تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک

سید علی موسوی[۱] محمدرضا الهامی[۲] محمود کفاش‌میرزا رحیمی[۳]

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: ۹۷/۱۲/۴؛ تاریخ پذیرش: ۹۸/۹/۱۲)

چکیده

در این مقاله، به تحلیل دینامیکی و ارتعاشاتی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از لایه‌های گرافیت اپوکسی به همراه دو لایه پیزوالکتریک در دو سطح داخلی و خارجی آن پرداخته شده است. استخراج معادلات حرکت بر پایه تئوری سندرز برای پوسته‌های نازک انجام شده است. معادلات حرکت که به‌صورت مشتق‌های جزئی به‌دست می‌آیند، به روش رانگ کوتای مرتبه چهارم حل شده‌اند. ابتدا به بررسی شماری از پارامترهای هندسی مسئله شامل ضخامت پوسته، شعاع و طول پوسته، و زاویه الیاف در تغییر فرکانس‌های اصلی پرداخته شده است. در نهایت تأثیر پارامترهای پیزوالکتریک در پاسخ ارتعاشاتی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای بررسی شده است. در همه موارد بررسی شده با افزایش نسبت طول به شعاع مشاهده می‌شود که تأثیر ضرایب پیزوالکتریک افزایش یافته است. نتایج نشان می‌دهد که در میان پارامترهای پیزوالکتریک پارامتر C_{11} بیشترین تأثیر را در پاسخ فرکانسی دارد به‌طوری‌که C_{11} رابطه مستقیم و C_{12} رابطه عکس با فرکانس طبیعی دارد. تأثیر سایر پارامترهای پیزو الکتریک نیز نسبت به این پارامتر در پاسخ فرکانسی ناچیز ارزیابی شده است.

واژه‌های کلیدی : پوسته استوانه‌ای، کامپوزیت، پیزوالکتریک، ارتعاشات

Dynamic and Vibration Analysis of Composite Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers

S. A. Mousavi **M. R. Elhami** **M. Kaffash-Mirzarahimi**

Mechanical Engineering Department
Imam hosein University

(Received: 23/February/2019 ; Accepted: 03/December/2019)

ABSTRACT

In this paper, the dynamics and vibration analysis of cylindrical shells made of graphite epoxy layers with two piezoelectric layers at both internal and external surfaces are investigated. Extraction of motion equations is based on Sanders theory for thin shells. Equations of motion, obtained by partial derivatives, are solved by fourth-order Runge–Kutta method. First, we examine a number of geometric parameters of the problem, including shell thickness, radius, length of the shell, and the angle of the fiber in the change of the fundamental frequencies. Finally, the effect of piezoelectric parameters on the vibrational and dynamic response of cylindrical shells has been investigated. In all cases investigated, with an increasing ratio of length to the radius, the effect of piezoelectric coefficients has increased. The results show that among the piezoelectric parameters, the parameter C_{11} has the most effect on the frequency response so that C_{11} has a direct relation and C_{12} has an inverse relationship with the natural frequency.The influence of other piezoelectric parameters has also been evaluated in relation to this parameter in frequency response is negligible.

Keywords: cylindrical shell, composite, Piezoelectric, Vibration

۱- کارشناسی ارشد: amousavi@ihu.ac.ir

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): mrelhami@gmail.com

۳- دانشجوی دکتری: m.kaffash.r@gmail.com

فهرست علائم و اختصارات

C	پارامتر پیزوالکتریک
E	مدول الاستیسیته، N/m^2
e	ضریب موثر پیزوالکتریک
H	ضخامت کل پوسته کامپوزیتی، m
L	طول پوسته استوانه‌ای، m
n	تعداد لایه کامپوزیتی
R	شعاع متوسط لایه کامپوزیتی پوسته استوانه‌ای، m
E	مدول الاستیسیته، N/m^2

علائم یونانی

θ	زاویه الیاف، °

۱- مقدمه

با توجه به افزایش روزافزون کاربرد مواد کامپوزیتی و پیشرفت روزافزون بشر، استفاده از مواد نو به‌جای استفاده از فلزاتی مانند مس و آهن که دیگر پاسخگوی نیاز بشر نیستند، به امری اجتناب‌ناپذیر بدل شده است چرا که این توانایی را به انسان می‌دهند تا خواصی مانند تحمل در برابر تنش کششی، فشاری،حرارتی و خوردگی و غیره را به بهترین شکل ممکن بهینه کنند. همچنین با توجه به پیشرفت علوم مکاترونیک، بررسی مواد کاربردی در این علوم ضروری و مهم به نظر می‌رسد. به واسطه اثر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک، مواد پیزوالکتریک به‌طور گسترده‌ای در علوم مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از طرفی نیز پوسته‌های کامپوزیتی به‌طور فزآینده‌های در کاربردهای مهندسی مختلف از جمله مهندسی هوا فضا، مکانیک، دریایی و خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱].

پل و نکاتسان [۲] با ابداع روش پل درسال ۱۹۸۷ توانستند فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک نامحدود را به‌دست آورند.

هاوکس و سولداتوس [۳] در سال ۱۹۹۲ ارتعاشات متقارن محوری سه‌بعدی استوانه‌های توخالی لایه‌ای Cross-Ply و ارتوتروپیک را با استفاده از حل نوع ناویر مطالعه کردند.

اگزاویر، چیو و لی [۴] در سال ۱۹۹۵ کمانش و ارتعاشات پوسته های استوانه‌ای کامپوزیتی ارتوتروپیک چند لایه را با استفاده از تئوری‌های ساده مرتبه اول و مرتبه بالاتر Layerwise بررسی کردند.

دینگ [۵] در سال ۱۹۹۷ ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک همگن را با استفاده از روش فضا-حالت به‌دست آورد.

سوزوکی، شیکانای و چینو [۶] در سال ۱۹۹۸ ارتعاشات مخازن استوانه‌ای دایروی کامپوزیتی را با استفاده از سری توانی و مینیمم لاگرانژین بررسی کردند.

ژانگ [۷] در سال ۲۰۰۱ آنالیز ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی لایه‌ای Cross-Ply را برای شرایط مرزی مختلف و بر اساس تئوری ساندرز، با استفاده از روش انتشار موج انجام داد.

یان و همکارانش [۸] در سال ۲۰۰۳ مدلی برای کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌های حسگر و عملگر کامپوزیتی ارائه نمودند که در آن از معادلات دینامیکی غیرخطی استفاده شده است.
علی‌بیگلو و کنی [۹] در سال ۲۰۰۶ ارتعاشات پانل کامپوزیتی را تحلیل کردند که برای تحلیل از روش فضا حالت استفاده کردند.

