تحلیل کمانش ورق دایره‌ای همراه با تورق با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم

احمد حقانی [۱]
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

مهدی مندعلی [۲]
گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۶/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۵)

چکیده

تورق یکی از عیوب رایج در صفحات کامپوزیتی است که ممکن است در حین تولید، سوراخ‌کاری و یا بارگذاری در صفحه کامپوزیتی ایجاد شود. این عیب انعطاف‌پذیری، استحکام و کارایی صفحات و سازه‌های کامپوزیتی را تحت تأثیر قرار داده و آن را کاهش می‌دهد به نحوی که حتی ممکن است باعث شکست یک لایه یا شکست کامل در صفحه کامپوزیتی شود. در این تحقیق یک صفحه کامپوزیتی دایره‌ای با تورق دایره‌ای شکل تحت بار کمانشی در نظر گرفته می‌شود و با توجه به این‌که تورق رشد می‌کند و مرز تورق متحرک است، معادلات تعادل حاکم بر صفحه دایره‌ای با تورق دایره‌ای شکل با استفاده از روش حساب تغییرات با مرز متحرک به‌دست می‌آیند. تئوری که در این مقاله از آن برای یافتن معادلات تعادل حاکم بر صفحه مورد نظر استفاده شد تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم است. در نهایت برای دو ماده ایزوتروپیک و اورتوتروپیک بار کمانش بحرانی با استفاده از روش هموتوپی طیفی تعیین می‌شود. نتایج مقاله حاضر با نتایج موجود در تحقیقات دیگر مقایسه شده است که نتایج به‌دست‌آمده مطابقت خوبی را با نتایج مراجع دیگر نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ورق کامپوزیتی دایره‌ای، تورق، روش حل هموتوپی طیفی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

Analysis of Buckling of Circular Plate with Delamination by Using Third Order Shear Deformation Theory

A. Haghani
Department of Mechanical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

M. Mondali
Department of Aerospace Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

(Received: 11/ September/2018; Accepted: 16/ March/2019)

ABSTRACT

Delamination is one of the common flaws in the composite plates, which may be created during manufacturing, boring or loading in the composite plate. This flaw has an impact on the flexibility, strength and performance of composite plates and structures and reduces them, which may even result in a layer fracture or complete fracture in the composite plate. In this study, a circular composite plate with the circular delamination under buckling load is considered. Given that the delamination grows and the delamination boundary is movable, the equilibrium equations governing the circular plate with circular delamination is produced by using Calculus of Variations method with moving boundary. The theory used in this paper for finding equilibrium equations governing the mentioned plate is the third order shear deformation theory. Ultimately, for isotropic and orthotropic materials, the critical buckling load is determined by using spectral homotopy analysis method and the results of the present paper is compared with the results of other studies. The results show a good conformity with the other reference results.

Keywords: Circular composite plate, delamination, spectral homotopy analysis method, third order shear deformation theory

۱- دانشجوی دکتری، ahmad.eng82@gmail.com
۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): mondali@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

تورق[۱] یکی از عیوب اجتناب ناپذیر است که ممکن است در طی تولید، مونتاژ یا بارگذاری سازه‌های کامپوزیتی بوجود آید. این عیوب خواصی مانند استحکام، فرکانس طبیعی و انعطاف‌پذیری سازه‌های کامپوزیتی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. علاوه‌بر این، رشد تورق ممکن است باعث شکست کلی در لایه‌های کامپوزیتی شود [۳-۱]. بنابراین، مطالعه تورق یکی از موضوعات خیلی مهم در حیطه علم کامپوزیت می‌باشد.

از جمله تحقیقات انجام شده در زمینه رفتار کمانشی صفحات می‌توان به مدل نمودن این رفتار به کمک روش اجزای محدود و روش‌های عددی [۵-۴] و روش‌های آزمایشگاهی [۷-۶] اشاره نمود.

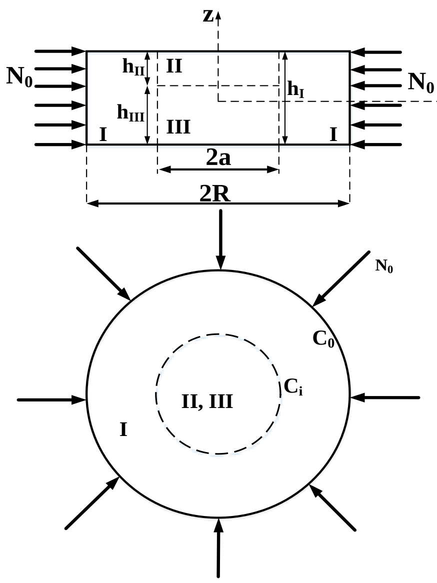
تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول[۲] یکی از مهم‌ترین تئوری‌های صفحه‌ای می‌باشد که برای مطالعه رفتار خمشی و کمانشی صفحات و تیرها کاربرد دارد. برخی از تحقیقات انجام شده از این تئوری و روش حساب تغییرات با مرز متحرک استفاده نموده‌اند تا رفتار خمشی و کمانشی صفحه [۹-۸] را بررسی نمایند. تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول توزیع تنش برشی خارج از صفحه مثبت ارائه می‌کند و بنابراین، به یک ضریب تصحیح برشی برای روابط نیروی برشی احتیاج دارد [۱۰].

