

تحلیل ضربه سرعت‌پایین ورق چندلایه مرکب با کمک قانون برخورد اصلاح یافته

امیرحسین آذرینیا^۲کرامت ملک‌زاده فرد^۱

دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(تاریخ دریافت: ۹۷/۱۲/۱؛ تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۹/۱۲)

چکیده

در این مقاله یک قانون برخورد اصلاح‌شده جدید برای برخورد ضربه زننده با سرعت‌پایین بر روی ورق‌های مرکب چندلایه ارائه می‌گردد. در این روش برای اولین بار با ارائه یک فرایند حل تحلیلی جدید با کمک‌گیری از اصل انرژی پتانسیل کمینه و استفاده از رابطه توانی غیرخطی تماس بین ضربه زننده و سازه هدف، ضرایب مجهول قانون توانی تماس به‌صورت صریح به‌دست می‌آید. بر این اساس ضرایب قانون تماس برای انواع مختلفی از مسائل ضربه با سرعت‌پایین در ورق‌های چندلایه مرکب محاسبه گردیده است. به کمک این روش جدید، محدوده معتبر جهت استفاده از قانون هرترز برای ورق‌های چندلایه مرکب به‌دست می‌آید. با استفاده از این روش، علاوه بر کاهش زمان حل، فرایند حل مسئله با همگرایی مناسبی انجام می‌شود. قانون برخورد جدید نشان می‌دهد که برای هر مسئله برخورد این قانون از نظر مقادیر ضرایب، منحصر به فرد می‌باشد. از طرفی این قانون نشان می‌دهد که ضرایب استفاده‌شده در آن به‌شدت وابسته به شرایط مرزی، خصوصیات هندسی و موادی، سازه هدف و ضربه زننده می‌باشد. نتایج به‌دست آمده از این روش، تطابق خوبی با دیگر نتایج تجربی و عددی دارد. در این روش پاسخ نیرو-زمان، پاسخ سازه به ضربه در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و اثرات پارامترهای فیزیکی و هندسی از قبیل جرم، سرعت و قطر ضربه زننده، همچنین ابعاد سازه هدف بر روی تاریخچه نیرو بررسی می‌شود.

کلیدواژگان: ضربه با سرعت‌پایین، ورق‌های چندلایه مرکب، قانون تماس اصلاح‌شده جدید، انرژی پتانسیل کل

Low Velocity Impact Analysis of Laminated Composite Plates with Using Modified Contact Law

K. Malekzadeh Fard²A.H. Azarnia¹

Malek Ashtar University of Technology Malek Ashtar University of Technology

(Received: 09/February/2019 ; Accepted: 03/December/2019)

ABSTRACT

In the present paper, a new systematic iterative analytical procedure for low-velocity impact analysis of composite plates is presented. In this method, assuming the exponential equation similar to the Hertzian contact law, using the principle of minimum potential energy and the energy-balance model between the indenter and the plate, the unknown coefficients of the exponential equation are obtained analytically. The elastic strain energy resulting from bending in the composite plate and external work due to indentation load is evaluated using an appropriate shape function for the composite plate deformation. Using the present method, in addition to reducing the runtime, the problem-solving process is carried out with appropriate convergence. Accordingly, contact coefficients for various types of composite plates with different boundary conditions have been calculated. The results are in good agreement with the experimental and numerical results. The force-time response and structure response to low-velocity impact with various boundary conditions are investigated. Also, considering the importance of physical and geometrical parameters such as mass and velocity of the impactor, the dimension of the composite plate, and the effect of these parameters on contact force history are studied. It has been shown that with increasing diameter and velocity of the impactor, exponent value in nonlinear equation contact will increase, while this parameter decreases with increasing mass of the impactor.

Keywords: Low velocity impact. Composite plates. Contact non-linear equation. Total potential energy

^۱ - استادیار: kmalekzadeh@mut.ac.ir

^۲ - دانشجوی دکتری: azar6344@gmail.com

* حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) داده شده است. این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (License Commons) CC BY-NC (Creative) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس، از آدرس <https://maj.ihu.ac.ir> دیدن فرمائید.