چن و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۷ ارتعاشات آزاد سه بعدی یک مخزن استوانه‌ای پیزوالکتریک که حاوی سیال تراکم پذیر می‌باشد را بررسی کردند و معادلات حاکم آن را از روش فضا-حالت به دست آوردند.

سانتوس و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۷ یک مدل المان محدودی را برای تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیتی با لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه کردند.

بیگلو و کنی [۱۲] در سال ۲۰۰۸ ورق کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک بر روی دو سطح جانبی را از لحاظ استاتیکی مورد بررسی قرارداده و حل سه‌بعدی برای آن ارائه نموده‌اند. با استفاده از روش تفاضلات مربعی و سری‌های فوریه به حل معادلات پرداخته‌اند و تغییرات تنش- جابجایی و توزیع پتانسیل الکتریکی را به‌دست آورده و تأثیر اثرات مستقیم و غیرمستقیم پیزوالکتریک و تأثیر لایه‌های پیزوالکتریک بر روی رفتارهای مکانیکی ورق را مورد بررسی قرار داده‌اند.

بیگلو و کنی [۱۳] در سال ۲۰۱۰ ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چند لایه با لایه پیزوالکتریک را بررسی کردند و معادلات حاکم را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی از روش فضا-حالت به دست آوردند. برای حل معادلات از روش تفاضلات مربعی DQM استفاده شده است. تأثیر شرایط مرزی، ضخامت پیزوالکتریک، اندازه شعاع لایه میانی و اثر طول به شعاع لایه میانی بر روی ارتعاشات پوسته مورد بررسی قرار گرفته است.

کنی و علی‌بیگلو [۱۴] در سال ۱۳۹۲ به حل عددی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چندلایه با لایه پیزوالکتریک پرداخته اند. در این پژوهش با استفاده از حل عددی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته(GDQ) برای پوسته‌های چند لایه که سطوح داخلی و خارجی آن‌ها مجهز به لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک می‌باشد و با شرط مرزی تکیه گاه ساده فرکانس‌های طبیعی پوسته را بدست آورده‌اند. از جمله تمایز پژوهش حاضر با این مقاله می‌توان به تفاوت در تئوری به کار رفته برای استخراج معادلات، روش حل معادلات و بررسی تاثیر ضرایب پیزوالکتریک می‌توان اشاره کرد. .

انصاری و همکارانش [۱۵] در سال ۲۰۱۶ به حل تحلیلی غیر خطی کمانش نانولوله‌های کربنی با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکترو-دمایی، فشار محوری و بارجانبی پرداخته‌اند. متغیرهای ضخامت پیزوالکتریک، تراکم حجمی نانو تیوب کربنی و نوع توزیع تقویت کننده را مورد بررسی قرار داده‌اند.

صفرپور و همکارانش [۱۶] در سال ۲۰۱۹ به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش نانولوله‌های کربنی دوار سرعت بالای تقویت شده با لایه‌های پیزوالکتریک پرداخته‌اند. در این پژوهش به بررسی اثرات تئوری‌های مختلف پوسته بررسی شده است.

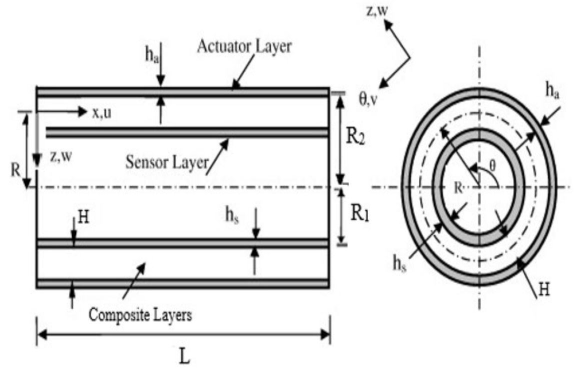
موسوی و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۱۹ به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه ای دورانی تحت فشار خارجی پرداختند و اثرات تقویت‌کننده‌های حلقوی و محوری بر ارتعاشات این پوسته‌ها را مورد مطالعه قرار دادند

مامندی و نجفی [۱۸] در سال ۲۰۱۹ به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته کامپوزیتی بر روی بستر ویسکوالاستیک تحت اثر جریان هوا زیرصوت پرداختند. آنها از معادلات غیرخطی دانل استفاده نمودند و از روش گالرکین جهت حل این معادلات بهره بردند.

سازه‌های استوانه‌ای پیزوالکتریک اعم از توپر و توخالی در وسایل ارتعاش کننده، انژکتور سوخت، تلسکوپ های با دقت بالا، الکتروپتیک و غیره کاربرد دارد. ازآنجایی‌که همواره مبحث ارتعاشات و فرکانس‌های طبیعی از مباحث مهم در تحلیل مواد مختلف به‌شمار می رود و با توجه به این‌که مسئله وزن در سازه های هوایی ازجمله موشک بسیار مهم می‌باشد لذا لازم است که در ساخت و تحلیل پوسته های استوانه ای از مواد کامپوزیتی استفاده شود تا نسبت استحکام به وزن آن ها تا حد امکان بالا باشد تا سازه به لحاظ صرفه جویی در مصرف مواد، انرژی و هزینه بهینه باشد، ازاین‌رو، در این پژوهش به بررسی ارتعاشات و تأثیرات ضرایب مختلف موجود در مواد کامپوزیتی و پیزوالکتریک بر روی فرکانس طبیعی در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک پرداخته شده است.

۲- بیان هندسی مسئله

همان‌گونه که در شکل **۱** نشان داده شده، در این بخش یک پوسته استوانه‌ای به طول L و تعداد n لایه کامپوزیتی به ضخامت کل H و یک‌لایه عملگر در سطح خارجی پوسته به ضخامت h_a و یک لایه حسگر در سطح داخلی پوسته به ضخامت h_s را بررسی می‌کنیم که شعاع از مرکز پوسته تا وسط لایه‌های کامپوزیتی برابر R و شعاع از مرکز پوسته تا وسط لایه حسگر برابر R_1 و شعاع از مرکز پوسته تا وسط لایه عملگر برابر R_2 می‌باشد. سطح میانی استوانه به دستگاه مختصات استوانه‌ای x و θ و z ارجاع داده می‌شود. فاصله از سطح میانی با مختصات z اندازه‌گیری می‌شود که جهت مثبت آن به سمت داخل استوانه است و مؤلفه‌های تغییر مکان در جهت‌های x و θ و z به‌ترتیب با u و v و w نشان داده می‌شوند [۱۹].