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم[۳] میدان تنش دقیق‌تری ارائه می‌کند و همچنین احتیاجی به اعمال ضریب تصحیح برشی ندارد. علاوه بر این، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم شرط مرزی سطح آزاد از تنش را در بالا و پایین صفحه ارضا می‌کند [۱۰]. تعدادی از تحقیقات از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم در بررسی رفتار کمانشی و خمشی صفحات کامپوزیتی استفاده نموده‌اند [۱۲-۱۱].

از بررسی تحقیقات انجام شده این نتیجه به‌دست آمد که تا به حال تحقیقات اندکی در مورد استفاده از تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه اول و کلاسیک در بررسی رفتار کمانشی یک صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل انجام شده است. همچنین روش‌های حلی که در این تحقیقات استفاده شده است در مقایسه با روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی دارای همگرایی و دقت ضعیف‌تری می‌باشد. در مقاله حاضر با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم و روش حساب تغییرات با مرز متحرک معادلات حاکم بر صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل به‌دست می‌آید. سپس معادلات حاکم با استفاده از روش هموتوپی طیفی که جزء روش‌های نیمه تحلیلی می‌باشد حل می‌شوند و بار کمانش بحرانی به‌دست می‌آید.

۲- معادلات حاکم

شکل **۱** یک صفحه کامپوزیتی دایره‌ای با یک تورق دایره‌ای در مرکز آن را نشان می‌دهد. شعاع صفحه R می‌باشد و در مرز خارجی تحت بار کمانشی N_0 قرار دارد و همچنین شرط مرزی در مرز خارجی از نوع گیردار است با این تغییر که از جابجایی صفحه در راستای شعاعی جلوگیری نشده است. با توجه به موقعیت در نظر گرفته شده برای تورق در صفحه دایره‌ای، این صفحه به سه ناحیه با مرزهای C_j که $(j= i, ii, iii)$ است تقسیم می‌شود.



شکل (۱): صفحه دایره‌ای با تورق دایره‌ای شکل تحت بار کمانشی.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم شرایط مرزی آزاد از تنش را در بالا و پایین صفحه خودبخود ارضا می‌کند و بنابراین به ضریب تصحیح برشی نیازی ندارد [۱۰]. میدان جابجایی صفحه دایره‌ای با در نظر گرفتن شرط متقارن محوری و مختصات استوانه‌ای به‌صورت رابطه (۱) است.

1- Delamination
2- First order shear deformation theory
3- Third order shear deformation theory

$$U_r(r,z)=u_r(r)+z\varphi(r)-\frac{4z^3}{3h^2}\left[\varphi(r)+u_{z,r}\right]$$
$$U_z(r,z)=u_z(r) \qquad (۱)$$

که در این رابطه، $u_r(r)$ و $u_z(r)$ به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی صفحه میانی در راستای شعاعی و عرضی می‌باشند و $\varphi(r)$ تابع چرخش صفحه میانی حول محور r می‌باشد.

روابط کرنش جابجایی برای صفحه میانی صفحه دایره‌ای کامپوزیتی با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم و میدان کرنش فون کارمن[۱] به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۰]:

$$\left\{\varepsilon^{(0)}\right\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}^{(0)}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}\\ \gamma_{r\theta}^{(0)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_{r,r}+\frac{1}{2}\left(u_{z,r}\right)^2\\ \frac{u_r}{r}\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\varepsilon^{(1)}\right\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}^{(1)}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\\ \gamma_{r\theta}^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi_{,r}\\ \frac{\varphi}{r}\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\varepsilon^{(3)}\right\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}^{(3)}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)}\\ \gamma_{r\theta}^{(3)}\end{Bmatrix}=-c_1\begin{Bmatrix}\varphi_{,r}+u_{z,rr}\\ \frac{\varphi}{r}+\frac{u_{z,r}}{r}\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

$$\left\{\gamma^{(0)}\right\}=\begin{Bmatrix}\gamma_{\theta z}^{(0)}\\ \gamma_{rz}^{(0)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \varphi+u_{z,r}\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\gamma^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}\gamma_{\theta z}^{(2)}\\ \gamma_{rz}^{(2)}\end{Bmatrix}=-c_2\begin{Bmatrix}0\\ \varphi+u_{z,r}\end{Bmatrix}$$

که $c_1=4/\left(3h^2\right)$ و $c_2=3c_1$ می‌باشد. با توجه به شکل **۱** انرژی پتانسیل کل برای سه ناحیه ایجاد شده از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

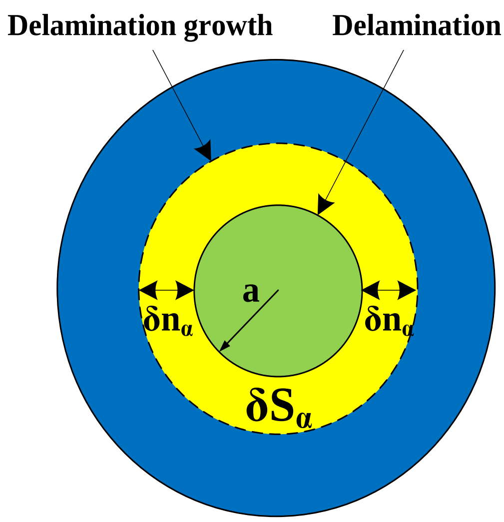
$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=i}^{iii}\iint_{S_\alpha}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)\alpha}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\alpha}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)\alpha}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\alpha} & \mathbf{B}^{\alpha} & \mathbf{E}^{\alpha}\\ \mathbf{B}^{\alpha} & \boldsymbol{\Delta}^{\alpha} & \boldsymbol{\Phi}^{\alpha}\\ \mathbf{E}^{\alpha} & \boldsymbol{\Phi}^{\alpha} & \mathbf{H}^{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)\alpha}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\alpha}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)\alpha}\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}^{(0)\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}^{(2)\alpha}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\alpha'} & \boldsymbol{\Delta}^{\alpha'}\\ \boldsymbol{\Delta}^{\alpha'} & \boldsymbol{\Phi}^{\alpha'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}^{(0)\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}^{(2)\alpha}\end{bmatrix}\right\}dS_\alpha \qquad (۳)$$
$$-\int_{C_i}N_{r=R}^{i}u_{r_{r=R}}^{i}\,dC_i$$