۱- مقدمه

بررسی رفتار و واکنش صفحات چندلایه مرکب که تحت ضربه عرضی قرار دارند از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. عموماً برای بار دینامیکی حاصل از ضربه، در طراحی و انتخاب مواد، تمهیدات کافی در نظر گرفته نمی‌شود لذا امکان تخریب جدی در سازه بر اثر این بار وجود دارد. اصولاً آسیب‌های ناشی از برخورد یک جسم خارجی بر روی یک تیر یا یک صفحه چندلایه مرکب در طی فرایند ساخت وجود داشته که این موضوع می‌تواند از پایداری و ظرفیت تحمل بار سازه بکاهد. در فلزات و آلیاژهای مرتبط با آن‌ها تخریب همیشه از سطح شروع می‌شود که قابل‌رؤیت است در حالی که در مواد مرکب آسیب‌هایی نظیر تورق بین لایه‌ها، ترک خوردن ماتریس و شکست الیاف وجود دارند که به راحتی از بیرون قابل مشاهده نیستند. با افزایش سازه‌های چندلایه مرکب به کاربردهای مهندسی و مقاومت نسبتاً ضعیف این سازه‌ها در برابر بارهای ضربه، تحقیقات گسترده‌ای در ارتباط با تحلیل تماس بین ضربه زننده و سازه هدف، پاسخ سازه بعد از اعمال ضربه و مکانیسم آسیب به‌وسیله ضربه انجام گرفت. روش‌های مختلف تحلیلی، عددی و تجربی جهت بررسی وضعیت‌های فوق توسط محققان به‌کار گرفته شد.

فرم کلی برای قانون تماس به‌وسیله مایر [۱] پیشنهاد شده است $(p = ca^n)$. در این رابطه، p نیروی تماس، c سفتی تماس، a فرورفتگی و n ضریب تماس است. بر طبق قانون هرتز، ضریب تماس برای تماس بین دو جسم الاستیک خطی ایزوتروپیک همگن در معادله فوق، برابر با $1/5$ است. ژانگ و سان [۲] معادله توانی را بر اساس آزمون تجربی فرورفتگی یک ضربه زننده کروی بر روی سازه کامپوزیتی پیشنهاد دادند. بر اساس این معادله ضریب تماس برای این نوع سازه‌ها عدد $1/5$ به‌دست آمد. دابینز [۳] حل استاتیکی و دینامیکی ورق را برای فشار با توزیع یکنواخت و کسینوسی، وارد بر تمام و یا بخشی از سطح ورق به‌دست آورد. در این مسئله بار دینامیکی به دو

صورت ایمپالس (در اثر انفجار ماده منفجره و یا انفجار هسته‌ای) و ضربه (برخورد جسم خارجی) در نظر گرفته شد.

شیواکومار و همکارانش [۴] دو مدل بهبودیافته بالانس انرژی و جرم- فنر دو درجه آزادی را برای محاسبه نیروی ضربه در حین برخورد سرعت پائین بر روی ورق‌های چندلایه مرکب دایروی توسعه دادند. هر دو مدل ارائه‌شده تغییر شکل ضربه زننده و ورق را در محل تماس و همچنین تغییر شکل‌های ناشی از اثرات غشایی، برشی و خمشی را در برمی‌گرفت. در این روش مشخص گردید که مدل بالانس- انرژی فقط بیشینه نیروی برخورد و مدت‌زمان برخورد را نشان می‌دهد اما سریع‌تر به جواب می‌رسد. لیکن مدل جرم و فنر، تاریخچه نیروی تماس را به‌طور کامل محاسبه می‌کند و دیرتر به جواب می‌رسد. نتایج دو مدل ارائه‌شده، یکدیگر را تأیید کردند.

بررسی جامع و مروری کامل بر دینامیک ضربه و پاسخ مواد و سازه‌های چندلایه مرکب به بار ضربه‌ای و نیز بررسی آسیب و نحوه رشد آسیب و کاهش استحکام باقیمانده و مودهای شکست در مقاله‌ای توسط ابریت [۵] ارائه گردید. خلیلی [۶] پاسخ دینامیکی ورق اورتوتروپیک را تحت بار ضربه‌ای به‌صورت عمودی بررسی نمود. وی ورق را بی‌نهایت بزرگ فرض کرد و از قانون برخورد هرتز- اسوکلو برای برخورد استفاده نمود. در مقاله مذکور از تئوری کلاسیک ورق استفاده شد. در شیوه موردنظر از اثرات اینرسی‌های چرخشی و تغییرشکل‌های برشی صرف نظر شد. دلفوسه و همکارانش [۷] تست‌های تجربی ضربه با سرعت پایین را بر روی انواع مختلفی از کامپوزیت‌ها انجام دادند. آن‌ها دریافتند که سازه هدف با انرژی یکسان در سرعت‌های مختلف ضربه می‌تواند پاسخ متفاوتی را نسبت به ضربه زننده داشته باشد. چوی و هونگ [۸] روش جدیدی را برای به‌دست آوردن توزیع نیروی ضربه برحسب زمان ناشی از برخورد سرعت پائین برای ورق‌های چندلایه مرکب نازک ارائه دادند. در این روش از انرژی برخورد (به علت تغییر شکل موضعی کم) صرف نظر گردید. آن‌ها از مدل جرم و فنر و قانون بقاء ممتموم برای حل مسئله استفاده نمودند. به