شکل(۱): هندسه پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه عملگر در بالا و حسگر در پایین لایه‌های کامپوزیتی [۱۹].

۳- استخراج معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای

برای استخراج معادلات حرکت، از تئوری سندرز برای پوسته نازک استفاده شده است. که فرضیات ساده ساز برای میدان جابجایی، به منظور استخراج معادلات تعادل به‌صورت زیر هستند [۲۰]:

۱- ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع آن کوچک است ($h_{total}/R << 1$).

۲- تنش نرمال عرضی ناچیز است.

۳- بردار عمود بر سطح مرجع پوسته، بعد از تغییر شکل مستقیم می‌ماند اما لزوماً عمود نمی‌ماند (فرضیه کریشهف-لاو).

قضیه وایرشتراس بیان می‌کند که هر تابعی که در یک بازه پیوسته است می‌تواند به‌صورت یکنواخت در این بازه توسط یک چندجمله‌ای تقریب زده شود، بنابراین، میدان جابجایی در پوسته می‌تواند توسط روابط زیر بیان شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} U(x,\theta,z) &= u(x,\theta) + Z\,\psi_x(x,\theta) + Z^2\,\gamma_x(x,\theta) + \cdots \\ V(x,\theta,z) &= v(x,\theta) + Z\,\psi_\theta(x,\theta) + Z^2\,\gamma_\theta(x,\theta) + \cdots \\ W(x,\theta,z) &= w(x,\theta) + Z\,\psi_z(x,\theta) + Z^2\,\gamma_z(x,\theta) + \cdots \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن، ضرایب U و V و W مؤلفه‌های جابجایی در جهت‌های به ترتیب x و θ و z هستند. فرضیه کریشهف– لاو بیان‌گر نتایج فرضیه سوم در جابجایی‌های توزیع یافته مماسی خطی و یک جابجایی عمودی ثابت طی ضخامت پوسته هست و ازاین‌رو، معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۲۰]:

$$\begin{aligned} U(x,\theta,z) &= u(x,\theta) + Z\,\psi_x(x,\theta) \\ V(x,\theta,z) &= v(x,\theta) + Z\,\psi_\theta(x,\theta) \\ W(x,\theta,z) &= w(x,\theta) \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن، u و v و w مؤلفه‌های جابجایی لایه میانی پوسته به ترتیب در راستای x و θ و z می‌باشند و ψ_x و ψ_θ چرخش عمود بر سطح میانی حول x و θ هستند.

سندرز یک تئوری پوسته مرتبه ۸ را از اصل کار مجازی توسعه داد که روابط تنش-کرنش برای پوسته استوانه‌ای دایره‌ای می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود [۲۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{v}{R} + \psi_\theta \\ \kappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن، ε_x و ε_θ و $\varepsilon_{x\theta}$ کرنش‌های غشایی لایه میانی و κ_x و κ_θ و $\kappa_{x\theta}$ کرنش‌های خمشی و ε_{xz} و $\varepsilon_{\theta z}$ کرنش‌های برشی عرضی هستند.

با فرض تقارن محوری هندسی و نیرویی، تغییر شکل‌های در جهت جانبی کوچک و ناچیز است و با نادیده گرفتن آن، رابطه (۳) به‌صورت زیر ساده می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{w}{R} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \\ \kappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \end{aligned} \qquad (۴)$$

معادلات حرکت برای رفتار دینامیکی یک پوسته استوانه‌ای دایره‌ای، با فرض تقارن محوری می‌تواند از شکل کلی تئوری پوسته سندرز، به شکل ساده زیر نوشته شود [۲۲]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} &= I_1\ddot{u}(x,t) + \frac{1}{R}\,\ddot{\psi}_x(x,t) \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x &= \frac{I_2}{R}\,\ddot{u}(x,t) + I_2\,\ddot{\psi}_x(x,t) \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} + p\,\delta(x - vt) &= I_1\ddot{w}(x,t) \end{aligned} \qquad (۵)$$

که منتجه‌های ممان و ضرایب $I_{i(i=1\ \mathrm{and}\ 2)}$ در معادلات (۵) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_{xx} = \int_{z_1}^{z_0} \sigma_{xx}^{a}\, 2\pi R_2\, dz + \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xx}^{com}\, 2\pi R\, dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx}^{s}\, 2\pi R_1\, dz$$

$$N_{\theta} = \int_{z_1}^{z_0} \sigma_{\theta}^{a}\, L\, dz + \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{\theta}^{com}\, L\, dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{\theta}^{s}\, L\, dz$$

$$\sigma_{xx}^{a}\, 2\pi R_2\, z\, dz + \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xx}^{com}\, 2\pi R\, z\, dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx}^{s}\, 2\pi R_1\, z\, dz$$

$$Q_x = \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xz}^{com}\, 2\pi R\, dz \qquad (۶)$$

$$(I_1 . I_2) = \int_{z_1}^{z_j} \rho\, (1 \ \ . z^2) dz$$

برای به‌دست آوردن معادله حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای شامل لایه کامپوزیتی و لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر کافی است مقادیر تنش را در رابطه (۶) جایگذاری کنیم.

۳-۱- روابط لایه کامپوزیتی

در تئوری پوسته و صفحه، برای معرفی نیرو و ممان حاصل، انتگرال‌گیری از تنش‌ها طی ضخامت پوسته مناسب است. معادلات اساسی یک پوسته برای یک ماده غیر ایزوتروپ با فرض تقارن محوری به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲۰]:

$$N_{xx}^{com} = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_\theta + B_{11}\,\kappa_x$$

$$N_{\theta}^{com} = A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_\theta + B_{12}\,\kappa_x \qquad (۷)$$

$$M_{xx}^{com} = B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\,\varepsilon_\theta + D_{11}\,\kappa_x$$

$$Q_x^{com} = A_{55}\,\varepsilon_{xz}$$

که کرنش‌ها از رابطه (۴) در آن جایگذاری می‌شوند و ضرایب A و B و D برای لایه‌های کامپوزیتی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^{k}\, \{1, z, z^2\}\, dz,$$

$$(i, j = 1, 2) \qquad (۸)$$

$$A_{55} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{55}^{(k)} k_5^2 dz$$

که در آن، ضرایب $\bar{Q}_{11}$ و $\bar{Q}_{12}$ و $\bar{Q}_{22}$ و $\bar{Q}_{55}$ برای لایه‌های کامپوزیتی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۳]:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\,c^4 + 2(Q_{12} + 2\,Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}\,s^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4\,Q_{66})\,c^2s^2 + Q_{12}\,(s^4 + c^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}\,s^4 + 2(Q_{12} + 2\,Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}\,c^4$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}\,c^2 + Q_{44}\,s^2 \qquad (۹)$$

که در آن، ضرایب Q برای لایه‌های ارتوتروپیک به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\,\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}\,E_2}{1 - \nu_{12}\,\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\,\nu_{21}} \qquad (۱۰)$$

$$Q_{44} = G_{23}$$

$$Q_{55} = G_{13}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹) و سپس جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۸) و درنهایت با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۶)، معادلات نیرو و ممان برای لایه کامپوزیتی حاصل می‌شود.