که در این رابطه **A**، **B** و **Δ** به ترتیب ماتریس‌های سختی کششی، کوپلینگ و خمشی می‌باشند. همچنین ماتریس‌های **E**، **Φ** و **H** ماتریس‌های سختی مرتبه بالا هستند. ماتریس‌های مذکور طبق رابطه زیر محاسبه می‌شوند [۱۰].

$$\left(A_{ij},B_{ij},\Delta_{ij},E_{ij},\Phi_{ij},H_{ij}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\bar{Q}_{ij}^{(k)}\left(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6\right)dz,\; i,j=1,2,6$$
$$(۴)$$
$$\left(A'_{ij},\Delta'_{ij},\Phi'_{ij}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\bar{Q}_{ij}^{(k)}\left(1,z^2,z^4\right)dz,\; i,j=4,5$$

در این رابطه، $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ ضرایب سختی لایه k-ام می‌باشد.

با توجه به شکل **۲** می‌توان دریافت که رشد تورق به اندازه‌ی δn_α باعث ایجاد تغییر سطح δS_α در هریک از سه ناحیه می‌شود. به منظور یافتن معادلات غیر خطی حاکم و شرایط مرزی مربوط به ورق دایروی با تورق دایره‌ای شکل و با توجه به اینکه مرز تورق به دلیل رشد تورق متحرک می‌باشد، به کمک روش حساب تغییرات با مرز متحرک، تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل کل محاسبه می‌شود که تغییرات مرتبه اول رابطه (۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۳].



شکل (۲): رشد تورق شعاعی.

1- von Karman strain field

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi = \sum_{\alpha=i}^{iii} \iint_{S_\alpha} \Big\{ & N_r^{\alpha}\delta\left(u_{r,r}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(u_{z,r}^{\alpha}\right)^2\right) \\
& +N_\theta^{\alpha}\delta\left(\frac{u_r^{\alpha}}{r}\right)+M_r^{\alpha}\delta\left(\varphi_{,r}^{\alpha}\right)+M_\theta^{\alpha}\delta\left(\frac{\varphi^{\alpha}}{r}\right) \\
& -c_1^{\alpha}P_r^{\alpha}\delta\left(\varphi_{,r}^{\alpha}+u_{z,rr}^{\alpha}\right)-c_1^{\alpha}P_\theta^{\alpha}\delta\left(\frac{\varphi^{\alpha}}{r}+\frac{u_{z,r}^{\alpha}}{r}\right) \\
& +Q_r^{\alpha}\delta\left(\varphi^{\alpha}+u_{z,r}^{\alpha}\right) \\
& -c_2^{\alpha}R_r^{\alpha}\delta\left(\varphi^{\alpha}+u_{z,r}^{\alpha}\right)\Big\} dS_\alpha \\
& +\frac{1}{2}\sum_{\alpha=i}^{iii}\oint_{C_\alpha}\Big\{N_r^{\alpha}\left(u_{r,r}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(u_{z,r}^{\alpha}\right)^2\right) \\
& +N_\theta^{\alpha}\left(\frac{u_r^{\alpha}}{r}\right)+M_r^{\alpha}\left(\varphi_{,r}^{\alpha}\right)+M_\theta^{\alpha}\left(\frac{\varphi^{\alpha}}{r}\right) \\
& -c_1^{\alpha}P_r^{\alpha}\left(\varphi_{,r}^{\alpha}+u_{z,rr}^{\alpha}\right)-c_1^{\alpha}P_\theta^{\alpha}\left(\frac{\varphi^{\alpha}}{r}+\frac{u_{z,r}^{\alpha}}{r}\right) \\
& +Q_r^{\alpha}\left(\varphi^{\alpha}+u_{z,r}^{\alpha}\right) \\
& -c_2^{\alpha}R_r^{\alpha}\left(\varphi^{\alpha}+u_{z,r}^{\alpha}\right)\Big\}\delta d_\alpha dC_\alpha-\oint_{C_i}N_{r=R}^{i}u_{r_{r=R}}^{i}dC_i
\end{aligned} \tag{۵}
$$

در این رابطه، فرض شده است که سه ناحیه موجود متقارن هستند و بنابراین، ماتریس‌های **B** و **E** برابر صفر می‌شوند. همچنین در این رابطه N، M و P به ترتیب نیرو، ممان و نیروی مرتبه بالا می‌باشند. علاوه‌بر این، پارامترهای Q و R به ترتیب نیروی برشی عرضی و نیروی برشی عرضی مرتبه بالا هستند.

