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g-w)^2} \left(1 + 0.65 \frac{g-w}{b} \right) + \frac{\pi^2 \bar{h}bc}{240(g-w)^4} \quad (3)$$

می‌گردد که رفتار مکانیکی نانو شتاب‌سنج چندگانه به‌صورت مستقل و یکپارچه انجام نشده‌است. در این راستا، بررسی و دست‌یابی به پارامترهایی مانند رفتار مکانیکی نانوحسگر، سرعت پاسخ، حساسیت اندازه‌گیری، دامنه کاری، فرکانس رزونانس، محدوده قابل اندازه‌گیری، باند فرکانسی و کارایی بسیار ضروری به نظر می‌رسد. همچنین، تاکنون در خصوص تلفیقی از این نوع شتاب‌سنج‌ها با به‌کارگیری همزمان چند نوع لایه برای بالا بردن دقت و حساسیت نانوحسگر شتاب‌سنج یکسر گیردار ایده‌ای مطرح نگردیده و شبیه‌سازی و طراحی پیشنهادی برای آن صورت نگرفته‌است. با توجه به این که تاکنون در خصوص نانوشتاب‌سنج‌ها به‌نحوی که از چند مدل مختلف در یک سازه استفاده نشده‌است پژوهش کنونی می‌تواند به‌عنوان نوآوری جدیدی در این زمینه باشد. در پژوهش کنونی، مدل حسگر شامل یک نانوحسگر یکسر گیردار از جنس سیلیکون و با لایه نشانی از نوع فلزی است که در خمش، ظرفیت خازن تغییر نموده و با تغییر مقدار ظرفیت خازنی ΔC می‌توان مقدار خمش را تعیین نمود. با محاسبه تغییر در ظرفیت خازنی می‌توان الگوی خمش و مقدار آن را به‌دست آورد. لایه‌ای از پیزوالکتریک در قسمت گیردار در زیر تیر و لایه‌ای از پیزومقاومت در بالای تیر دوپ می‌شود. هنگام خمیدگی تیر با فشار بر لایه‌ها و ایجاد ولتاژ V ، لایه پیزوالکتریک ولتاژ را نشان می‌دهد و همچنین با تغییر مقاومت لایه پیزورزیستور ΔR مشخص می‌گردد. سپس، با داشتن این تغییرات می‌توان جابه‌جایی را مشخص نمود. با تلفیق این سه خروجی می‌توان بهترین وضعیت نانوحسگر شتاب‌سنج را به‌دست آورد. در نانوحسگرهای شتاب‌سنج چندگانه، تلفیقی از اجزای خازنی، پیزوالکتریک و پیزومقاومت استفاده می‌گردد. با استفاده از معادلات حاکم بر مدل شتاب‌سنج‌ها و به‌کارگیری جداگانه فیزیک در محیط نرم‌افزار المان محدود Comsol برای هر کدام از آنها، مدل‌سازی ریاضی و تحلیل شتاب‌سنج انجام می‌شود.

اهدافی که در این پژوهش مد نظر قرار گرفته‌اند عبارتند از: الف- مدل‌سازی و شبیه‌سازی ریاضی نانوحسگر شتاب‌سنج چندگانه پیزوالکتریک خازنی-پیزومقاومتی با استفاده از نرم‌افزار Comsol Multiphysics، ب- تحلیل نتایج شامل محاسبه مقدار تغییرات مقاومت $\Delta R/R$ بر حسب شتاب، تغییرات پتانسیل الکتریکی $\Delta V/V$ حاصل از لایه

$$\begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{bmatrix} + \nabla \begin{bmatrix} 0 & EI \\ EI & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(w) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

مقادیر پارامترهای ثابت Comsol شامل e_a ، c و f جهت وارد نمودن در نرم افزار به صورت زیر می باشند

$$e_a = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & -EI \\ -EI & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$f(w) = \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g-w)^2} \left(1 + 0.65 \frac{g-w}{b} \right) + \frac{\pi^2 \hbar b c}{240(g-w)^4}$$

با توجه به مشخص بودن مقدار تابع بر روی مرزها، شرط مرزی دیریکله با مقدار صفر در نظر گرفته شده است.

۳-۱- تاثیر وجود لایه پیزوالکتریک در نانوحسگر یکسر گیردار

در این بخش رابطه بین تنش و جابه جایی (کرنش) در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی در لایه پیزوالکتریک ارائه شده و سپس تنش حاکم بر لایه پیزوالکتریک حسگر استخراج می گردد. همچنین، ولتاژ ایجاد شده در حسگر ناشی از تغییر شکل مکانیکی این لایه نیز به دست می آید. شکل تانسوری (اندیسی) تنش ها و جابه جایی الکتریکی در مواد پیزوالکتریک به صورت زیر می باشد [۱۳]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (11)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} - \epsilon_{ik} E_k \quad (12)$$

که در روابط بالا، σ_{ij} مولفه های تنش، ϵ_{kl} مولفه های کرنش، E_k شدت میدان الکتریکی، C_{ijkl} تانسور الاستیسیته ماده پیزوالکتریک در یک میدان الکتریکی ثابت، e_{kij} ثابت-های کرنش پیزوالکتریک، ϵ_{ik} ثابت های دی الکتریک و D_i جابه جایی الکتریکی می باشد. روابط (۱۱-۱۲) به شکل ماتریسی برای یک ماده پیزوالکتریک همسانگرد عرضی بدون داشتن تقارن به شکل رابطه (۱۳) نوشته می شوند [۱۳]

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & -c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (13)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت زیر می باشند

$$w(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad (4)$$

$$EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{در } x = L$$

و شرایط اولیه نانوتیر به صورت زیر می باشند

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

در این پژوهش، چون ابعاد در نظر گرفته شده برای نانوتیر بیشتر از ۲۰nm است تنها نیروی کازیمیر در نظر گرفته شده است [۹-۱].

۳- شبیه سازی نانوحسگر شتابسنج چندگانه یکسر گیردار با استفاده از نرم افزار Comsol

در این پژوهش، برای تعریف معادله حاکم بر نانوتیر یکسر گیردار در نرم افزار Comsol که تاثیر نیروهای بین مولکولی در آن لحاظ شده باشد از امکانات واسط (ماژول) حل معادلات PDE در محیط ریاضی آن بهره گرفته شده است. با تغییر متغیر $v(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$ ، معادله دیفرانسیل درجه چهار حاکم بر تیر اولر-برنولی در رابطه (۳) به دو معادله دیفرانسیل درجه دوم قابل حل در نرم افزار Comsol به همراه شرایط مرزی به صورت زیر تبدیل می گردد

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w), EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = Elv \quad (6)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad (7)$$

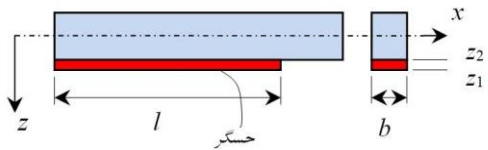
$$v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{در } x = L$$

این معادلات توسط فیزیک Mathematic در نرم افزار جهت به دست آوردن رفتار خمشی تیر وارد گردیده است. لازم به ذکر است که شکل کلی معادله ورودی در بخش معادلات PDE در محیط نرم افزار Comsol به صورت زیر می باشد

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - au + \gamma) + \beta \nabla + au = f, \quad (8)$$

$$u = [uu, vv]^T, \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

معادلات (۶) شامل دو معادله بر حسب w و v به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می شوند



شکل (۱): هندسه تیر متشکل از لایه حسگر پیزوالکتریک.

با بهره‌گیری از رابطه تجربی $E_i = \phi_i$ [۱۳] رابطه (۱۹) در راستای z به شکل زیر بازنویسی می‌گردد

$$E_z = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (21)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۱) در راستای z ، رابطه حاکم بر اختلاف پتانسیل الکتریکی حسگر در اثر کرنش مکانیکی عبارت است از

$$V = \frac{1}{A} \int_A (\phi|_{z=z_3} - \phi|_{z=z_2}) dA = -\frac{e_{31} h_s}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_m \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲)، h_s و $h_m (=h)$ به ترتیب ضخامت لایه پیزوالکتریک و ضخامت تیر می‌باشند (شکل ۱ را ببینید). رابطه منتهی نیرو (با توجه به شکل ۱) عبارت است از

$$N_{xx} = \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx} H dz \quad (23)$$

که تابع H عبارت است از

$$H(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < l \\ 0; & x \leq 0, x \geq l \end{cases} \quad (24)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۲۳)

$$N_{xx} = \int_{z_3}^{z_2} \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) R dz \quad (25)$$

با در نظر گرفتن مقدار واحد برای R و پس از انتگرال‌گیری

$$N_{xx} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (26)$$

که ضرایب A_1 و A_2 عبارتند از

$$A_1 = \int_{z_3}^{z_2} \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) h_s, A_2 = \int_{z_3}^{z_2} \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \frac{(z_2^2 - z_3^2)}{2} \quad (27)$$

به این ترتیب اثر نیروی به‌دست‌آمده برای لایه پیزوالکتریک (رابطه (۲۶)) در سمت چپ معادله حاکم بر تیر اضافه می‌گردد.