۳-۲- روابط لایه پیزوالکتریک

در روابط پیزوالکتریک به دلیل نازکی لایه پیزو، از ترم برشی در این لایه صرف‌نظر کرده، در نتیجه برای لایه‌های پیزو خواهیم داشت [۱۶]:

$$\sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_\theta + c_{13}\varepsilon_z - e_{13}\,E_z$$

$$\sigma_\theta = c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_\theta + c_{23}\varepsilon_z - e_{23}\,E_z \qquad (۱۱)$$

$$D_z = e_{13}\varepsilon_x + e_{23}\varepsilon_\theta + e_{33}\varepsilon_z + \epsilon_{33}\,E_z$$

که در آن، σ تنش و ε کرنش و E شدت میدان الکتریکی و D جابجایی الکتریکی و c و e و µ ضرایب مربوط به لایه پیزوالکتریک می‌باشند.

۳-۳- روابط لایه حسگر

از آنجایی که در حسگر هیچ‌گونه شارژ الکتریکی خارجی وجود ندارد بنابراین، جابجایی الکتریکی این لایه در راستای شعاع صفر خواهد شد، بنابراین، برای لایه حسگر داریم:

$$E_z^s = -\frac{1}{\epsilon_{33}}\,(e_{13}\,\varepsilon_x + e_{23}\,\varepsilon_\theta + e_{33}\,\varepsilon_z) \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱)، روابط تنش برای لایه حسگر مطابق رابطه (۱۳) به‌دست خواهد آمد:

$+\ c_{12}\varepsilon_\theta + c_{13}\varepsilon_z + \frac{e_{13}}{\epsilon_{33}}\,(e_{13}\,\varepsilon_x + e_{23}\,\varepsilon_\theta + e_{33}\,\varepsilon_z)$	(۱۳)
$x + c_{22}\varepsilon_\theta + c_{23}\varepsilon_z + \frac{e_{23}}{\epsilon_{33}}\,(e_{13}\,\varepsilon_x + e_{23}\,\varepsilon_\theta + e_{33}\,\varepsilon_z)$	

بر این پایه با برابر قرار دادن شدت میدان الکتریکی در حسگر و رابطه تجربی $E_i = \varphi_i$ [۲۴] با هم و انتگرال‌گیری در راستای z خواهیم داشت:

$$V^s = -\frac{h_s}{\epsilon_{33}}\left(e_{13}\frac{\partial u_0}{\partial_x} + e_{23}\frac{W(x.\theta)}{R}\right)^s \qquad (۱۴)$$

بر اساس تئوری پوسته مرتبه دوم، روابط نیرو و ممان لایه حسگر به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$N_x^s = \int_{z_1}^{z_0} \sigma_x^s\, 2\pi R_1\, d_z$$
$$M_x^s = \int_{z_1}^{z_0} \sigma_x^s\, 2\pi R_1\, z\, d_z \qquad (۱۵)$$
$$N_\theta^s = \int_{z_1}^{z_0} \sigma_\theta^s\, L\, d_z$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۵)، نیرو و ممان برای لایه حسگر به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_1 h_s\left[\left(c_{11} + \frac{e_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right)\frac{\partial u_0}{\partial_x} + \left(c_{12} + \frac{e_{13}\, e_{23}}{\epsilon_{33}}\right)\frac{W(x.\theta)}{R}\right]$$
$$\frac{z_1^2}{}\Big)\left[\left(c_{11} + \frac{e_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right)\frac{\partial u_0}{\partial_x} + \left(c_{12} + \frac{e_{13}\, e_{23}}{\epsilon_{33}}\right)\frac{W(x.\theta)}{R}\right] \qquad (۱۶)$$
$$N_\theta^s = L\, h_s\left[\left(c_{12} + \frac{e_{13}\, e_{23}}{\epsilon_{33}}\right)\frac{\partial u_0}{\partial_x} + \left(c_{22} + \frac{e_{23}^2}{\epsilon_{33}}\right)\frac{W(}{}\right.$$

۳-۴- روابط لایه عملگر

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر عملگر، می‌توان فرض کرد که توزیع پتانسیل الکتریکی درون عملگر به‌صورت یک تابع مرتبه اول، در رابطه (۱۷) آمده است [۲۶]:

$$\varphi^a = \varphi_0 + z\,\varphi_1 \qquad (۱۷)$$

حال با توجه به این‌که در عملگر اختلاف پتانسیل الزامی است، بنابراین، شرایط مرزی الکتریکی زیر برای آن در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &: V^a \quad \text{at} \quad z = z_{N+2} = \frac{-H}{2} - h_a \\ &: 0 \quad \text{at} \quad z = z_{N+1} = \frac{-H}{2} \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

با استفاده از شرایط مرزی فوق و استفاده از رابطه ماکسول [۲۴]، رابطه (۱۹) برای توزیع پتانسیل الکتریکی به‌دست خواهد آمد:

$$\varphi^a = -\frac{H\, V^a}{2\, h_a} - z\,\frac{V^a}{h_a} \qquad (۱۹)$$

بر این اساس، برای E_z رابطه (۲۰) برقرار خواهد بود [۲۴]:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial Z} = \frac{V^a}{h_a} \qquad (۲۰)$$

برای مشاهده اثر کنترل بر روی سازه، ولتاژ خروجی از حسگر با رابطه زیر به ولتاژ عملگر مربوط می‌شود:

$$V^a = G\, V^S = -\frac{G\, h_s}{\epsilon_{33}}\left(e_{13}\frac{\partial u_0}{\partial_x} + e_{23}\frac{W(x.\theta)}{R}\right)^s \qquad (۲۱)$$