با توجه به این‌که میدان‌های جابجایی و چرخش برای هر ناحیه پیوسته هستند بنابراین تابع جابجایی عرضی $u_z(r)$، مشتق مرتبه اول تابع جابجایی عرضی $u_{z,r}(r)$ و تابع چرخش صفحه میانی حول محور r یعنی $\varphi(r)$ بایستی در مرز نوک تورق دایره‌ای شکل یعنی $r=a$ برای سه ناحیه پیوسته باشند. علاوه‌بر این، جابجایی شعاعی در طول ضخامت ناحیه دو پیوسته می‌باشد یعنی $U_r^{i}(r,z)=U_r^{ii}(r,z)$. همچنین به‌طور مشابه در طول ضخامت ناحیه سه $U_r^{i}(r,z)=U_r^{iii}(r,z)$ می‌باشد.

با استفاده از رابطه (۵) و انتگرال‌گیری جز به جز و همچنین با توجه به متحرک بودن مرز تورق، معادلات غیرخطی حاکم بر صفحه دایره‌ای همراه با تورق دایره‌ای شکل برای هر یک از سه ناحیه طبق روابط زیر حاصل می‌شود [۱۴-۱۱].

$$
\delta u_r^{\alpha}:-\frac{d}{dr}\left(rN_r^{\alpha}\right)+N_\theta^{\alpha}=0 \tag{۶}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta u_z^{\alpha}: & -\frac{d}{dr}\left(rN_r^{\alpha}u_{z,r}^{\alpha}\right)-c_1^{\alpha}\frac{d^2}{dr^2}\left(rP_r^{\alpha}\right) \\
& +c_1^{\alpha}\frac{d}{dr}\left(P_\theta^{\alpha}\right)-\frac{d}{dr}\left(rQ_r^{\alpha}\right)+c_2^{\alpha}\frac{d}{dr}\left(rR_r^{\alpha}\right)=0
\end{aligned} \tag{۷}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi^{\alpha}: & -\frac{d}{dr}\left(rM_r^{\alpha}\right)+M_\theta^{\alpha}+c_1^{\alpha}\frac{d}{dr}\left(rP_r^{\alpha}\right) \\
& -c_1^{\alpha}P_\theta^{\alpha}+rQ_r^{\alpha}-c_2^{\alpha}rR_r^{\alpha}=0
\end{aligned} \tag{۸}
$$

همچنین شرایط پیوستگی نیروها و ممان‌ها در مرز تورق به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$
\delta u_r^{i}:N_r^{i}-N_r^{ii}-N_r^{iii}=0 \tag{۹}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta u_z^{i}: & N_r^{i}u_{z,r}^{i}+\frac{c_1^{i}}{r}\frac{d\left(rP_r^{i}\right)}{dr}-\frac{c_1^{i}}{r}P_\theta^{i}+Q_r^{i}-c_2^{i}R_r^{i} \\
& -\left(N_r^{ii}u_{z,r}^{ii}+\frac{c_1^{ii}}{r}\frac{d\left(rP_r^{ii}\right)}{dr}\right. \\
& \left.-\frac{c_1^{ii}}{r}P_\theta^{ii}+Q_r^{ii}-c_2^{ii}R_r^{ii}\right) \\
& -\left(N_r^{iii}u_{z,r}^{iii}+\frac{c_1^{iii}}{r}\frac{d\left(rP_r^{iii}\right)}{dr}\right. \\
& \left.-\frac{c_1^{iii}}{r}P_\theta^{iii}+Q_r^{iii}-c_2^{iii}R_r^{iii}\right)=0
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi^{i}: & M_r^{i}-M_r^{ii}-M_r^{iii}-c_1^{i}P_r^{i} \\
& +c_1^{ii}P_r^{ii}+c_1^{iii}P_r^{iii}-\left(\alpha^{ii}N_r^{ii}+\alpha^{iii}N_r^{iii}\right)=0
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta u_{z,r}^{i}: & -c_1^{i}P_r^{i}+c_1^{ii}P_r^{ii}+c_1^{iii}P_r^{iii} \\
& +\left(\beta^{ii}N_r^{ii}+\beta^{iii}N_r^{iii}\right)=0
\end{aligned} \tag{۱۲}
$$

علاوه‌بر این، بایستی اشاره نمود که در مرکز صفحه یعنی $r=0$ مقدار جابجایی در راستای شعاعی برای هر دو ناحیه دو و سه باید برابر صفر باشد و همچنین در $r=R$ با توجه به گیردار بودن مرز خارجی صفحه دایره‌ای $u_z^{i}(r)=0$ و $u_{z,r}^{i}(r)=0$ می‌باشند.

۳- روش حل

روند تحلیل رفتار کمانشی صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل به دو بخش تقسیم می‌شود. در بخش اول حل فرض

می‌شود که بار کمانشی به‌صورت شبه استاتیکی اعمال گردد و بنابراین، صفحه مسطح باقی می‌ماند و جابجایی عرضی و زاویه چرخش برابر صفر می‌شود. سپس با استفاده از معادلات حاکم بر حسب جابجایی‌ها و چرخش، مؤلفه شعاعی جابجایی برای سه ناحیه به‌دست می‌آید. قسمت دوم حل شامل تغییرات کوچک قابل قبول در جابجایی‌ها حول نقطه تعادل می‌باشد [۱۵].