سرعت ضربه‌زننده در ضربه سرعت‌پایین بر روی ورق کامپوزیتی یک مدل تحلیلی ارائه داد. در این مدل از روش بهینه‌سازی شده حداقل مربعات برای دستیابی به تاریخچه نیروی ضربه استفاده شد. هوفت و پارک [۱۵] سازه موردبررسی را به صورت یک ورق ساندویچی مستطیلی با رویه‌های چندلایه‌ای ارتوتروپیک متقارن فرض کردند. بارگذاری تماسی در مرکز ورق در نظر گرفته شد و نفوذکننده به صورت یک استوانه صلب سر تخت فرض گردید. سه حالت ممکن را برای فرورفتگی رویه بالایی بررسی نمودند: ورق روی یک بستر الاستیک، ورق روی یک بستر صلب-پلاستیک، غشا روی یک بستر صلب-پلاستیک، در مدل‌های ورق روی یک بستر صلب-پلاستیک و غشا روی یک بستر صلب-پلاستیک، با به کارگیری یک تابع شکل مناسب برای خیز رویه، مقادیر انرژی کرنشی الاستیک رویه و کار پلاستیک تلف شده در اثر له شدن هسته هانی کوم و همچنین کار خارجی ناشی از نیروی نفوذکننده را محاسبه کردند. سپس با استفاده از اصل کمینه انرژی پتانسیل، رابطه بین نیروی برخورد و خیز عرضی تعیین گردید. چوی و همکارانش [۱۶] رابطه هرتز که جهت محاسبه نیروی تماس استفاده می‌شد را به فرم خطی نوشتند و در رابطه جدید برای محاسبه سفتی تماس مجهول از قانون پایستاری انرژی استفاده نمودند. این رویکرد مبنی بر فرض عدم اتلاف انرژی در مدت زمان پدیده ضربه ارائه شد. آن‌ها نشان دادند که استفاده از فرم خطی شده قانون تماس را می‌توان با تقریب بسیار خوبی در حل مسائل ضربه به کار برد. ساترلند و سوارس [۱۷] یک مطالعه تجربی روی پاسخ شبه استاتیکی کامپوزیت‌های دریایی انجام دادند. آن‌ها دریافتند که قانون تماس برای بارهای کوچک‌تر مناسب بوده در حالی که انحراف قابل توجهی به علت آسیب گسترده در سازه هدف در بارهای بزرگ‌تر دیده می‌شود. به طور متوسط، ضریب تماس اندازه‌گیری شده برای کامپوزیت‌های بافته شده با الیاف حدود ۱/۵۹ پیشنهاد شد.

حسین‌زاده و همکاران [۱۸] چهار نوع ورق کامپوزیتی تقویت شده با الیاف متفاوت را به صورت تجربی با دستگاه تست ضربه مورد آزمایش قرار دادند و به کمک دستگاه آلتراسونیک منطقه آسیب را بررسی کردند. نتایج نشان داد که ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف کربن بهترین رفتار سازه‌ای را تحت ضربه با سرعت‌پایین از خود نشان