بر این اساس، رابطه تنش عملگر به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$c_{12}\varepsilon_\theta + c_{13}\varepsilon_z + \frac{e_{13}\, G\, h_s}{h_a\, \epsilon_{33}}\left(e_{13}\frac{\partial u_0}{\partial_x} + e_{23}\frac{W(x.\theta)}{R}\right) \qquad (۲۲)$$
$$c_{22}\varepsilon_\theta + c_{23}\varepsilon_z + \frac{e_{23}\, G\, h_s}{h_a\, \epsilon_{33}}\left(e_{13}\frac{\partial u_0}{\partial_x} + e_{23}\frac{W(x.\theta)}{R}\right)$$

بر اساس تئوری پوسته مرتبه دوم و رابطه (۲۲)، روابط نیرو و ممان لایه عملگر به‌صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود [۲۵]:

$$\frac{e_{13}^2\, G\, h_s}{h_a\, \epsilon_{33}}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial_x} + \left(c_{12} + \frac{e_{13}\, e_{23}\, G\, h_s}{h_a\, \epsilon_{33}}\right)\frac{W(x.\theta)}{R}\Big]$$
$$\Big)\left[\left(c_{11} + \frac{e_{13}^2}{\epsilon_{33}}\right)\frac{\partial u_0}{\partial_x} + \left(c_{12} + \frac{e_{13}\, e_{23}}{\epsilon_{33}}\right)\frac{W(x.\theta)}{R}\right] \qquad (۲۳)$$
$$\frac{e_{13}\, e_{23}\, G\, h_s}{h_a\, \epsilon_{33}}\Big)\frac{\partial u_0}{\partial_x} + \left(c_{22} + \frac{e_{23}^2\, G\, h_s}{h_a\, \epsilon_{33}}\right)\frac{W(x.\theta)}{R}\Big]$$

۳-۵- معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای

با توجه به معادلات بیان شده، معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای به‌صورت رابطه (۲۴) به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2\psi_x(x.t)}{\partial x^2} + A_3\frac{\partial W(x.\theta)}{\partial x} = I_1\ddot{u}(x.t) + \frac{1}{R}\ddot{\psi}_x(x.t)$$
$$\frac{\partial W(x.\theta)}{\partial x} + A_{11}\psi_x(x.t) = \frac{I_2}{R}\ddot{u}(x.t) + I_2\ddot{\psi}_x(x.t) \qquad (۲۴)$$

$$\ldots + A_6 \frac{\partial u(x.t)}{\partial x} + A_7 w_0(x.t) + P(x.t) = I_1 \ddot{w}_0(x.t)$$

که ضرایب $A_{i\,(i=1\,to\,11)}$ و $I_{i\,(i=1\,to\,2)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = A_{11} + 2\pi R_1 h_s \left(C_{11} + \frac{{e_{13}}^2}{\epsilon_{33}}\right) + 2\pi R_2 h_a \left(C_{11} \ldots\right.$$

$$A_2 = B_{11}$$

$$\ldots h_s \left(C_{12} + \frac{e_{13} e_{23}}{\epsilon_{33}}\right) + \frac{2\pi R_2 h_a}{R}\left(C_{12} + \frac{e_{13} e_{23} h_s G}{h_a \epsilon_{33}}\right)$$

$$A_4 = A_{55}$$

$$A_5 = A_{55} - \frac{B_{12}}{R}$$

$$A_6 = \frac{-A_{12}}{R} - \frac{L h_s}{R}\left(C_{12} + \frac{e_{13} e_{23}}{\epsilon_{33}}\right) - \frac{L h_a}{R}\left(C_{12} + \frac{e_{13} e_{23} h_s G}{h_a \epsilon_{33}}\right)$$

) ۲ ۵ (

$$\ldots \frac{A_{22}}{R^2} - \frac{L h_s}{R^2}\left(C_{22} + \frac{{e_{23}}^2}{\epsilon_{33}}\right) - \frac{L h_a}{R^2}\left(C_{22} + \frac{{e_{23}}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}}\right)$$

$$A_8 = B_{11} + 2\pi R_1 h_s h_m^s \left(C_{11} + \frac{{e_{13}}^2}{\epsilon_{33}}\right) + 2\pi R_2 h_a h \ldots$$

$$A_9 = D_{11}$$

$$A_{10} = \frac{B_{12}}{R} - A_{55} + \frac{2\pi R_1 h_s h_m^s}{R}\left(C_{12} + \frac{e_{13} e_{23}}{\epsilon_{33}}\right) + \ldots$$

$$A_{11} = -A_{55}$$

$$I_1 = \rho_a h_a + \rho_s h_s + \rho_{com} H$$

$$I_2 = \rho_s \left(\frac{z_0^3 - z_1^3}{3}\right) + \rho_a \left(\frac{z_{N+1}^3 - z_{N+2}^3}{3}\right) + \sum_{k=2}^{N+1} \ldots$$

۴- حل معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای

با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، در ابتدا و انتهای پوسته استوانه‌ای برای شرایط مرزی نیرویی و جابجایی در تیر مورد نظر خواهیم داشت:

$$w.N_{xx}.M_{xx} = 0 \quad at \quad x = 0 \;\; and \;\; x = l \qquad (۲۶)$$

سپس با در نظر گرفتن تقریب سری فوریه [۲۷] برای مؤلفه‌های جابجایی، به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$u(x.t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \cos\frac{m\pi x}{l}$$
$$\psi(x.t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t) \cos\frac{m\pi x}{l} \qquad (۲۷)$$
$$w(x.t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sin\frac{m\pi x}{l}$$
$$P(x.t) = 0$$

در روابط (۲۷) m بیانگر مود می‌باشد. نیروی وارده بر سیستم صفر می‌باشد و به‌عبارتی ارتعاش سیستم آزاد خواهد بود. بر این اساس با جایگذاری روابط (۲۷) در معادلات (۲۴) و حذف توابع مکانی از طرفین، معادلات حرکت به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$[M]\,\ddot{\vec{X}} + [K]\,\vec{X} = \vec{F} \qquad (۲۸)$$

در رابطه (۲۸) ماتریس‌های K و M به ترتیب ماتریس‌های سفتی و جرم هستند. بردار F بردار نیروست و بردار X نیز بردار جابجایی است که بردار F و X و همچنین ماتریس‌های K و M به‌صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌شوند:

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{I_2}{R} & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} ,$$ (۲۹)

$$[K] = \begin{bmatrix} A_1\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 & A_2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 & -A_3\left(\frac{m\pi}{l}\right) \\ A_8\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 & A_9\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - A_{11} & -A_{10}\left(\frac{m\pi}{l}\right) \\ A_6\left(\frac{m\pi}{l}\right) & A_5\left(\frac{m\pi}{l}\right) & A_4\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - A_7 \end{bmatrix}$$

معادله (۲۸) یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زمانی است که پاسخ دینامیکی آن با روش رانگ کوتا حل شده است.