جواب قسمت اول از حل معادلات (۱۳) تا (۱۵) که معادلات حاکم بر حسب جابجایی‌ها می‌باشد حاصل می‌گردد. در این معادلات بالانویس P معرف حل قسمت اول است.

$$u_z^{\alpha,P}=0,\quad \alpha=i,ii,iii \tag{۱۳}$$

$$\varphi^{\alpha,P}=0,\quad \alpha=i,ii,iii \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned}&-rA_{11}^{\alpha}\frac{d^2u_r^{\alpha,P}(r)}{dr^2}-A_{11}^{\alpha}\frac{du_r^{\alpha,P}(r)}{dr}\\&\quad+A_{22}^{\alpha}\frac{u_r^{\alpha,P}(r)}{r}=0,\quad \alpha=i,ii,iii\end{aligned} \tag{۱۵}$$

البته شرایط مرزی در مرز تورق و در مرز خارجی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$N_{rr}^{i,P}=N_0,\quad N_{\theta\theta}^{i,P}=0,\qquad r=R \tag{۱۶}$$

$$u_r^{i,P}=u_r^{ii,P},\quad u_r^{i,P}=u_r^{iii,P},\qquad r=a \tag{۱۷}$$

که $N_{rr}^{i,P}$ و $N_{\theta\theta}^{i,P}$ به ترتیب حل قسمت اول مؤلفه‌های شعاعی و مماسی بردار نیروی $\{N\}$ برای ناحیه یک می‌باشند. با حل معادله (۱۵) به همراه شرایط مرزی بالا جابجایی شعاعی برای تمامی نواحی محاسبه می‌شود.

پس از حل قسمت اول مقادیر $N_{rr}^{i,P}$، $N_{rr}^{ii,P}$ و $N_{rr}^{iii,P}$ تعیین می‌شوند. معادلات تعادل حاکم بر سه ناحیه برای قسمت دوم از حل به فرم زیر ارائه می‌گردند.

$$-\frac{d}{dr}\left(rN_r^{\alpha,a}\right)+N_\theta^{\alpha,a}=0 \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{d}{dr}\left(rN_r^{\alpha,P}u_{z,r}^{\alpha,a}\right)-c_1^{\alpha}\frac{d^2}{dr^2}\left(rP_r^{\alpha,a}\right)+c_1^{\alpha}\frac{d}{dr}\left(P_\theta^{\alpha,a}\right)\\&\quad-\frac{d}{dr}\left(rQ_r^{\alpha,a}\right)+c_2^{\alpha}\frac{d}{dr}\left(rR_r^{\alpha,a}\right)=0\end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{d}{dr}\left(rM_r^{\alpha,a}\right)+M_\theta^{\alpha,a}+c_1^{\alpha}\frac{d}{dr}\left(rP_r^{\alpha,a}\right)\\&\quad-c_1^{\alpha}P_\theta^{\alpha,a}+rQ_r^{\alpha,a}-c_2^{\alpha}rR_r^{\alpha,a}=0\end{aligned} \tag{۲۰}$$

در این روابط بالانویس a به حل قسمت دوم اشاره دارد. معادلات تعادل بالا با استفاده از روش هموتوپی طیفی[1] که در قسمت بعدی معرفی می‌گردد حل می‌شوند.

۴-روش هموتوپی طیفی

یکی از روش‌های نیمه تحلیلی قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیلی غیرخطی روش هموتوپی می‌باشد که همگرایی سریع و موفقی دارد [۱۱]. به منظور برطرف نمودن محدودیت‌هایی که در روش هموتوپی استاندارد وجود دارد آن را با برخی از روش‌های عددی ترکیب می‌کنند که روش به‌دست‌آمده روش هموتوپی طیفی می‌باشد [۱۶]. این روش محدودیت‌های روش قبلی را ندارد و انعطاف‌پذیری بیشتری را نسبت به روش قبلی دارد [۱۶]. بنابراین، در اینجا برای حل معادلات غیرخطی روش هموتوپی طیفی استفاده می‌شود. در ادامه به معرفی اساس این روش پرداخته می‌شود. در حالت کلی یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی می‌تواند به فرم زیر در نظر گرفته شود. که در این رابطه N اپراتور غیر خطی، $y(r)$ تابع مجهول و r متغیر مستقل می‌باشد [۱۷].

$$N\left[y(r)\right]=0 \tag{۲۱}$$

ترکیب هموتوپی در حالت کلی طبق رابطه زیر ارائه می‌شود [۱۷].

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}\left[\phi(r;q);y_0(r),H(r),\hbar,q\right]=\\&\quad(1-q)\left\{L\left[\phi(r;q)-y_0(r)\right]\right\}\\&\quad-q\hbar H(r)N\left[\phi(r;q)\right]\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در این رابطه، $y_0(r)$ تابع حدس اولیه برای $y(r)$، $H(r)$ تابع کمکی غیر صفر، $\hbar$ یک پارامتر کمکی غیر صفر و L یک اوپراتور دیفرانسیلی خطی می‌باشد. علاوه‌بر این، با تغییر پارامتر q از صفر تا یک جواب حل از تابع حدس اولیه به جواب دقیق تغییر می‌یابد. از برابر صفر قرار دادن سمت راست رابطه (۲۲) معادله تغییر شکل مرتبه صفر حاصل می‌شود [۱۷].