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & \epsilon_{22} & c_{13} \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

به دلیل تقارن در ماده، تنها ده ثابت مستقل وجود دارد که پنج ثابت مستقل مربوط به تانسور الاستیسیته ماده پیزوالکتریک، سه ثابت برای تانسور کرنش پیزوالکتریک و دو ثابت برای تانسور دی‌الکتریک است. برای لایه پیزوالکتریک به‌کاررفته در تیر، روابط پیزوالکتریک به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} - e_{31} E_z \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

به دلیل نازکی لایه پیزوالکتریک می‌توان از جابه‌جایی الکتریکی در دو راستای x و y صرف‌نظر نمود و رابطه (۱۶) برای لایه پیزوالکتریک به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد

$$D_z = \epsilon_{33} E_z - e_{31} \epsilon_{xx} \quad (17)$$

چون شارژ الکتریکی خارجی در حسگر وجود ندارد بنابراین، جابه‌جایی الکتریکی در راستای z در حسگر صفر است. بنابراین

$$D_z = \epsilon_{33} E_z - e_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (18)$$

که $\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ و E_z عبارت است از

$$E_z = \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (19)$$

با قراردادن رابطه (۱۹) در رابطه (۱۵)، تنش در حسگر با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\sigma_{xx} = \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (20)$$

در شکل ۱، هندسه تیر متشکل از لایه پیزوالکتریک نشان داده شده‌است. کار اصلی حسگر تبدیل تغییر شکل مکانیکی به ولتاژ می‌باشد.

برای سیلیکون نوع p کمیت ثابت π_{44} از نظر مقدار دو برابر مقادیر π_{11} یا π_{12} می‌باشد. مولفه π_{66} (که از نظر بزرگی برابر با π_{44} می‌باشد) مولفه تنش برشی σ_{xy} را با مولفه غیرقطری $\Delta\rho_{xy}$ از ماتریس تغییر مقاومت ارتباط می‌دهد. همچنین، ارتباط $\Delta\rho_{xy}$ و مقدار جریان در جهت x به یک میدان الکتریکی القایی در جهت y و بالعکس را برقرار می‌سازد. در این پژوهش، یک ولتاژ پایه‌ای برابر 1 V در راستای بردار جهت در سلول واحد در جهت (100) به قطعه پیزومقاومت اعمال می‌گردد. تنش‌های برشی که ناشی از تغییر شکل تیر در اثر اعمال شتاب به آن می‌باشد در پیزومقاومت به‌وجود می‌آیند. از طریق اثر پیزومقاومتی، این تنش‌های برشی باعث ایجاد یک میدان الکتریکی یا گرادیان پتانسیل عرضی در جهت جریان در جهت (010) در قطعه می‌گردند. واسط پیزومقاومت در نرم‌افزار Comsol روابط (30) و (31) را همراه با معادلات ساختار مکانیکی حل می‌کند. در این مدل از واسط (ماژول) Piezoresistance Boundry Currents برای حل معادلات سازه استفاده شده و همزمان اقدام به حل معادلات الکتریکی حاکم بر لایه نازک در مدل هندسی می‌گردد. تغییر مقاومت در پیزومقاومت به دلیل کرنش‌های ایجاد شده در سطح تیر است. بیشینه تنش و کرنش در قسمت‌های انتهایی تیر که محل اتصال تیر به بدنه صلب است رخ می‌دهد. بنابراین، مناسب‌ترین محل برای قرارگیری پیزومقاومت، جهت رسیدن به بیشترین حد حساسیت، همین ناحیه است. میزان کرنش به‌طور مستقیم تابع مدول یانگ سیلیکون در این راستا است اما تنش مستقل از مدول یانگ سیلیکون و تنها تابع بار گسترده اعمالی به تیر ناشی از اختلاف نیروی سطحی در بالا و پایین تیر است. بنابراین، مدول یانگ سیلیکون در این راستا به صورت مستقل تاثیری بر تغییرات مقاومت پیزومقاومت و حساسیت حسگر ندارد و تنها به‌عنوان عاملی محدودکننده برای پایداری مکانیکی سازه و محدوده نیروی سطحی مجاز قبل از ورود تیر به ناحیه پلاستیک تاثیر دارد.

۳-۳- اثر وجود لایه خازنی در معادله حاکم بر نانوحسگر یکسر گیردار

برای نانوتیر یکسر گیردار با مدل تیراویلر-برنولی به جرم m تحت شتاب ثابت a (نیروی $F=ma$) در راستای محور z تنش بیشینه در جهت x در انتهای تیر عبارت است از

۳-۲- اثر لایه پیزومقاومت بر معادله حاکم بر نانوحسگر یکسر گیردار

هدایت الکتریکی ماده پیزومقاومت در نظر گرفته شده در ساختار تیر نانوحسگر وقتی که یک نیروی مکانیکی به تیر وارد می‌شود تغییر می‌کند (اثر پیزومقاومتی). در نیمه‌هادی‌ها از این خاصیت برای اندازه‌گیری شتاب وارد بر نانوحسگر استفاده می‌شود. روابط بین میدان الکتریکی E و چگالی جریان J در پیزومقاومت به صورت زیر است

$$E = \rho' J + \Delta\rho' J \quad (28)$$

در رابطه بالا، ρ' مقاومت ویژه و $\Delta\rho'$ تغییر ایجاد شده در مقاومت ویژه می‌باشند که در حالت کلی هر دو، تانسورهای (ماتریس) مرتبه دوم می‌باشند. با اعمال تنش σ تغییر در مقدار مقاومت با معادله ساختاری زیر بیان می‌شود

$$\Delta\rho' = \Pi \cdot \sigma, \quad \frac{\Delta\rho'}{\rho'} = \frac{\Delta R}{R} = \pi_i \sigma_i + \pi_i \sigma_i \quad (29)$$

که Π تانسور (ماتریس) پیزومقاومت و یک خاصیت از ماده است (در سیستم SI بر حسب $Pa^{-1}\Omega m$). با استفاده از روش نمادگذاری وویگت (Voigt) در نرم‌افزار Comsol رابطه (29) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \Delta\rho_{xx} \\ \Delta\rho_{yy} \\ \Delta\rho_{zz} \\ \Delta\rho_{yz} \\ \Delta\rho_{xz} \\ \Delta\rho_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{43} & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{53} & \Pi_{54} & \Pi_{55} & \Pi_{56} \\ \Pi_{61} & \Pi_{62} & \Pi_{63} & \Pi_{64} & \Pi_{65} & \Pi_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (30)$$

و رابطه (28) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{yx} & \rho_{yz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\rho_{xx} & \Delta\rho_{xy} & \Delta\rho_{xz} \\ \Delta\rho_{xy} & \Delta\rho_{yy} & \Delta\rho_{yz} \\ \Delta\rho_{xz} & \Delta\rho_{yz} & \Delta\rho_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

از آنجایی که سیلیکون دارای ساختار مکعبی و متقارن است در نتیجه ماتریس Π تنها بر اساس سه ثابت مستقل

π_{11} ، π_{12} و π_{44} به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۱]

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} \quad (32)$$

۳-۴- ولتاژ Pull-in نانوحسگر

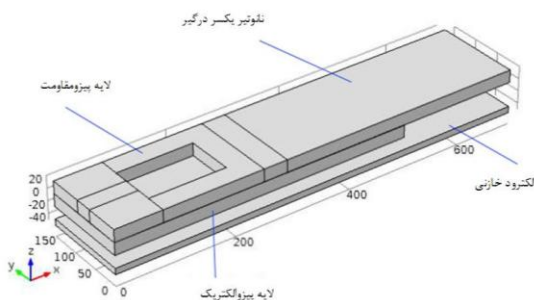
ولتاژ Pull-in یکی از پارامترهای اساسی در حسگرها می‌باشد که در ساختارهای خازنی با فناوری میکرو و نانوالکترومکانیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با اعمال ولتاژ به دو صفحه موازی خازن یک نیروی الکترواستاتیکی ایجاد می‌شود که باعث جابه‌جایی صفحه متحرک بالایی به سمت صفحه ثابت پایینی می‌گردد. در صورتی که ولتاژ اعمالی افزایش پیدا کند به طوری که دو صفحه در اثر کشش نیروی الکترواستاتیکی به یکدیگر متصل شوند پدیده فروپاشی رخ می‌دهد. این ولتاژ را ولتاژ بحرانی یا ولتاژ Pull-in می‌نامند که از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۳]

$$V_{pl} = \sqrt{3.65g^3 EI / \epsilon_0 WL^4} \quad (40)$$

به‌عنوان نمونه، برای نانوتیر یکسر گیردار به ابعاد $20 \times 100 \times 1000$ نانومتر و $E = 76$ GPa مقدار ولتاژ پولین $2/5$ ولت محاسبه می‌گردد.