برای یافتن پاسخ ارتعاشی پوسته استوانه‌ای به‌جای تقریب سری فوریه در معادله (۲۷)، از تقریب زیر استفاده می‌کنیم [۲۷]:

$$\begin{aligned} u(x.t) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos\frac{m\pi x}{l} \sin \omega t \\ \psi(x.t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos\frac{m\pi x}{l} \sin \omega t \\ w(x.t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\frac{m\pi x}{l} \sin \omega t \\ P(x.t) &= 0 \end{aligned}$$ (۳۰)

در روابط (۳۰)، ω فرکانس طبیعی و u_m و ψ_m و w_m دامنه توابع هستند.

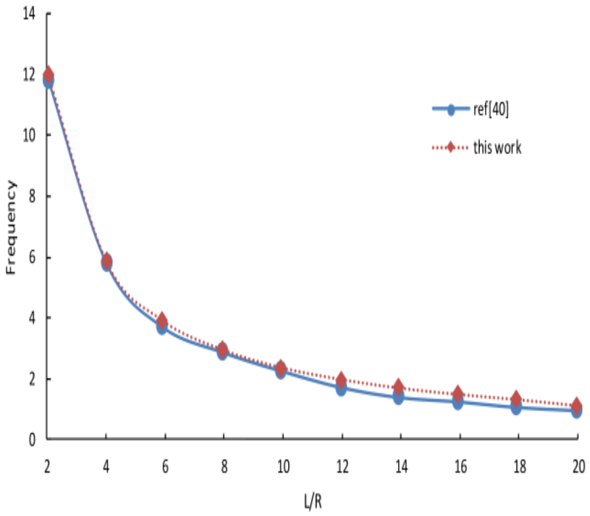
با جایگذاری روابط (۳۰) در معادلات (۲۴) و حذف توابع مکانی و زمانی از طرفین، معادلات حرکت به‌صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$[M]\omega^2 \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix} - [K] \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix} = \vec{F} = 0$$ (۳۱)

که از رابطه (۳۱) فرکانس طبیعی و شکل مود پوسته استوانه‌ای تحت شرایط از دو طرف تکیه‌گاه ساده و تحت ارتعاش آزاد به‌دست خواهد آمد.

۵- نتایج و بحث

در ابتدا صحت انجام محاسبات بررسی شده و سپس نتایج عددی مطالعه و تحلیل خواهند شد. شکل **۲** مقایسه نتایج تغییرات فرکانس اصلی در نسبت‌های L/R مختلف با مقاله مرجع [۲۸] را نشان می‌دهد. مشخصات پوسته استوانه‌ای این مقاله در جدول **۱** آمده است.



شکل (۲): مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی با L/Rهای مختلف

با توجه به نتایج ارائه شده در شکل **۲** مشاهده می‌شود که نتایج این پژوهش بخصوص در فرکانس‌های پایین تطابق خوبی با پژوهش‌های پیشین دارد.

مشخصات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک شامل مشخصات ماده و هندسه و ضرایب پیزوالکتریک که نتایج آن در این بخش ارائه خواهد شد در جدول **۲** آمده است. در صورت تغییر هر یک از این مقادیر در بررسی‌های صورت گرفته مقدار آن ذکر شده است.

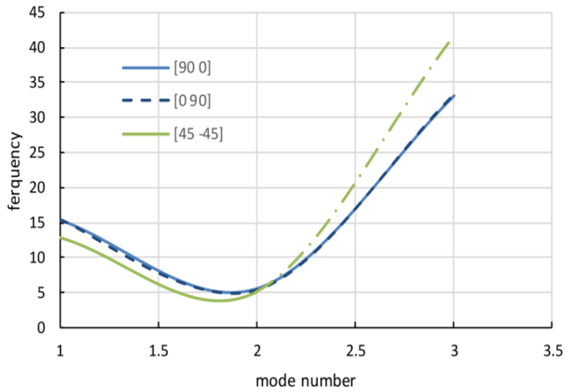
یک متغیر مهم دیگر در کامپوزیت‌ها، زاویه الیاف لایه‌ها می‌باشد که تأثیر به‌سزایی در مقاومت و سفتی کامپوزیت دارد. تغییرات فرکانس طبیعی تیر با تغییر در زاویه الیاف کامپوزیت در شکل **۳** مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول (۱): خصوصیات پوسته استوانه صحت سنجی

E_{11}(GPa)	E_{22}(GPa)	G_{12}(GPa)	G_{13}(GPa)	G_{23}(GPa)	υ_{12}	ρ(kg/m^3)
۱۹	۷/۶	۴/۱	۴/۱	۴/۱	۰/۲۶	۱۶۴۳
R(m)	L(m)	h(m)	Nplies	θ_1	θ_2	θ_3
۱	۲	۰/۰۰۲	۳	۹۰	۰	۹۰

جدول (۲): مشخصات هندسه و خواص ماده پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

E_{11}(GPa)	E_{22}(GPa)	G_{12}(GPa)	υ_{12}	υ_{21}	L(m)	h(m)	R(m)
۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸	۰/۰۱۷	۴	۰/۱	۲
θ_1	θ_2	C_{11}	e_{31}	e_{33}	μ_3	Nplies	ρ(kg/m^3)
۹۰	۰	$۱۰^{۱۱}\times ۱۳۹$	۵/۲−		۵۶۰	۲	۷۵۰۰

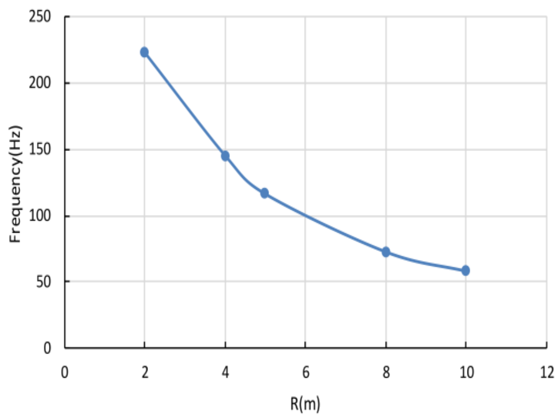


شکل (۳): تغییرات فرکانس پوسته استوانه با تغییر زاویه الیاف

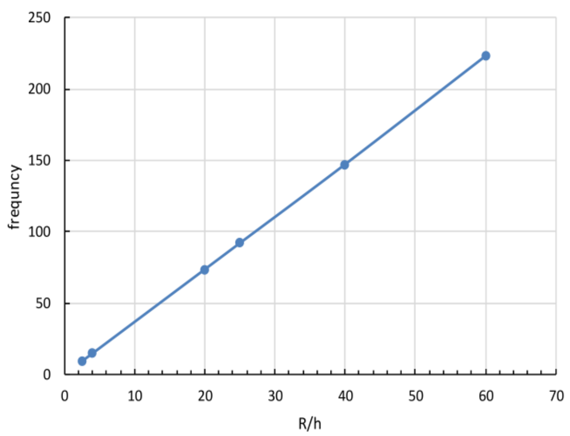
شکل ۴ بررسی تغییرات فرکانس نسبت به تغییر شعاع لایه میانی را نشان می‌دهد. مطابق شکل فرکانس با شعاع لایه میانی نسبت معکوس دارد. هرچه شعاع لایه میانی افزایش پیدا کند، میزان فرکانس کاهش پیدا خواهد کرد.