کمک تحلیل مقادیر ویژه و استفاده از تحلیل مودال، آن‌ها توزیع نیروی ضربه را به دست آوردند. در تحقیق دیگری، کاروالهو [۹] به مقایسه روش عددی با حل تحلیلی پرداخت. در تحلیل مورد نظر از روش بسط سری فوریه برای حل معادلات دینامیکی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده استفاده شد و برای خطی‌نمودن معادله تغییر شکل و در نتیجه محاسبه ضریب فنریت ورق تبدیل لاپلاس را به کار گرفته شد. در نهایت نتیجه‌گیری شد که روش عددی مناسب‌تر از روش تحلیلی می‌باشد. میتال و جعفری [۱۰] پاسخ ورق چندلایه‌های مرکب تقویت شده با الیاف هم‌راستا تحت بار ناشی از ضربه عرضی را بررسی کردند. آن‌ها علاوه بر بررسی خیز ورق تحت بار ضربه، اثرات کسر حجمی الیاف جرم و سرعت ضربه زننده را بر روی نیروی ماکزیمم برخورد مورد بررسی قرار دادند. امور و کروز [۱۱] روش حل نیمه‌تحلیلی را برای پدیده برخورد و ضربه روی یک صفحه چندلایه مرکب ساندویچی به صورت دینامیکی ارائه دادند، آن‌ها در روابط خود از رابطه برخورد هرتز استفاده نمودند. پیرسون و وزیری [۱۲] به کمک تئوری برشی مرتبه اول، ترکیب اثرات تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی‌های چرخشی و قانون برخورد غیرخطی هرتز مسئله ضربه با سرعت‌پایین را تحلیل کردند. آن‌ها برای حل از سری‌های فوریه دوگانه استفاده نمودند و فرکانس‌های طبیعی مربوط به اینرسی‌های چرخشی را نیز در نظر گرفتند و بدین طریق حل خود را توسعه دادند.

از منظر نسبت جرمی السون [۱۳] ضربه را به دودسته کلی موج ضربه زننده و مرز کنترل شده دسته‌بندی کرد. در دسته اول نسبت جرم ضربه‌زننده به جرم سازه آن قدر کوچک است که ضربه ماهیت دینامیکی پیدا می‌کند. بدین معنی که امواج برشی و خمشی فرصت پیدا کرده تا از محل وقوع ضربه به طرف مرز سازه انتشار یافته و پس از برخورد با مرز، در بازگشت به محل وقوع ضربه برگردند و سبب تغییر در رفتار نیروی تماس شوند. در مورد ورق‌های کامپوزیتی، نسبت جرم ضربه‌زننده به جرم ورق باید کوچک‌تر از یک چهارم جرم بزرگ‌ترین ناحیه متأثر از امواج قبل از رسیدن به مرزها باشد. در دسته دوم جرم ضربه‌زننده به جرم سازه بزرگ است لذا خیز در محل ضربه با نیروی تماس کم‌وبیش هم‌فاز است در نتیجه اثر انتشار امواج قابل صرف نظر است. کریستفرو [۱۴] برای تخمین جرم و

در اکثر مقالات پیش‌ازاین، بررسی مسئله تماس در سرعت‌های پایین در ورق‌های چندلایه مرکب و تعیین ضرایب تماس یا مستقیماً از طریق قانون تماس هرگز انجام می‌گرفت و یا با کمک تست‌های تجربی و صرف زمان و هزینه برای هر سازه به‌صورت مجزا ضرایب تماس اصلاح می‌گردید. در روش حاضر ضرایب مجهول معادله تماس به‌صورت کاملاً تحلیلی تعیین می‌شوند، به‌طوری‌که حتی می‌توان حدود و دقت قانون هرگز را در ضربه سرعت‌پایین بر روی ورق‌های چندلایه مرکب تعیین نمود. در این مقاله یک قانون برخورد اصلاح‌شده جدید برای برخورد ضربه زننده با سرعت‌پایین بر روی ورق‌های مرکب چندلایه ارائه می‌گردد. در ابتدا ضرایب مجهول معادله تماس برای سازه کامپوزیتی به‌صورت تحلیلی به‌دست می‌آید و در ادامه با کمک اصل کمینه پتانسیل انرژی و اصل بالانس انرژی و استفاده از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی از طریق فرایند تکرارپذیری بیشینه نیروی تماس تعیین می‌شود. بر این اساس ضرایب قانون تماس برای انواع مختلفی از مسائل ضربه سرعت‌پایین ورق‌های کامپوزیتی محاسبه گردیده است. این قانون نشان می‌دهد که ضرایب استفاده‌شده در آن به‌شدت وابسته به شرایط مرزی، خصوصیات هندسی و موادی سازه هدف و ضربه زننده است. نتایج به‌دست آمده از این روش، تطابق خوبی با دیگر نتایج تجربی و عددی دارد.