۳-۵- طراحی نانوحسگر شتاب‌سنج چندگانه

این حسگر شامل یک نانوتیر یکسر گیردار از جنس سیلیکون می‌باشد که با خمش آن در اثر اعمال شتاب و تاثیر این خمش بر اجزا پیزوالکتریکی، پیزومقاومتی و خازنی حسگر، مقدار شتاب وارد بر آن اندازه‌گیری می‌شود. در شکل ۲، اجزای لایه‌ای نانوحسگر شتاب‌سنج چندگانه یکسر گیردار مدل‌سازی شده در محیط نرم‌افزار Comsol نشان داده شده‌است. لایه پیزوالکتریک به نانوتیر یکسر گیردار متصل گردیده‌است. همچنین، صفحه موازی با تیر جهت استفاده از خاصیت خازنی می‌باشد. در بخش بالایی نانوتیر یکسر گیردار لایه پیزومقاومتی قرار گرفته‌است. ابعاد قطعات مختلف نانوحسگر در جدول ۱ ارائه شده‌است.



شکل (۲): لایه‌چینی در نانوحسگر مدل‌سازی شده.

$$\sigma_y = \frac{Mc}{I} = \frac{w_0 L}{bt} = -\rho L a = ka \quad (33)$$

که در آن $w_0 = ma/L$ مقدار نیرو بر واحد طول در راستای z است که در این رابطه $k = 3\rho L^4 / 2Et^2$ مقداری ثابت است و c فاصله از تار خنثی تیر می‌باشد. در این مدل تیر یکسر گیردار به‌عنوان یکی از الکترودها و صفحه‌ای موازی با تیر به عنوان الکتروود ثابت در نظر گرفته شده‌است. مقدار ظرفیت مرده C_0 (زمانی که شتاب تیر صفر است) برای نانوتیر یکسر گیردار و الکتروود ثابت عبارت است از

$$C_0 = \frac{\epsilon A}{d_0} \quad (34)$$

که در آن، d_0 فاصله بین دو الکتروود می‌باشد. ظرفیت خازن در اثر اعمال شتاب به صورت زیر است

$$C_0' = \frac{\epsilon A}{(d_0 - w)} \quad (35)$$

و تغییرات ظرفیت عبارت است از

$$\Delta C = C_0' - C_0 = \frac{\epsilon A}{(d_0 - w)} - \frac{\epsilon A}{d_0} \quad (36)$$

برای تیر یکسر گیردار ظرفیت مرده و ظرفیت حاصل از اعمال شتاب بسیار ناچیز بوده که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد [۵-۱]. بنابراین، لازم است ولتاژ محرکی برای اندازه‌گیری ظرفیت به آن اعمال شود که باعث به وجود آمدن نیروی الکترواستاتیک طبق رابطه (۲) می‌گردد. معادله حاکم بر تیر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\epsilon A}{2(d_0 - w)^2} V^2 + ma - kw = 0 \quad (37)$$

برای بی‌بعد کردن معادله بالا با استفاده از

$$\tilde{w} = \frac{w}{d_0} \text{ and } F_e = \frac{\epsilon A}{2(d_0 - w)^2} V^2 \quad (38)$$

رابطه (۳۷) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد

$$\frac{F_e}{kd_0(1 - \tilde{w})^2} + \frac{ma}{kd_0} - \tilde{w} = 0 \quad (39)$$

رابطه (۳۹) رفتار نانوتیر یکسر گیردار تحت ترکیب نیروهای الکترواستاتیک و نیروی خارجی را نشان می‌دهد. معادله حاکم بر حرکت با افزوده شدن نیروهای لایه پیزوالکتریک به صورت روابط (۲۶) و همچنین تاثیر نیروی حاصل از لایه پیزومقاومت در نرم‌افزار Comsol شبیه‌سازی ریاضی و تحلیل می‌گردد.

جدول (۳): مشخصات مواد مورد استفاده در نانوحسگر.

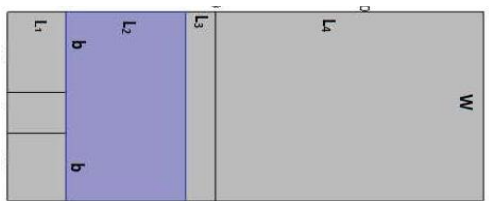
نام ماده	چگالی ρ (kg/m ³)	نسبت پواسون ν	مدول یانگ E (GPa)
p-Silicon	۲۳۳۰	۰/۲۲	۱۶۰
n-Silicon	۲۳۳۰	۰/۲۲	۱۶۰
Iron	۷۸۷۰	۰/۲۹	۲۰۰
Zinc oxide	۷۵۰۰	۰/۴۹	۱۳۰

پیزومقاومت نانوتیر پیزوالکتریک از جنس سیلیکون نوع p بوده و لایه پیزومقاومت و اتصالات با سیلیکون نوع n دوپ شده‌اند. در جدول ۴، مقادیر مدول یانگ و مدول برشی ماده سیلیکون در راستاهای مختلف اندیس میلر ارائه شده‌است.

در شکل ۴، چیدمان هندسه لایه پیزومقاومت که در جدول ۱ آورده شده نشان داده شده‌اند.

جدول (۴): مشخصات ماده لایه پیزومقاومت سیلیکون تک کریستال.

مدول یانگ E (GPa)	مدول برشی G (GPa)	مشخصات ماده
۱۲۹/۵	۷۹	
۱۶۸	۶۱/۷	
۱۸۶/۵	۵۷/۵	



شکل (۴): هندسه لایه پیزومقاومت

ابعاد لایه پیزومقاومت مدل‌سازی شده در جدول ۵ ارائه شده‌است.

جدول (۵): ابعاد لایه پیزومقاومت سیلیکون تک کریستال

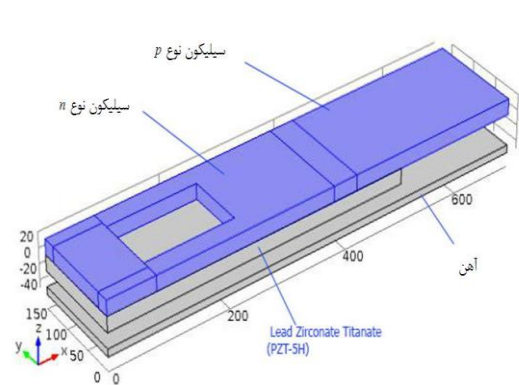
ابعاد (nm)	L_1	L_2	L_3	L_4	W	b	h
	۱۲۰	۲۲۰	۶۰	۱۲۰	۱۵۰	۴۰	۲۰

جدول (۱): ابعاد تیر و لایه‌های به کاررفته در نانوحسگر

شتاب‌سنج چندگانه یکسر گیردار.