نسبت شعاع به ضخامت پوسته از پارامترهایی است که معمولاً در مطالعات بررسی می‌شود. در شکل ۵ تغییرات فرکانس نسبت به این پارامتر مشاهده می‌شود. هرچه نسبت شعاع متوسط به ضخامت افزایش پیدا کند میزان فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای افزایش پیدا خواهد کرد.

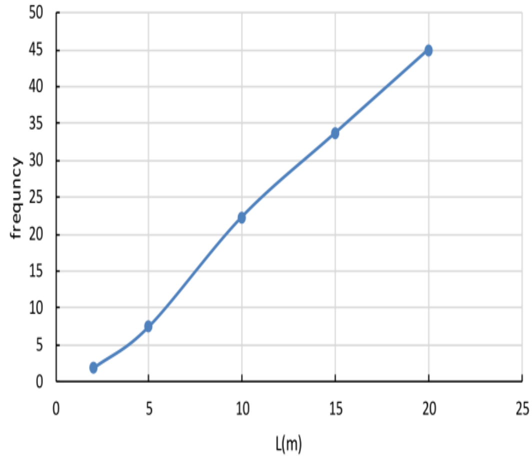
تأثیر طول پوسته استوانه‌ای در فرکانس را در شکل ۶ نشان داده شده است. مطابق شکل هرچه طول پوسته استوانه‌ای افزایش پیدا کند، فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا خواهد کرد.



شکل (۴): تغییرات فرکانس پوسته استوانه با تغییر شعاع لایه میانی



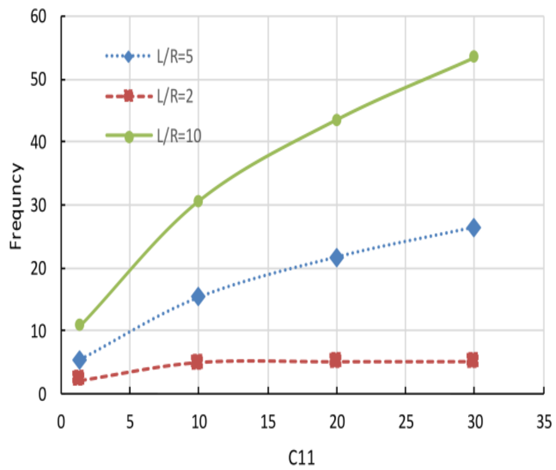
شکل (۵): تغییرات فرکانس پوسته استوانه با تغییر نسبت R/h



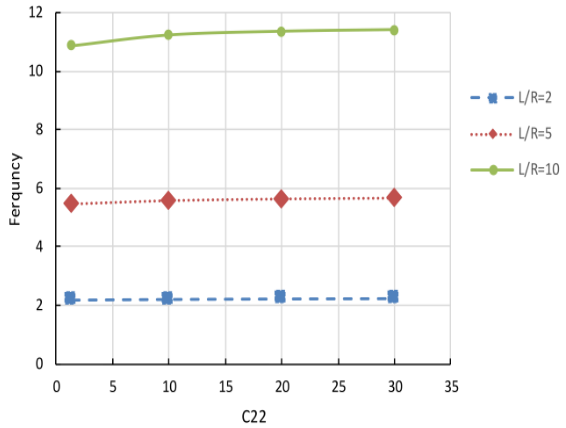
شکل (۶): تغییرات فرکانس نسبت به طول استوانه

در ادامه به بررسی تأثیرات ضرایب پیزوالکتریک در فرکانس‌های اصلی می‌پردازیم. نتایج برای ضرایب پیزوالکتریک مختلف در شکل‌های **۷** تا **۹** آمده است. مشاهده می‌شود که تأثیر برخی از ضرایب بسیار اندک است. در همه موارد بررسی شده با افزایش نسبت L/R مشاهده می‌شود که تأثیر ضرایب پیزوالکتریک افزایش یافته است.

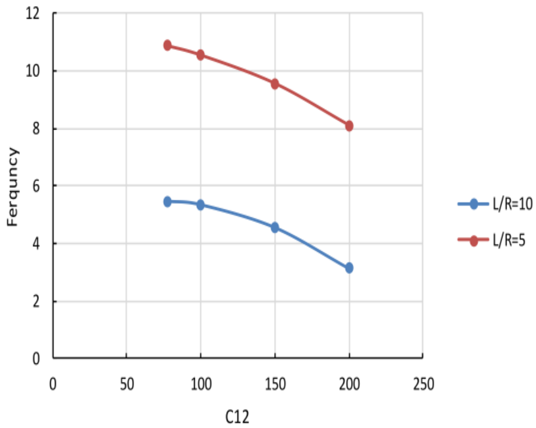
تأثیر سایر ضرایب پیزوالکتریک در تغییرات فرکانس اصلی ناچیز است به همین دلیل از رسم تغییرات آن‌ها صرف‌نظر شده است. با توجه به نمودارهای ضرایب پیزوالکتریک مشخص است که بیشترین تغییرات در فرکانس با تغییر ضریب C_{11} ایجاد می‌شود.



شکل (۷): تغییرات فرکانس نسبت به ضریب پیزوالکتریک C_{11}



شکل (۸): تغییرات فرکانس نسبت به ضریب پیزوالکتریک C_{22}



شکل (۹): تغییرات فرکانس اصلی نسبت به ضریب پیزوالکتریک C_{12}

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه تأثیر پارامترهای هندسی در پاسخ ارتعاشاتی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌های پیزو مورد بررسی قرار گرفت. تأثیرات پارامترهای هندسی از قبیل زاویه الیاف، تغییر ابعاد و همچنین تغییر ضرایب پیزوالکتریک بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که در میان پارامترهای پیزوالکتریک پارامتر C_{22} دارای کمترین تأثیر و پارامتر C_{11} بیشترین تأثیر را بر روی فرکانس طبیعی دارد. مقدار C_{11} با فرکانس طبیعی رابطه مستقیم دارد. همچنین هرچه نسبت طول به شعاع کمتر باشد، تأثیر C_{11} بر روی فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود.در مورد پارامتر C_{12} نیز با فرکانس طبیعی رابطه معکوس دارد به‌طوری‌که با افزایش مقدار این ضریب، فرکانس طبیعی به‌طور محسوسی کاهش می‌یابد.