۲- روند استخراج معادلات قانون برخورد جدید توسعه یافته

بر اساس مدل بالانس- انرژی، انرژی جنبشی اولیه ضربه زننده با مجموع انرژی‌های ناشی از فرورفتگی موضعی در محل تماس همراه با تغییر شکل‌های خمشی، برشی و غشایی در ورق برابر است [۴]. در این مسئله هدف یافتن رابطه مهندسی است لذا از ضربات ثانویه صرف‌نظر می‌گردد به همین علت بیشترین انرژی جنبشی در ضربه اول اتفاق می‌افتد. با فرض صرف‌نظر از اثرات غشایی و آسیب خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = E_c + E_{bs} \quad (1)$$

می‌دهند. تحلیل ضربه با سرعت‌پایین ورق‌های چندلایه مرکب تحت بار صفحه‌ای اولیه توسط چوی [۱۹] انجام شد. وی بر اساس میدان جابه‌جایی بهبودیافته با اعمال کرنش‌های اولیه در معادلات کرنش بر اساس تئوری مرتبه اول برشی حل ورق کامپوزیتی تحت بار صفحه‌ای اولیه ایجاد شده را به‌صورت عددی حل نمود. چای و زو [۲۰] به‌مرور کاملی بر روش‌های عددی، تحلیلی و تجربی در ضربه بر روی پانل‌های ساندویچی چندلایه مرکب پرداختند. مسئله ضربه با سرعت‌پایین را در سه دسته جرمی به‌طور مفصل بررسی نمودند. آن‌ها همچنین اثرات فاکتورهای کلیدی در ضربه مانند ضخامت رویه، زاویه ضربه زننده، اثرات نرخ کرنش، سرعت، جرم و هندسه ضربه‌زننده و نیز شرایط مرزی را بررسی نمودند. ژانگ و همکارانش [۲۱] به بررسی پاسخ ضربه با سرعت‌پایین بر روی سه نوع چندلایه مرکب الیافی پرداختند و اثر عملکردی هر یک را به‌طور مفصل تشریح کردند. آن‌ها نشان دادند که سفتی صفحه‌ای اولیه بر عملکرد چندلایه‌های مرکب نقش مهمی دارد.

زو و همکاران [۲۲] یک روش تئوری برای حل پاسخ ضربه ورق ساندویچی با لبه‌های گیردار بر اساس روابط بین ضربه زننده و رویه بالای پانل ارائه دادند. روابط بین بار-جابجایی بر اساس سه مرحله مدل‌سازی شده است. مرحله خطی اولیه، مرحله له‌شدگی هسته و مرحله بازیابی. در مدل ذکرشده برای رویه فوقانی توزیع فشار تماس، به‌صورت کاملاً یکنواخت در نظر گرفته‌شده بود. آذرنیا و همکاران [۲۳] برای اولین بار ضرایب مجهول معادله توانی مشابه قانون هرگز را با استفاده از اصل کمینه پتانسیل انرژی و مدل بالانس-انرژی بین ضربه زننده و سازه ساندویچی با رویه فلز-الیاف به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند. فیلی و همکاران [۲۴] یک مدل تحلیلی جدیدی برای پانل ساندویچی با شرایط مرزی گیردار با رویه‌های متقارن تحت ضربه سرعت‌پایین به‌وسیله ضربه زننده کرومی ارائه دادند. در این روش رفتار تغییر شکل ورق با پی صلب برای ورق‌های دایروی با تکیه‌گاه گیردار توسعه داده‌شده است. بر اساس این مدل، ضخامت پانل از مهم‌ترین پارامترهای جذب انرژی در سازه است.

$$w = \Delta f(x)f(y) \quad \frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad \frac{-b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

$$\bar{\alpha}(x, y) = \alpha_0 g(x)h(y) \quad \frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad \frac{-b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \quad (۵)$$

$$\bar{\beta}(x, y) = \beta_0 h(x)g(y) \quad \frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad \frac{-b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

که در آن، Δ ، α_0 و β_0 دامنه‌های توابع شکل خیز قائم و چرخش‌ها می‌باشند.