ابعاد (ضخامت×عرض×طول) لایه‌های (پیچ‌ها) نانوحسگر برحسب nm			
نانوتیر یکسر گیردار	لایه پیزومقاومت	لایه پیزوالکتریک	لایه الکترو د
۷۰۰×۱۵۰×۲۰	۲۲۰×۱۵۰×۲۰	۲۵۰×۱۵۰×۲۰	۷۰۰×۱۵۰×۱۰
الکترو د پیزوالکتریک	الکترو د زمین	حجم هوای پیرامون نانوحسگر	
۲۵۰×۱۵۰×۱۰	۷۰۰×۱۵۰×۱۰	۷۰۰×۲۰۰×۱۸۰	

در شکل ۳، چیدمان مواد اجزای مختلف در مدل‌سازی نانوحسگر در نرم‌افزار Comsol نشان داده شده‌است.



شکل (۳): چیدمان مواد در لایه‌های مختلف نانوحسگر مدل‌سازی شده

مشخصات خواص فیزیکی لایه پیزوالکتریک از ماده Zinc Oxide (که معادل با خواص ماده پیزوالکتریک (Lead Zirconate Titanate (PZT-5H) می‌باشد در جدول ۲ ارائه شده‌است.

جدول (۲): خواص فیزیکی لایه پیزوالکتریک [۱۴].

ماده پیزوالکتریک	e_{31} (C/m ²)	C_{11} (GPa)	ϵ_{33} (C/v.m)
Zinc Oxide	-۶/۵	۱۲۶	۱/۳۲×۱۰ ^{-۸}

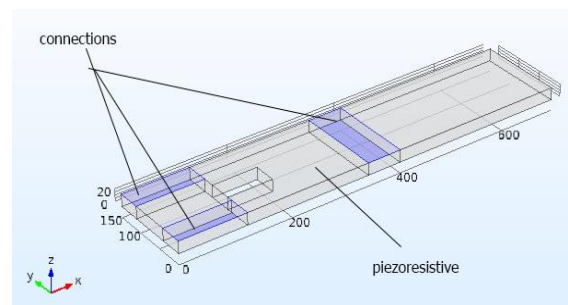
در جدول ۳، خواص مکانیکی مواد مورد استفاده در مدل ارائه شده‌است.

نانوشتاب‌سنج یکسر گیردار پیزومقاومتی- خازنی دارای ضخامت یکسان با پیزومقاومت و دارای چگالی $1.45 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ هستند. اتصالات الکتریکی به منظور اعمال ولتاژ و اندازه‌گیری الکتریکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. هرچند برای حذف کامل اثر سطوح اتصالات می‌باید ضخامت ناحیه مربوط به سیلیون نوع p این مناطق از ضخامت ناحیه پیزومقاومت بیشتر باشد ولی به دلیل تاثیر ناچیز در نتیجه نهایی، از ضخامت یکسان 333 nm استفاده شده است [۱۲]. لازم به ذکر است که شناسایی عوامل ایجادکننده خطای بایاس در خروجی ولتاژ حسگر برای تنظیم (کالیبره) نانوحسگرها مهم می‌باشند. شناسایی حساسیت در کارکرد، تنظیم و عوامل ایجاد اختلال سیگنال در حسگرها در آزمایشگاه‌ها به کمک تجهیزات سخت‌افزاری و نرم‌افزاری امکان‌پذیر می‌باشد. در پژوهش کنونی که ماهیت طراحی دارد ساخت نانوحسگر و تست تجربی آن به صورت عملی مدنظر نبوده است. به‌طور کلی و به‌عنوان نمونه، در حسگرهای پیزومقاومتی سه منبع نویز شامل اختلال سیگنال جانسون، هوگ و ترمومکانیکی در دمای مورد نظر برای محوره‌های کاری x ، y و z حسگر محاسبه شده و ولتاژ اختلال سیگنال کل محاسبه شده برای محوره‌های کاری مذکور محاسبه می‌گردند. پارامتر تفکیک‌پذیری کمترین شتاب قابل تشخیص توسط نانوحسگر شتاب‌سنج بوده و مقدار آن از تقسیم ولتاژ اختلال کل در هر محور کاری بر حساسیت خالص (بدون تقویت) همان محور به دست می‌آید. لازم به ذکر است که در حالتی که حسگر از نظر هندسی و پیکربندی درست طراحی شده باشد مقادیر به دست آمده از آزمایش با مقادیر محاسبه شده از روابط تحلیلی و یا شبیه‌سازی عددی مطابقت داشته و تفاوت بسیار پایینی را نشان خواهند داد. به‌عنوان نمونه، مقایسه نتایج حاصل از خروجی حساسیت میکرو/نانو پیزومقاومت‌ها نشان می‌دهد که افزایش حساسیت اسمی حسگر تا ۳۰ برابر نیز امکان‌پذیر است. از سوی دیگر، در ناوپیزومقاومت‌ها به دلیل تمرکز تنش (برای مثال عرض آن ۱۰ برابر از پیزومقاومت‌های مرسوم کوچکتر است) تنش معادل تا ۴۷٪ بیشتر از میکرو حسگرها در شتاب‌های کمتر از 250 g است [۱۴].

۴- تحلیل نتایج

در این بخش، ابتدا به صحت‌سنجی نتایج و سپس به بحث و بررسی نتایج شبیه‌سازی نانوحسگر پرداخته شده است.

در شکل ۵، نمایی از پیزومقاومت نانوتیر یکسر گیردار مدل‌سازی شده همراه با اجزای آن نشان داده شده است.



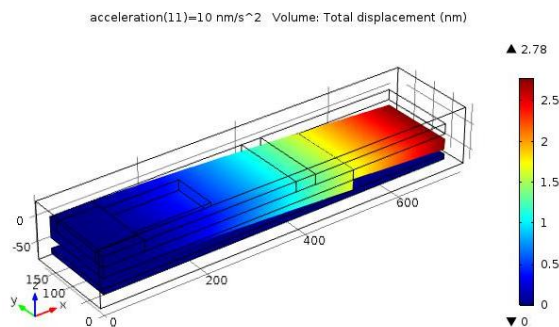
شکل (۵): نواحی مرزی در اتصالات اجزای مجموعه پیزومقاومتی در نانوتیر یکسر گیردار مدل‌سازی شده.

فرض شده که پیزومقاومت دارای توزیع یکنواخت دوپ‌کننده‌ها به میزان $1.5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ است و ضخامت آن برابر با 333 nm است. در قسمت‌های اتصال الکتریکی از دوپ سنگین 10^{23} cm^{-3} استفاده شده است. لبه‌های تیر در راستای (۱۰۰) قرار گرفته‌اند. مدول یانگ سیلیکون در این جهت 130 GPa فرض شده است. پیزومقاومت نیز در جهت (۱۰۰) قرار گرفته است. برای افزایش حساسیت حسگر از طریق افزایش تنش و کرنش‌های حاصل از اعمال شتاب، در انتهای تیر حفره‌ای با ابعاد $100 \times 45 \times 20$ نانومتر ایجاد شده است (شکل ۲ و شکل ۵ را ببینید). در این مدل‌سازی از واسط‌های نرم‌افزار Cmsol شامل Solid mechanic (solid) برای تعریف نانوتیر یکسر گیردار و شرایط مرزی آن، فیزیک Electrostatic (es) برای تحلیل لایه پیزوالکتریک قرار گرفته در زیر تیر، فیزیک Electromechanics (emi) برای تحلیل خازنی نانوتیر یکسر گیردار، فیزیک پیزومقاومت Piezoresistivity Boundary Coefficient from PDE (c) (pzrb)، فیزیک Currents (pzrb)، برای وارد نمودن معادله حاکم بر تیر با در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در هنگام حل معادلات حاکم بر رفتار نانوحسگر شتاب‌سنج چندگانه در محیط نرم‌افزار Cmsol تمامی این فیزیک‌ها با یکدیگر کوپل می‌گردند.