۶- مراجع

1. Qatu, M. S. "Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989-2000, Part 1", Laminated Composite Shells. Applied Mechanics Reviews, Vol. 55, No. 4, pp.325-350, 2002.
2. Paul, H. S. and Venkatesan, M. "Vibrations of a Hollow Circular Cylinder of Piezoelectric Ceramics". The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 82, No. 3, pp.952-956, 1987.
3. Hawkes, T. D. and Soldatos, K. P. "Three Dimensional Axisymmetric Vibrations of Orthotropic and Cross-Ply Laminated Hollow Cylinders". AIAA journal, Vol. 30, No. 4, pp.1089-1098, 1992.
4. Xavier, P. B., Chew, C. H. and Lee, K. H. "Buckling and Vibration of Multilayer Orthotropic Composite Shells Using a Simple Higher-Order Layerwise Theory", International Journal of Solids and Structures, Vol. 32, No. 23, pp.3479-3497, 1995.
5. Ding, H. J., Chen, W. Q., Guo, Y. M. and Yang, Q. D. "Free Vibrations of Piezoelectric Cylindrical Shells Filled with Compressible Fluid". International Journal of Solids and Structures, Vol. 34, No. 16, pp.2025-2034, 1997.
6. Suzuki, K., Shikanai, G. and Chino, T. "Vibrations of Composite Circular Cylindrical Vessels". International journal of solids and structures, Vol.35, No. 22, pp.2877-2899, 1998.
7. Zhang, X. M. "Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Composite Cylindrical Shells Using the Wave Propagation Approach". Applied Acoustics, Vol. 62, No. 11, pp.1221-1228, 2001
8. Hong-yun, L., Qi-yong, L., Zheng-xing, L. and Chao, W.A.N.G. "Active Control of The Piezoelastic Laminated Cylindrical Shell's Vibration under Hydrostatic Pressure". Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 24, No. 2, pp.182-195, 2003.
9. Alibeigloo, A. and Shakeri, M. "Elasticity Solution for the Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Panels Using the Differential Quadrature Method". Composite structures, Vol. 81, No. 1, pp.105-113, 2007.
10. Chen, W. Q., Bian, Z. G., Lv, C. F. and Ding, H. J. "3D Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder Filled with Compressible Fluid". International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, No. 3, pp.947-964, 2004.
11. Santos H. M. Soares C. Reddy J. N. "A Finite Element Model for the Analysis of 3D Axisymmetric Laminated Shells with Piezoelectric Sensors and Actuators: Bending and Free Vibration". Journal of Computer and Structures. Vol. 86, No. 9, pp.940-947, 2007.
12. Alibeigloo A., Madoliat R. "Static Analysis of Cross-Ply Laminated Plates with Integrated Surface Piezoelectric Layers Using Differential Quadrature". Composite Structures. Vol. 83, No. 3, pp.342-353. 2008.
13. Alibeigloo, A. and Kani, A. M. "3D Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shell Integrated Piezoelectric Layers Using the Differential Quadrature Method". Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, No. 12, pp.4123-4137, 2010.
14. Kani, A. Beigloo, A. "Numerical Vibrations Resolution of a Multi-Layer Cylindrical Shell with a Piezoelectric Layer"; Journal of Solid Mechanics. Vol 6, 1392. (In Persian)
15. Ansari, R., Pourashraf, T., Gholami, R. and Shahabodini, A. "Analytical Solution for Nonlinear Postbuckling of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Shells with Piezoelectric Layers". Composites Part B: Engineering, 90, pp. 267-277, 2016.
16. SafarPour, H., Ghanbari, B. and Ghadiri, M. "Buckling and Free Vibration Analysis of High Speed Rotating Carbon Nanotube Reinforced Cylindrical Piezoelectric Shell". Applied Mathematical Modelling, Vol. 65, pp.428-442, 2019.
17. Mousavi, S.A.., Kafash Mirza Rahimi, M., Mahjoub, S. "Vibrations of a Rotating Functionally Graded Cylindrical Shell under Pressure with Ring and Stringer Stiffened". Aerospace Mechanics Journal, Vol. 16, No. 3, pp.127-139, 2020. (In persian)
18. Mamandi, H. Najafi, A. "Nonlinear Vibration Analysis of a Composite Cylindrical Shell on a Viscoelastic Foundation and under Subsonic External Air Flow". Aerospace Mechanics Journal, Vol. 15, No. 3, pp.127-139, 2020.(in persian)

19. Amabili, M. “Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates”. Cambridge University Press, 2008.

20. Soykasap, Ö., Mecitoğlu, Z. and Borat, O. “Dynamic Response of Composite Cylindrical Shells to Shock Loading”. Mathematical and Computational Applications, Vol. 1, No. 1, pp.85-96, 1996.

21. Sanders Jr, J.L. “An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells”. NASA Rep, Vol. 24. US Government Printing Office, 1959.

22. Bert C.W. and Kumar M., “Vibration of Cylindrical Shells of Bimodulus Composite Materials”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 81, No.1, pp.107-121, 1982.

23. Arthur, W. L. and Mohamad, S. Q. “Vibrations of Continuous Systems”. New York Chicago San Francisco, 2011.

24. Tiersten, H. F. “Linear Piezoelectric Plate Vibration”. plenum press, 1969.

25. Kraus, H. “Thin Elastic Shells , john Wiley , Sons , Inc , New York , USA 1967.

26. Kargarnovin. M. H., Najafzadeh. M. M., and Viliani, N. S. “Vibration Control of Functionally Graded Material Plate Patched with Piezoelectric Actuators and Sensors Under a Constant Electric Charge”. Smart Mater. Struct. Vol. 16, No. 4, pp. 1252-1259, 2007.

27. Qatu, M. S. “Vibration of Laminated Shells and Plates”. Academic Press, 2004.

28. Azarafza, R., Davar. A., Civalek. Ö. “Investigating Buckling and Free Vibration of Cylindrical Shells Multi-Layer Composite”, Fourteenth Annual Conference (International) Mechanical Engineering, 2006.