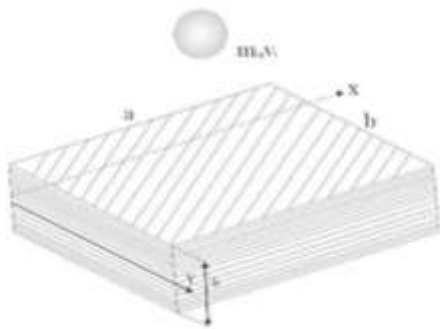
توابع $g(x)$ ، $f(x)$ ، $h(y)$ ، $g(y)$ و $h(x)$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی مسئله را در لبه‌های سازه ارضاء کنند. با جایگذاری توابع (۵) در معادله (۴)، انرژی کرنشی سازه به صورت عبارتی برحسب دامنه‌های خیز قائم و چرخش‌ها بیان می‌شود. از طرفی با از تعریف نیروی برخورد متوسط تا لحظه خیز بیشینه، p ، کار خارجی به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$V = p\Delta \quad (۶)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$\Pi = E_{bs} - V \quad (۷)$$

شرط تعادل سیستم ضربه‌زنده و سازه، کمینه شدن Π نسبت به متغیرهای مستقل آن یعنی Δ ، α_0 و β_0 باشد. کمینه‌سازی Π نسبت به متغیرهای مستقل، منجر به ایجاد یک دستگاه معادلات می‌شود.



شکل (۱): مدل اولیه ورق چندلایه مرکب تحت ضربه سرعت پایین.

توابع ذیل برای خیز قائم و چرخش‌ها در حالت تکیه‌گاهی ساده در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، برای شرایط تکیه‌گاهی ساده فرض می‌شود:

$$w = \Delta \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] \quad (۸)$$

$$\bar{\alpha}(x, y) = \alpha_0 \left[\frac{-3x}{a} + 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right] \left[1 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]$$

E_c انرژی ذخیره‌شده در منطقه تماس در طی فرورفتگی و E_{bs} انرژی کرنشی سازه است. در مطالعات تحلیلی و آزمایشگاهی نشان داده شده که تماس بین ضربه‌زنده و سازه در طی فاز بارگذاری با فرض صرف‌نظر از میرایی و انرژی تلف‌شده در منطقه تماس با معادله غیرخطی به شرح ذیل تقریب زده می‌شود:

$$F = k\alpha^n \quad (۲)$$

که در آن، α فرورفتگی سازه در اثر ضربه زنده، k سفتی غیرخطی برخورد و n پارامتر توانی است. با استفاده از رابطه (۱) انرژی ذخیره‌شده در منطقه تماس برابر است با:

$$E_c = \int_0^{\alpha_{max}} F d\alpha = \frac{k\alpha_{max}^{n+1}}{n+1} \quad (۳)$$

برای سازه چندلایه ارتوتروپیک انرژی کرنشی مربوط به تغییر شکل‌های خمشی و برشی (با صرف‌نظر از اثرات تغییر شکل‌های صفحه‌ای) به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$E_{bs} = 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} \left\{ \frac{D_{11}}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right)^2 + D_{12} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right) + \frac{D_{22}}{2} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right)^2 + A_{55} \left[\frac{\bar{\alpha}}{2} + \frac{\bar{\alpha} \partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + A_{44} \left[\frac{\bar{\beta}}{2} + \frac{\bar{\beta} \partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + D_{66} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right)^2 \right] + D_{16} \left[\left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) \right] + D_{26} \left[\left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy \quad (۴)$$

که در آن، D_{ij} ماتریس سفتی خمشی و A_{ij} سفتی برشی عرضی سازه است. با توجه به شکل ۱، به منظور یافتن تغییر شکل کلی برای سازه چندلایه ارتوتروپیک با ابعاد $a \times b$ از روش کمینه سازه انرژی پتانسیل کلی استفاده می‌شود. توابع شکل مربوط به خیز قائم w و چرخش نسبت به محور X و Y پارامترهای $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ می‌باشند که به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} F_4\Delta + 2F_5\alpha_0 + F_6\beta_0 &= 0 \\ F_2\Delta + F_6\alpha_0 + 2F_3\beta_0 &= 0 \\ 2F_1\Delta + F_4\alpha_0 + F_2\beta_0 - p &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

با توجه به وجود سه معادله و سه مجهول و تعریف پارامترهای ذیل، عباراتی برای Δ ، α_0 و β_0 به دست می آید:

$$\begin{aligned} F_7 = F_2 - \frac{2F_3F_4}{F_6} \quad . \quad F_8 = F_6 - \frac{2F_5F_2}{F_6} \\ F_9 = 2F_1 - \frac{F_2F_4}{F_6} \quad . \quad F_{10} = F_4 - \frac{2F_2F_5}{F_6} \\ F_{11} = \frac{1}{F_{10} - \frac{F_9F_8}{F_7}} \quad . \quad F_{12} = -\frac{F_{11}F_8}{F_7} \\ F_{13} = -\left[\frac{F_4F_{12}}{F_6} + \frac{2F_5F_{11}}{F_6}\right] \end{aligned} \quad (12)$$