$$\begin{aligned}&(1-q)\left\{L\left[\phi(r;q)-y_0(r)\right]\right\}=\\&\quad q\hbar H(r)N\left[\phi(r;q)\right]\end{aligned} \tag{۲۳}$$

در رابطه بالا اگر مقدار q برابر صفر قرار داده شود $\phi(r;0)=y_0(r)$ حاصل می‌شود و چون تابع کمکی و

1- Spectral homotopy analysis method

پارامتر کمکی غیر صفر هستند، وقتی مقدار q برابر یک می‌شود $\varphi(r;1)=y(r)$ به‌دست می‌آید. همچنین مشتق مرتبه m-ام $y(r)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۷].

$$y_m(r)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(r;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} \tag{۲۴}$$

طبق قضیه تیلور[۱] بسط تابع $y(r)$ به‌صورت یک سری طبق رابطه زیر ارائه می‌شود.

$$y(r)\approx\sum_{k=0}^{m} y_k(r) \tag{۲۵}$$

همچنین معادله حاکم بر $y_m(r)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$L\left[y_m(r)\right]=\chi_m L\left[y_{m-1}(r)\right] +\hbar H(r) R_m\left(\bar{y}_{m-1}(r),r\right) \tag{۲۶}$$

که در رابطه بالا χ_m و R_m به ترتیب طبق روابط زیر محاسبه می‌شود.

$$\chi_m=\begin{cases}0 & m\le 1\\ 1 & otherwise\end{cases} \tag{۲۷}$$

$$R_m\left(\bar{y}_{m-1}(r),r\right)= \frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} N\left[\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(r) q^n\right]\right\}\bigg|_{q=0} \tag{۲۸}$$

تابع $y_m(r)$ از حل معادله خطی $L[y_m(r)]$ قابل محاسبه است. این معادله توسط نرم‌افزار بررسی تحلیلی مانند میپل[۲] حل خواهد شد. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد روش هموتوپی علاوه‌بر همگرایی و خصوصیات مطلوبی که دارد دارای یکسری محدودیت‌هایی نیز می‌باشد برای بر طرف نمودن این محدودیت‌ها معادلات دیفرانسیلی خطی رابطه (۲۶) که از روش هموتوپی به‌دست آمده است به کمک روش ایستگاهی متعامد حل می‌شود که در این روش نقاط ایستگاهی از ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد چبیشف[۳] انتخاب می‌شود [۱۶]. در این‌صورت تابع $y_k(r)$ که شرایط مرزی را ارضا می‌کند به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$y_k(r)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_i P_i(r) \tag{۲۹}$$

که در رابطه بالا، $P_i(r)$ چند جمله‌ای متعامد مرتبه i-ام لژاندر[۴] می‌باشد و λ_i ضرایب مجهولی هستند که بایستی تعیین شوند. همچنین در این روش رابطه (۲۶) مطابق رابطه زیر می‌شود.

$$L\left[y_m(r_j)\right]=\chi_m L\left[y_{m-1}(r_j)\right] +\hbar H(r_j) R_m\left(\bar{y}_{m-1}(r_j)\right),\quad j=0,1,\dots,M \tag{۳۰}$$

که در رابطه بالا، r_j ریشه‌های چند جمله‌ای متعامد چبیشف می‌باشد.

در نهایت بار کمانش بحرانی N_{cr} با استفاده از روش حل هموتوپی طیفی تعیین می‌شود. بدین صورت که به‌منظور داشتن جواب غیر از صفر برای بار کمانش بحرانی ماتریس ضرایب $\mathbf{M}$ بایستی منفرد باشد. بنابراین، دترمینان این ماتریس بایستی برابر صفر شود و از این طریق بار کمانش بحرانی به‌دست می‌آید.

۵- نتایج و بحث

برای اعتبارسنجی روش حل، نتایج حاضر با نتایج به‌دست‌آمده توسط چن[۵] و دائی[۶] [۱۸] که از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش ایستگاهی متعامد[۷] استفاده نمودند، مقایسه می‌شود. جنس ماده در این قسمت ایزوتروپیک با مدول یانگ[۸] ۱۳۷/۹ گیگاپاسکال و ضریب پوآسون[۹] ۰/۳ انتخاب می‌شود [۱۱]. شعاع خارجی صفحه R برابر ۱ متر و ضخامت هر لایه از کامپوزیت ۲/۵ میلیمتر و همچنین تعداد لایه‌های نواحی یک، دو و سه به ترتیب برابر ۴۱، ۴ و ۳۷ لایه می‌باشد.

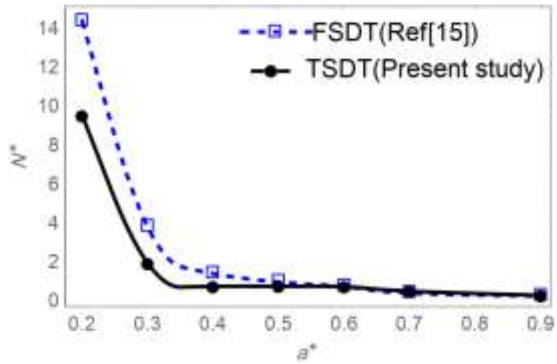
$$N^*=\frac{N_0 R^2}{\Delta_{11}^i} \tag{۳۱}$$

$$a^*=\frac{a}{R} \tag{۳۲}$$

شکل **۳** تغییرات بار کمانش بحرانی را برحسب شعاع تورق نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است، مطابقت قابل قبولی بین نتایج این مقاله با نتایج چن و دائی [۱۸] وجود دارد. همچنین با توجه به این شکل می‌توان بیان کرد که با افزایش شعاع تورق بدون بعد از ۰/۲ به ۰/۳ شیب کاهش نیروی کمانش بحرانی شدید است که علت آن کاهش مقاومت صفحه در اثر افزایش شعاع تورق است و از