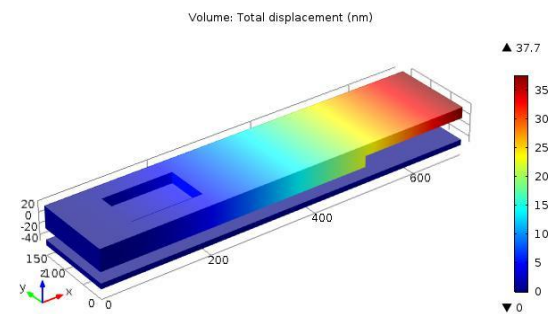
برای بررسی اثر پیزومقاومتی مربوط به ماده نانوحسگر یکسر گیردار در محیط نرم‌افزار Cmsol سیلیکون نوع n با جهت کریستال (۱۱۰) فرض شده است. پیزومقاومت‌های مدل‌سازی شده از نوع p می‌باشند که غلظت ناخالصی آنها برابر $1.32 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ فرض شده است. اتصالات داخلی

۲-۴- تاثیر نیروهای بین مولکولی بر خمش نانوحسگر

در شکل ۷-الف و ۷-ب، توزیع سه‌بعدی تغییر شکل در نانوحسگر شتاب‌سنج یکسر گیردار تحت اثر شتاب اعمالی برابر با 10 nm/s^2 به ترتیب بدون در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی و با در نظر گرفتن این نیروها در مدل شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار Comsol نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌گردد که در حالتی که نیروهای بین مولکولی (کازیمیر/واندروالس) در نظر گرفته نشوند (شکل الف) بیشینه خیز تیر نانوحسگر یکسر گیردار برابر با $2/78 \text{ nm}$ بوده و در حالتی که نیروهای بین مولکولی در نظر گرفته شوند (شکل ب) به مقدار $37/7 \text{ nm}$ افزایش یافته‌است.



(الف)



(ب)

شکل (۷): توزیع تغییر شکل در نانوحسگر یکسر درگیر با استفاده از نرم‌افزار Comsol، (الف)- بدون در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی در مدل و (ب)- با در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی در مدل

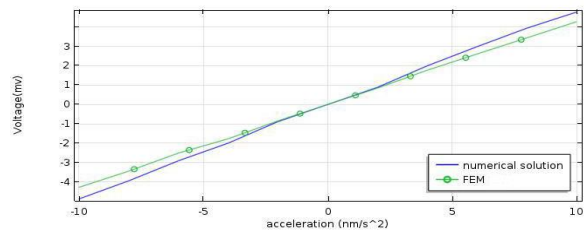
۳-۴- تغییرات اختلاف پتانسیل الکتریکی در لایه

پیزوالکتریک

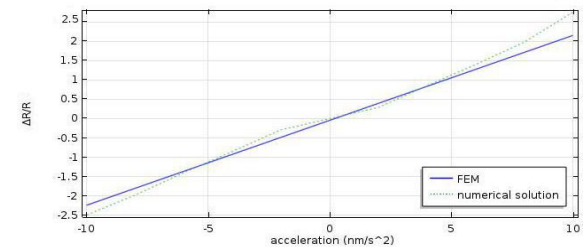
در شکل ۸، تغییرات اختلاف پتانسیل (ΔV) در اثر اعمال شتاب بر لایه‌های نانوحسگر در دامنه شتاب $10 \text{ ng} \pm$ نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود که رابطه‌ای خطی بین

۱-۴- صحت‌سنجی نتایج

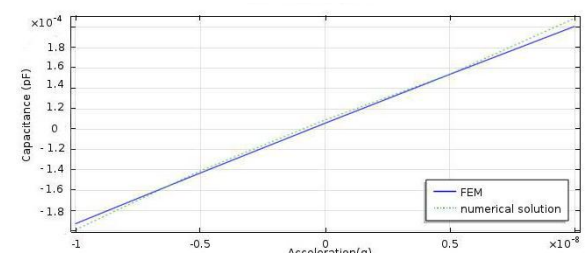
از آنجایی که مرجع مشخصی جهت اعتبارسنجی نتایج نانوحسگر شتاب‌سنج چندگانه در دسترس نمی‌باشد برای اعتبارسنجی نتایج علاوه بر تحلیل با نرم‌افزار المان محدود Comsol، از روش حل عددی استفاده گردیده‌است. نمودار تغییرات اختلاف پتانسیل بر حسب شتاب، تغییرات مقاومت بر حسب شتاب و تغییرات ظرفیت بر حسب شتاب با استفاده از نرم‌افزار Comsol و روش حل عددی معادلات حاکم با برنامه ریاضی MAPLE به ترتیب در شکل ۶-الف، ۶-ب و ۶-پ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نرم‌افزار المان محدود Comsol و روش حل عددی ریاضی تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند. بنابراین، می‌توان به نتایج حاصل از طراحی نانوحسگر شتاب‌سنج اطمینان داشت.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (۶): نتایج در نرم‌افزار Comsol و حل تحلیلی

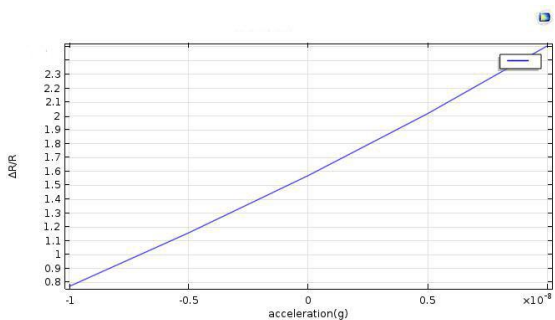
(الف)- تغییرات ولتاژ بر حسب شتاب،

(ب)- تغییرات مقاومت بر حسب شتاب و

(پ)- تغییرات ظرفیت خازن بر حسب شتاب

۴-۴- تغییرات مقاومت بی‌بعد شده $\Delta R/R$

در شکل ۱۱، تغییرات مقاومت بی‌بعد شده $\Delta R/R$ برحسب شتاب در لایه پیزومقاومت در دامنه شتاب $\pm 10 \text{ ng}$ نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود که حساسیت تیر در بیشترین شتاب 10 ng برابر با مقدار 2 mV می‌باشد.



شکل (۱۱): نمودار تغییرات مقاومت $\Delta R/R$ برحسب شتاب.

رابطه مقاومت نسبی در قسمت پیزومقاومت نانوحسگر به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{\Delta R}{R} = \pi \int_0^{L_1-L_2} \sigma \cdot \frac{dx}{L_1-L_2} = t\pi E \int_0^{L_1-L_2} \frac{d^2w}{dx^2} \cdot \frac{dx}{L_1-L_2} \quad (41)$$

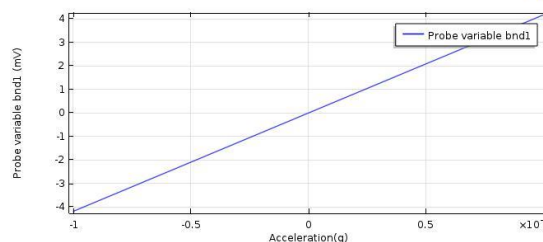
که L_1 و L_2 به ترتیب طول تیر و طول لایه پیزومقاومت از انتهای گیردار تیر (در امتداد طول تیر) می‌باشد (شکل ۴ را ببینید)، σ تنش سطحی در راستای طول و π ثابت پیزومقاومت در جهت (۱۰۰) است و مقدار آن برابر 9.2×10^{-9} می‌باشد و $t = h/3$ ضخامت لایه پیزومقاومت در مدل می‌باشد. برای مقایسه نتایج به دست آمده از نرم‌افزار Comsol با رابطه (۴۱)، مشخصات هندسی تیر با لایه پیزومقاومت مطابق جدول ۶ در نظر گرفته می‌شود. حساسیت تیر از رابطه $\frac{\Delta R}{R} = 1.484 \Delta a$ به دست می‌آید.

جدول (۶): مشخصات هندسی تیر با لایه پیزومقاومت.

L_1 (nm)	L_2 (nm)	w (nm)	h (nm)	t (nm)	b (nm)
۷۰۰	۶۲۰	۱۵۰	۲۰	۶۱۶۶	۴۰

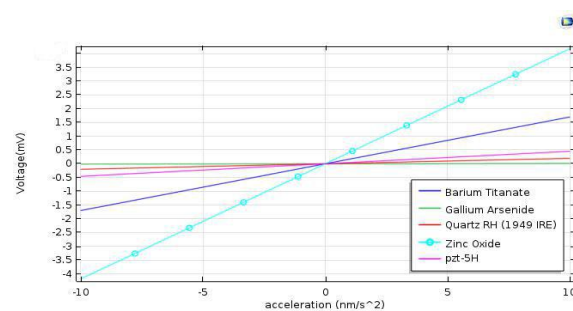
در شکل ۱۲، مقایسه بین نتیجه بدست آمده از رابطه (۴۱) با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار Comsol نشان داده شده‌است. مشاهده می‌گردد که بیشترین اختلافی در حدود ۲۰ درصد بین این دو منحنی وجود دارد که می‌توان آن را

شتاب اعمالی و ولتاژ قطعه پیزوالکتریک وجود دارد. همچنین، حساسیت نانوحسگر 0.45 mV/ng می‌باشد.



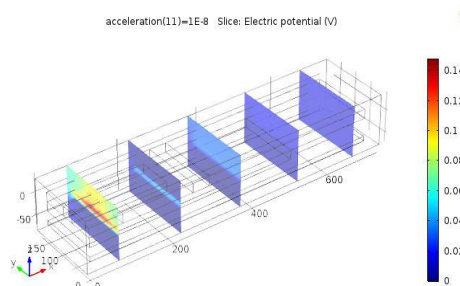
شکل (۸): تغییرات اختلاف پتانسیل الکتریکی برحسب شتاب.

در شکل ۹، مقایسه بین اختلاف پتانسیل الکتریکی ایجاد شده برحسب شتاب اعمالی در چند نوع ماده پیزوالکتریک در مدل نانوحسگر نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌گردد که بیشترین حساسیت مربوط به ماده پیزوالکتریک zinc oxide می‌باشد.



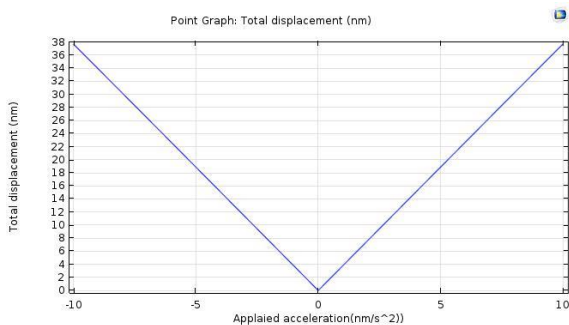
شکل (۹): تغییرات پتانسیل الکتریکی ΔV برحسب شتاب.

در شکل ۱۰، نحوه توزیع پتانسیل الکتریکی در مقاطع مختلف در طول نانوحسگر شتاب‌سنج یکسر گیردار نشان داده شده‌است. مشاهده می‌گردد که مقطع نزدیک به تکیه‌گاه گیردار دارای توزیع پتانسیل بیشینه‌تری نسبت به مقاطع دورتر از تکیه‌گاه است.



شکل (۱۰): تغییرات پتانسیل الکتریکی در مقاطع طولی مختلف نانوحسگر.

مقدار جابه‌جایی در اثر اعمال شتاب ۵ ng برابر ۱۹ nm می‌باشد. بنابراین، لازم است که ملاحظات مربوط به این مقدار جابه‌جایی در طراحی حسگر که برای محدوده 5 nm/s^2 کار می‌کند لحاظ گردد. مشاهده می‌شود که با افزایش شتاب به سمت مقادیر مثبت، جابه‌جایی تیر نیز به مقدار مثبت افزایش می‌یابد. بیشینه شتاب قابل اندازه‌گیری در مکانی است که بیشینه جابه‌جایی اتفاق می‌افتد. بیشینه مقدار جابه‌جایی تیر در شتاب ۱۰ ng برابر با ۳۸ nm می‌باشد (جدول ۸ را ببینید)



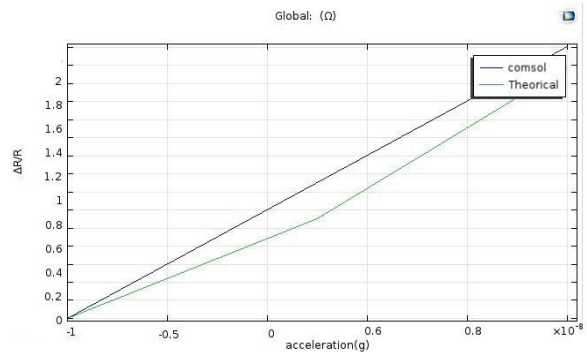
شکل (۱۴): تغییرات جابه‌جایی نانوتیر یکسر درگیر.

مقدار جابه‌جایی در هر نقطه مشخص از نانوتیر یکسر گیردار را می‌توان برحسب شتاب‌های مختلف به‌دست آورد. به‌عنوان نمونه در جدول ۸ مقادیر جابه‌جایی در یکی از نقاط انتهایی سر آزاد تیر یکسر گیردار بر اساس شتاب واردشده بر نانوحسگر و مقدار میانگین جابه‌جایی برحسب شتاب اعمالی در نقطه میانی در طول تیر بر روی سطح میانی نانوحسگر یکسر گیردار ارائه شده‌است.

جدول (۸): خیز نانوتیر یکسر گیردار در اثر شتاب در نقطه انتهایی و نقطه میانی طولی بر روی سطح میانی آن.

خیز برحسب nm		شتاب برحسب nm/s^2
نقطه انتهایی تیر	نقطه میانی تیر	
۳۷/۶۹۲۷	۲۲/۶۶۲۶	-۱۰
۳۰/۱۷۵۶	۱۸/۱۴۰۹	-۸
۲۲/۶۴۴۶	۱۳/۶۱۲۰	-۶
۱۵/۱۰۲۸	۹/۰۷۷۷	-۴
۷/۵۵۳۵	۴/۵۳۹۷	-۲
۰	۰	۰
۷/۵۵۴۳	۴/۵۳۹۷	۲
۱۵/۱۰۶۲	۹/۰۷۷۵	۴
۲۲/۶۵۲۴	۱۳/۶۱۱۶	۶
۳۰/۱۸۹۶	۱۸/۱۴۰۳	۸
۳۷/۷۱۴۵	۲۲/۶۱۱۶	۱۰

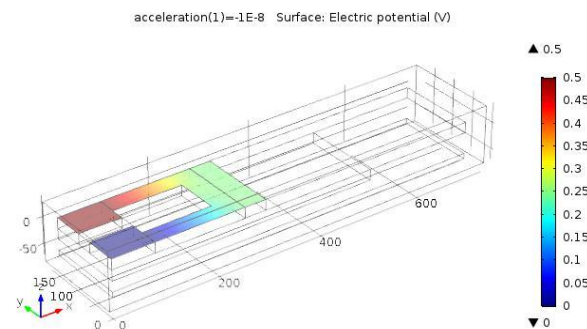
ناشی از ساده‌سازی در حل معادلات (روش نظری) و نیز خطای تقریبی در روش المان محدود نسبت به حل نظری دانست.



شکل (۱۲): تغییرات مقاومت بی‌بعد شده برحسب شتاب با استفاده از نرم‌افزار Comsol و حل نظری.

۴-۵- توزیع اختلاف پتانسیل الکتریکی در پیزومقاومت

تغییرات توزیع ولتاژ در نواحی پیزومقاومت و اتصالات آن در شکل ۱۳، نشان داده شده‌است. مشاهده می‌گردد که ولتاژ در طول پیزومقاومت افت چندانی نداشته و ولتاژ نزدیک ولتاژ ورودی 0.5 V می‌باشد.

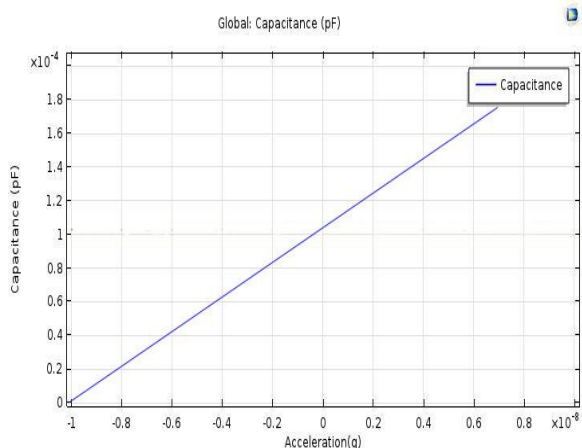


شکل (۱۳): توزیع ولتاژ در بخش پیزومقاومت با ایجاد تمرکز تنش.