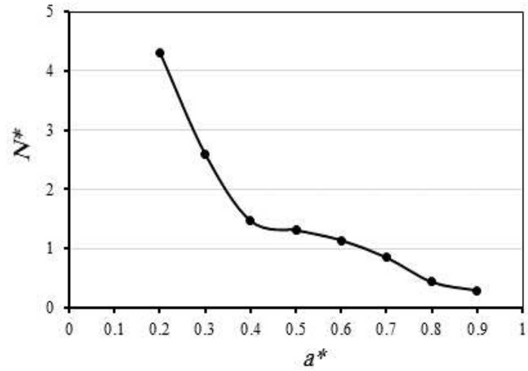
1- Taylor's theorem
2- Maple
3- Chebyshev polynomial
4- Legendre orthogonal polynomial
5- Chen
6- Dai
7- Orthogonal collocation method
8- Young modulus
9- Poison's ratio

شعاع ۰/۳ تا ۰/۹ بار کمانش بحرانی با شیب یکنواختی کاهش می‌یابد. در این شکل پارامترهای N^* و a^* به ترتیب بار بحرانی بدون بعد و شعاع تورق بدون بعد هستند که طبق رابطه‌های بالا محاسبه می‌شوند.



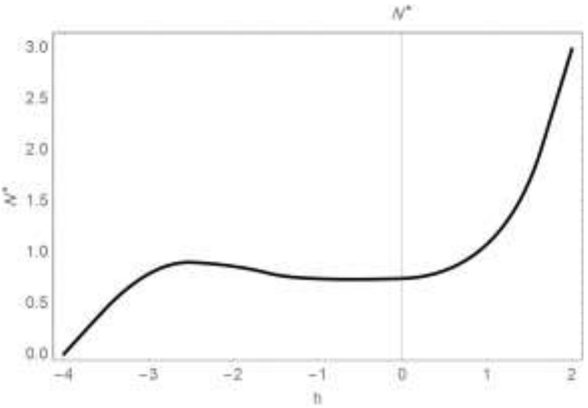
شکل (۳): بار کمانش بحرانی برحسب شعاع تورق برای یک ماده ایزوتروپیک.

شکل **۴** نمودار تغییرات بار کمانش بحرانی را برحسب شعاع تورق برای یک ماده اورتوتروپیک با مشخصات مدول یانگ شعاعی GPa ۱۳۷/۹، مدول یانگ محیطی GPa ۵۸/۶ ، مدول برشی GPa ۵/۸۶ و ضریب پوآسون ۰/۲۱ نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است همانند ماده همسانگرد با افزایش شعاع تورق بدون بعد از ۰/۲ تا ۰/۴ شیب کاهش بار کمانش بحرانی شدید است که این نشان می‌دهد که در اثر افزایش تورق مقاومت صفحه در برابر کمانش کاهش می‌یابد و از شعاع تورق بدون بعد ۰/۴ تا ۰/۹ بار کمانش بحرانی با شیب یکنواختی کاهش می‌یابد.

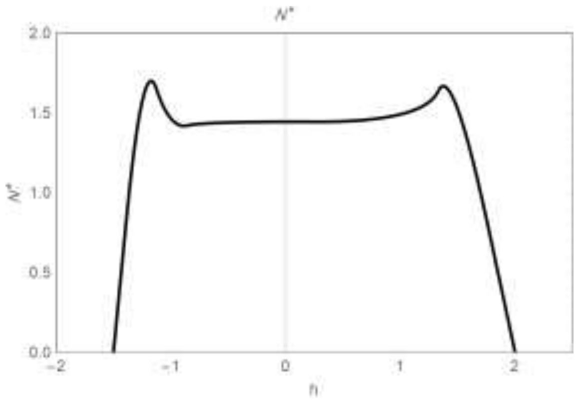


شکل (۴): بار کمانش بحرانی برحسب شعاع تورق برای یک ماده اورتوتروپیک.

در اینجا بایستی بیان نمود که برای پارامتر کمکی $\hbar$ در روش هموتوپی بایستی نمودار منحنی $\hbar$ برای یک کمیت فیزیکی چک شود [۱۷]. در این مقاله کمیت بار کمانش بحرانی بدون بعد برحسب پارامتر کمکی $\hbar$ رسم شد که شکل **۵** این نمودار را برای دو ماده ایزوتروپیک و اورتوتروپیک نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است برای پارامتر کمکی $\hbar$ در بازه [۱ ,۱-] نمودار افقی می‌شود و این نشان دهنده عدم وابستگی حل به پارامتر $\hbar$ و همگرایی حل می‌باشد. با توجه به شکل مقدار $\hbar$ برابر ۱- و تابع کمکی $H^\alpha(r)=r^3\xi^\alpha(r)\mathrm{csch}(a^*)$ انتخاب می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل (۵): نمودار همگرایی پارامتر کمکی $\hbar$ برای ماده الف) ایزوتروپیک، ب) اورتوتروپیک

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا معادلات حاکم بر صفحه دایروی با تورق دایره‌ای شکل با استفاده از روش حساب تغییرات با مرز متحرک و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم بدست آمدند. سپس با استفاده از روش حل هموتوپی طیفی

معادلات حاکم حل شدند و بار کمانش بحرانی محاسبه گردید.