۴-۶- تغییرات جابه‌جایی برحسب شتاب

در شکل ۱۴، تغییرات جابه‌جایی انتهایی پیزومقاومت (نقطه میانی در سطح مقطع آن) برحسب شتاب اعمالی شان داده شده‌است. با افزایش شتاب اعمالی مقدار جابه‌جایی به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. به کمک این نمودار می‌توان مقدار بیشینه جابه‌جایی ناشی از شتاب اعمالی را به‌دست آورد و در طراحی حسگر مورد استفاده قرار داد. به‌عنوان نمونه،

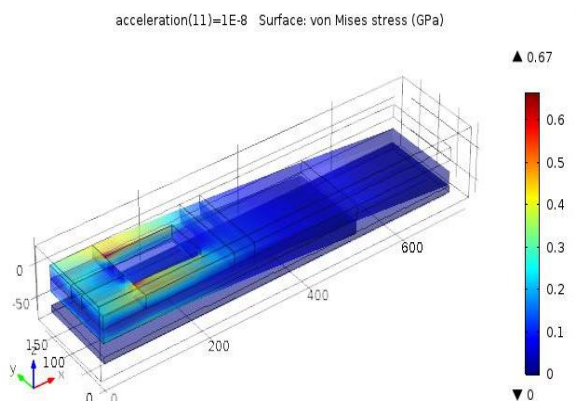
شتاب به صورت خطی افزایش می‌یابد. بیشترین تغییرات ظرفیت در این حسگر برابر با 1.8×10^{-4} pF می‌باشد. شیب منحنی نشان‌دهنده حساسیت خازنی نانوحسگر می‌باشد که در این نانوحسگر حساسیت برابر با 9×10^{-4} pF/ng می‌باشد.



شکل (۱۷): تغییرات ظرفیت خازنی نانوحسگر بر حسب شتاب.

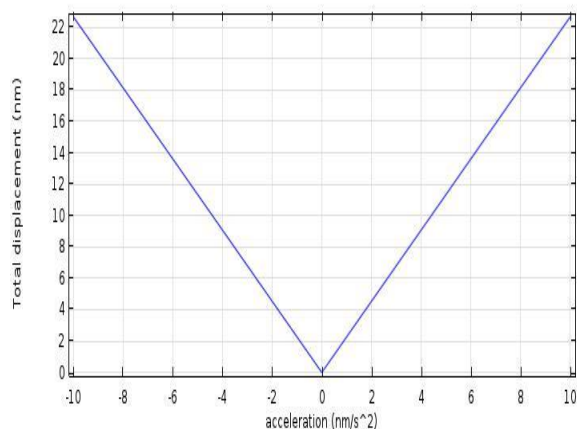
۴-۸- تحلیل تنش نانوحسگر یکسر گیردار

توزیع تنش فون‌مایز در لایه‌های مختلف نانوحسگر یکسر گیردار در شکل ۱۸ نشان داده شده‌است. با اعمال شتاب، بیشینه مقدار تنش وارد شده به تیر 0.6 GPa می‌باشد که با مقایسه با تنش تسلیم سیلیکون که 7 GPa می‌باشد نتیجه گرفته می‌شود که نانوتیر قادر به تحمل تنش‌های ناشی از شتاب‌های مختلف بدون ایجاد تغییر شکل‌های پلاستیک می‌باشد.



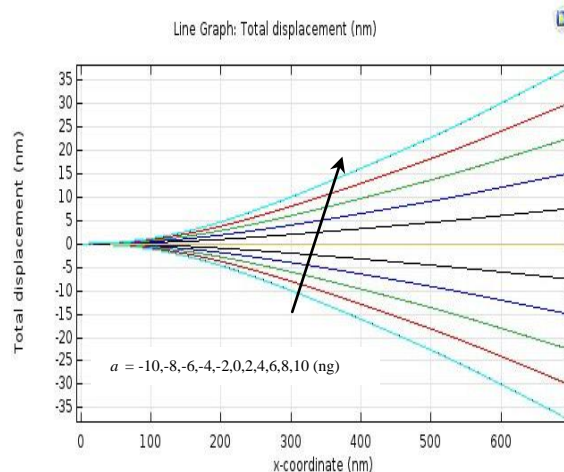
شکل (۱۸): توزیع تنش فون‌مایز در نانوتیر یکسر گیردار.

در شکل ۱۵، تغییرات مقدار میانگین جابه‌جایی نقطه میانی نانوتیر در لایه پیزومقاومت بر حسب شتاب اعمالی شان داده شده‌است.



شکل (۱۵): تغییرات میانگین جابه‌جایی در نقطه‌ای در وسط نانوتیر یکسر درگیر.

تغییرات جابه‌جایی در طول نانوتیر در شتاب‌های مختلف در نمودارهای شکل ۱۶ نشان داده شده‌است. با استفاده از این نمودار می‌توان جابه‌جایی تیر در هر نقطه از طول تیر در شتاب‌های مورد نظر را به دست آورد.



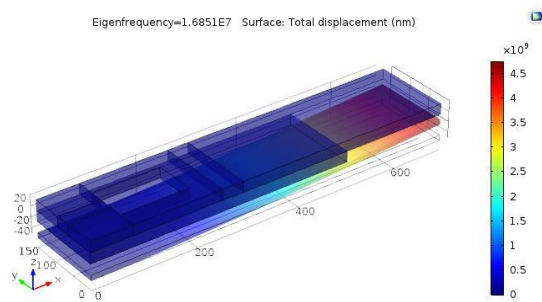
شکل (۱۶): تغییرات جابه‌جایی در نانوحسگر بر حسب فاصله از انتهای گیردار در شتاب‌های مختلف.

۴-۷- تغییرات ظرفیت خازنی نانوحسگر

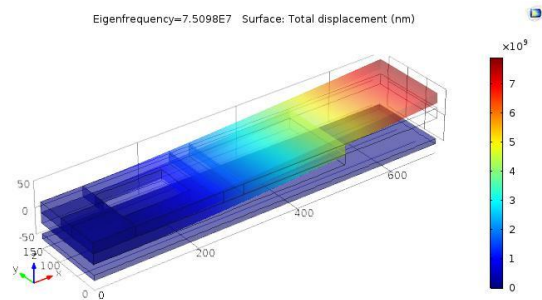
نمودار تغییرات ظرفیت خازن نانوحسگر بر حسب شتاب در شکل ۱۷ نشان داده شده‌است. ظرفیت خازن با افزایش

۹-۴- تحلیل خستگی نانوحسگر یکسر گیردار

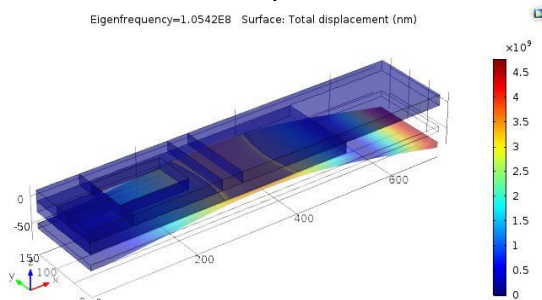
در شکل ۱۹، توزیع عمر در نانوحسگر نشان داده شده است. نتایج نشان دهنده آن است که این حسگر به طور کلی دارای عمر نامحدودی است. در تحلیل مذکور، نمودار $S-N$ برای سیلیکون در نظر گرفته شده بوده است. از آنجایی که تنش در قسمت‌های مختلف نانوتیر تغییر می‌کند پیش‌بینی عمر خستگی در نواحی مختلف متفاوت است ولی عمر خستگی نانوحسگر بر اساس نقاط دارای بیشینه تنش ارائه می‌شود.



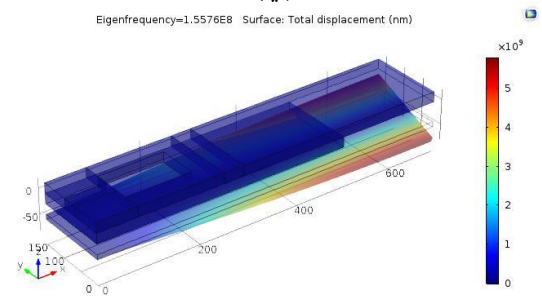
(الف)



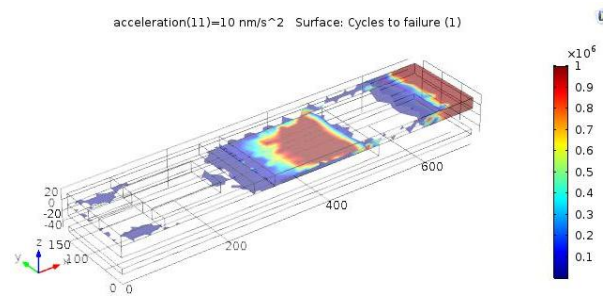
(ب)



(پ)



(ت)



شکل (۱۹): توزیع عمر خستگی در نانوحسگر یکسر گیردار.

۱۰-۴- شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی نانوحسگر

در صورتی که بارهای نوسانی به تیر وارد شود و فرکانس آن با فرکانس‌های طبیعی تیر برابر باشد حسگر دچار خرابی می‌گردد. برای بررسی این موضوع، با استفاده از نرم‌افزار Comsol شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی اول تا چهارم نانوحسگر در شکل ۲۰ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌گردد که نانوحسگر یکسر گیردار در مود اول در راستای z ، در مود دوم در راستای x دارای حرکت به سمت بالا و پایین، در مود سوم به صورت سینوسی در راستای z نوسان داشته و در مود چهارم در راستای y نوسان می‌کند.

لازم به ذکر است از آنجایی که شتاب مورد نظر اندازه‌گیری شده توسط حسگر در راستای محور z است و با توجه به رفتار پیچیده ارتعاشی سازه و مداخله مدهای فعال در پاسخ آن، برای استفاده از حسگر، لازم است که کمیت‌هایی مانند تفکیک پذیری و اختلال سیگنال در هر محور کاری x ، y و z و مقدار برآیند کل آنها محاسبه شده تا حساسیت نانوحسگر در شرایط حرکت‌های نوسانی مورد بررسی قرار گیرد.

شکل (۲۰): شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی نانوحسگر شتاب‌سنج، (الف) مود اول در فرکانس طبیعی ۱۶ MHz، (ب) مود دوم در فرکانس طبیعی ۷۵ MHz، (پ) مود سوم در فرکانس طبیعی ۱۰۵ MHz و (ت) مود چهارم در فرکانس طبیعی ۱۵۵ MHz.

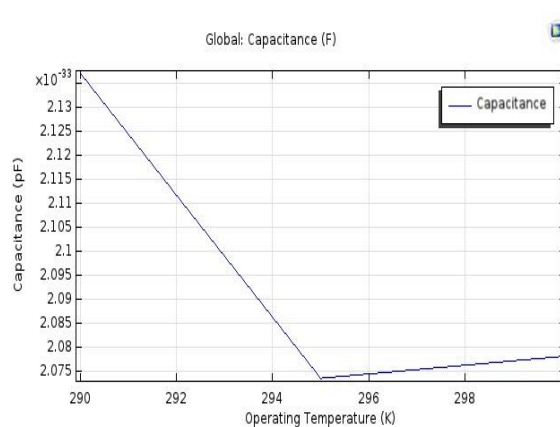
در شکل ۲۱، تاثیر تغییرات دما بر ظرفیت خازنی نانوحسگر نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که مقدار ظرفیت خازن با افزایش دما تا ۲۹۵ درجه سانتی‌گراد

۵- مشاهده می‌گردد که نانوتیر یکسر گیردار در مود اول در راستای z ، در مود دوم در راستای x حرکت بالا و پایین، در مود سوم به صورت سینوسی در راستای z نوسان داشته و در مود چهارم در راستای y نوسان می‌کند.

۶- منابع

1. Ramezani, A., Alasty, A., and Akbari, J. "Closed-Form Solutions of the Pull-in Instability in Nano-Cantilevers under Electrostatic and Intermolecular Surface Forces", International Journal of Solids and Structures, Vol. 44, No. 14-15, pp. 4925-4941, 2007.
2. Tadi Beni, Y., Koochi, A., and Abadyan, M. "Theoretical Study of the Effect of Casimir Force, Elastic Boundary Conditions and Size Dependency on the Pull-in Instability of Beam-type NEMS", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 43, No. 4, pp. 979-988, 2011.
3. Koka, A. and Sodano, H. A. "High-sensitivity Accelerometer Composed of Ultra-long Vertically Aligned Barium Titanate Nanowire Arrays", Nature Communications, Vol. 4, 2682, 2013.
4. Mehran, M., and Mohajezadeh, S. "High Sensitivity Nanostructure Incorporated Interdigital Silicon Based Capacitive Accelerometer", Microelectronics Journal, Vol. 46, No. 2, pp. 166-173, 2015.
5. Keivani, M., Khorsandi, J., Mokhtari, J., Kanani, A., Abadian, N., and Abadyan, M. "Pull-in Instability of Paddle-type and Double-sided NEMS Sensors under the Accelerating Force", Acta Astronautica, Vol. 119, No. 1, pp. 196-206, 2016.
6. Batra, R.C., Porfiri, M. and Spinello, D. "Effects of Casimir Force on Pull-in Instability in Micromembranes", EPL (Europhysics Letters), Vol. 77, No. 2, pp. 200-210, 2007.
7. Buks, E. and Roukes, M.L. "Stiction, Adhesion energy and the Casimir Effect in Micromechanical Systems", Physical Review B, Vol. 63, No. 3, pp. 330-402. 2001.
8. Koochi, A., Kazemi, A.S., Beni, Y.T., Yekrang, A., and Abadyan, M. "Theoretical Study of the Effect of Casimir Attraction on the Pull-in Behavior of Beam-type NEMS using Modified Adomian Method", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 43, No. 2, pp. 625-632, 2010.

کاهش یافته و پس از آن با شیب بسیار اندکی افزایش می‌یابد.



شکل (۲۱): تغییرات ظرفیت خازنی نانوحسگر برحسب دما.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، طراحی پیشنهادی برای یک نانوحسگر شتاب‌سنج پیزوالکتریک ترکیبی خازنی- مقاومتی مورد بررسی قرار گرفت. با فرض تیر اولر- برنولی یکسرگیردار یکسر آزاد و با در نظر گرفتن نیروهای الکترواستاتیک و واندروالس- کازیمیر، معادله حاکم بر رفتار خمشی نانوحسگر با استفاده از نرم‌افزار مالتی فیزیک Comsol تحلیل گردید. خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده عبارتند از:

۱- در حالی که نیروهای بین مولکولی کازیمیر/واندروالس در معادله حاکم بر نانوحسگر یکسرگیردار در نظر گرفته شوند بیشینه خیز آن بیشتر از حالتی است که نیروهای بین مولکولی کازیمیر/واندروالس در نظر گرفته نشوند.

۲- تحلیل نتایج شامل مقدار محاسبه شده برای تغییرات مقاومت $\Delta R/R$ ، تغییرات پتانسیل الکتریکی $\Delta V/V$ پیزوالکتریک و تغییرات ظرفیت خازنی $\Delta C/C$ برحسب شتاب نشان‌دهنده آن است که نانوحسگر در دامنه شتاب اعمالی $\pm 10 \text{ ng}$ دارای حساسیت بسیار بالایی بوده که نشان‌دهنده عملکرد مطلوب نانوحسگر طراحی شده می‌باشد.

۳- با اعمال شتاب، مقدار تنش بیشینه وارد شده به نانوتیر کمتر از تنش تسلیم حسگر می‌باشد و حسگر بدون ایجاد تغییر شکل‌های پلاستیک قادر به تحمل تنش‌های ناشی از شتاب‌های اعمالی می‌باشد.

۴- طراحی نانوحسگر با مدل ارائه شده ترکیبی دارای عمر خستگی بالایی می‌باشد.

12. Swami, A. and Agarwal, P. "Design and Analysis of Microcantilevers Type Sensor with Different Shape of Piezoresistive Patch", *International Journal of Emerging Trends in Electrical and Electronics*, Vol. 11, No. 2, pp. 45-50, 2015.
13. Zhang, W.-M., Meng, G. and Chen, D. "Stability, Nonlinearity and Reliability of Electrostatically Actuated MEMS Devices", *Sensors*, Vol. 7, No. 5, pp. 760-796, 2007.
14. Hidetoshi, T., Nguyen, M.D., Matsumoto, K. and Shimoyamaet, I. "Differential Pressure Sensor using a Piezoresistive Cantilever", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 22, No. 5, 055015, 2012.
9. Liu, C.-C. "Dynamic Behavior Analysis of Cantilever-type Nano-mechanical Electrostatic Actuator", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 82, No. 1, pp. 124-130, 2016.
10. Shaat, M. and Mohamed, S. A. "Nonlinear-Electrostatic Analysis of Micro-actuated Beams Based on Couple Stress and Surface Elasticity Theories", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, No. 1, pp. 208-217, 2014.
11. Ouali, A. M. "Finite Element Formulation of a Beam with Piezoelectric Patch", *Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 3, No. 10, pp. 803-807, 2008.