از بررسی نتایج به‌دست‌آمده از این تحقیق این نتیجه حاصل گردید که برای هر دو ماده ایزوتروپیک و اورتوتروپیک با افزایش شعاع تورق بار کمانش بحرانی ابتدا با یک شیب تند کاهش می‌یابد که علت آن کاهش شدید مقاومت صفحه در برابر کمانش در اثر افزایش شعاع تورق است و سپس بار کمانش بحرانی با یک شیب یکنواخت با افزایش شعاع تورق کاهش می‌یابد. همچنین در مقایسه نتایج با نتایج منابع دیگر مطابقت قابل قبولی بین نتایج این مقاله با نتایج مقالات دیگر وجود دارد.

۷- مراجع

1. Afrouzian, A., Pol, M. H., Liaghat, G. H. and Aleni, H. M. "An Experimental Investigation on Mode-II Interlaminar Fracture Toughness of Nanosilica Modified Glass/Epoxy Fiber-Reinforced Laminates", Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 3, pp. 283-290, 2015. (In Persian)
2. Shokrieh, M. M. and Abdolvand, H. R. "Three-Dimensional Thermodynamical Modeling of Fire Effect on Polymer Matrix Composites, Considering Variation Of Thermal Properties", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 5, No. 4, pp. 15-32, 2010. (In Persian)
3. Malekzadeh Fard, K., Nazari, A., Mozaffari, A. and Ebrahimi, M. "The Effect of Appling Functionally Graded Core to Decrease Delamination of Composite Sandwich Panel Under Transverse Load", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 8, No. 1, pp. 71-84, 2012. (In Persian)
4. Hajko, P., Tejchman, J. and Wójcik, M. "Investigations of Local/Global Buckling of Cylindrical Metal Silos with Corrugated Sheets and Open-Sectional Column Profiles", Int. J. Thin-Walled Structures, Vol. 123, pp. 341-350, 2018.
5. Ma, Y., Cheng, X., Wang, Z., Guo, X., Zhang, J. and Xu, Y. "Buckling and Post-Buckling Behaviors of 1/3 Composite Cylindrical Shell With an Opening", Int. J. STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES, Vol. 27, No. 5, pp. 555-566, 2018.
6. Fratamico, D. C., Torabian, S., Zhao, X., Rasmussen, K. J. and Schafer, B. W. "Experiments on the Global Buckling and Collapse of Built-Up Cold-Formed Steel Columns", Int. J. CONSTRUCTIONAL STEEL RESEARCH, Vol. 144, No. 1, pp. 65-80, 2018.
7. Watkins, R. T., Reedlunn, B., Daly, S. and Shaw, J. A. "Uniaxial, Pure Bending, and Column Buckling Experiments on Superelastic Niti Rods and Tubes", Int. J. Solids and Structures, Vol. 146, No. 1, pp. 1-28, 2018.
8. Park, M. and Choi, D-H. "A Two-Variable First-Order Shear Deformation Theory Considering In-Plane Rotation for Bending, Buckling and Free Vibration Analyses of Isotropic Plates", Int. J. Applied Mathematical Modelling, Vol. 61, No. 1, pp. 49-71, 2018.
9. Amabili, M. "Nonlinear Vibrations and Stability of Laminated Shells Using a Modified First-Order Shear Deformation Theory", European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 68, No. 1, pp. 75-87, 2018.
10. Reddy, J. N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory And Analysis", CRC press, 2004.
11. Haghani, A., Mondali, M. and Faghidian, S. "Linear and Nonlinear Flexural Analysis of Higher-Order Shear Deformation Laminated Plates with Circular Delamination", Int. J. Acta Mechanica, Vol. 229, No. 4, pp. 1631-1648, 2018.
12. Shiri, M. G. and Jaamialahmadi, A. "Buckling Analysis of Intelligent Nanoplate under Inplane Loading Based on Nonlocal Elasticity and Shear and Normal Deformation Theories", Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 2, pp. 427-438, 2017. (In Persian)
13. Bolza, O. "Lectures on The Calculus of Variations", Courier Dover Publications, 2018.
14. Haghani, A. "The Solution of The Nonlinear Equations of Delamination in Composite Plates Using Modified Third Order Shear Deformation Theory", Ph.D. Thesis, Islamic azad university science and research branch, pp.93-105, 2017. (In Persian)
15. Simitses, G., Sallam, S. and Yin, W. "Effect of Delamination of Axially Loaded Homogeneous Laminated Plates", AIAA journal, Vol. 23, No. 9, pp. 1437-1444, 1985.
16. Motsa, S., Sibanda, P., Awad, F. and Shateyi, S. "A New Spectral-Homotopy Analysis Method for the MHD Jeffery–Hamel Problem", Int. J. Computers & Fluids, Vol. 39, No. 7, pp. 1219-1225, 2010.
17. Liao, S. "Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method", CRC press, 2003.
18. Chen, D. and Dai, L. "Delamination Growth of Laminated Circular Plates Under In-Plane Loads and Movable Boundary Conditions", Int. J. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 18, No. 11, pp. 3238-3249, 2013.