آن گاه:

$$\alpha_0 = F_{11}p \quad . \quad \beta_0 = F_{13}p \quad . \quad \Delta = F_{12}p \quad (13)$$

با محاسبه پارامتر β_0 ، α_0 و Δ و جایگذاری در معادله (۹) مقدار انرژی کرنشی سازه به دست می آید:

$$E_{bs} = F_{14} p^2$$

که در رابطه فوق، می توان نوشت:

$$F_{14} = \left\{ \begin{aligned} &F_1F_{12}^2 + F_2F_{12}F_{13} + F_3F_{13}^2 + F_5F_{11}^2 \\ &+ F_4F_{12}F_{11} + F_6F_{11}F_{13} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

با فرض این که بتوان یک نیروی متوسط در طول مسیر برخورد تعریف کرد که به صورت شبه استاتیکی بر سازه وارد شود آنگاه خواهیم داشت:

$$\bar{V} = p\alpha_{max} \quad (16)$$

که در رابطه فوق، \bar{V} کار حاصل از نیروی متوسط در مسیر برخورد است. با توجه به برابری این کار با کار حاصل از نیروی برخورد، نتیجه می شود:

$$p = \frac{F_{max}}{n+1} \quad (17)$$

با جایگذاری معادله مذکور در معادله (۱۴) ملاحظه می شود که E_{bs} تابع خواص و هندسه ورق و نیز تابع F_{max} و n است. حال با جایگذاری معادلات (۳) و (۱۴) در معادله (۱) و استفاده از معادله (۱۷)، معادله بالانس- انرژی مجدداً به صورت ذیل بازنویسی می شود:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{k^{-1} F_{max}^{n+1}}{n+1} + F_{14} \frac{F_{max}^2}{(n+1)^2} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(x,y) &= \beta_0 \left[\frac{-3y}{a} + 4 \left(\frac{y}{a} \right)^3 \right] \left[1 - 2 \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \\ \frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \quad . \quad \frac{-b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \end{aligned}$$

و برای تکیه گاه گیردار توابع خیز قائم و چرخش ها به صورت ذیل در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} w &= \Delta \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right]^4 \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^4 \\ \bar{\alpha}(x,y) &= \alpha_0 \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^2 \\ \bar{\beta}(x,y) &= \beta_0 \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^2 \\ \frac{-a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \quad . \quad \frac{-b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (18-1)$$

توابع شکل مذکور بایستی شرایط مرزی را در لبه های چندلایه مرکب ارضا نمایند. با جایگذاری معادله (۱۸) در معادله (۴) یک رابطه انتگرالی برای انرژی کرنشی به دست می آید که با انتگرال گیری تحلیلی و ساده سازی لازم می توان نوشت:

$$E_{bs} = \Delta(F_1\Delta + F_2\beta_0) + \alpha_0(F_4\Delta + F_5\alpha_0) + \beta_0(F_6\alpha_0 + F_3\beta_0) \quad (9)$$

در حالت تکیه گاه گیردار معادله فوق به صورت ذیل به دست می آید:

$$E_{bs} = F_1\alpha_0^2 + \alpha_0F_2\Delta + F_3\Delta^2$$

در ادامه روند کار برای تکیه گاه ساده بررسی می گردد :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2240}{1575} [A_{44} + A_{55}] \\ F_2 &= \frac{1344}{1575} [A_{44}a] \\ F_3 &= \frac{1}{1575} [204a^2A_{44} + 2016D_{22} + 2040D_{66} - D_{26}] \\ F_4 &= \frac{1344}{1575} [A_{55}a] \\ F_5 &= \frac{1}{1575} [204a^2A_{55} + 2016D_{11} + 2040D_{66} - D_{16}] \\ F_6 &= \frac{4032}{1575} [D_{12} + D_{66} + D_{16}] - D_{26} \end{aligned} \quad (10)$$

به منظور حفظ شرط تعادل بایستی Π نسبت به متغیرهای مستقل خود کمینه باشد. با کمینه سازی نسبت به متغیرهای Δ ، α_0 و β_0 می توان نوشت:

$$D_1 = \frac{16384}{11025} [7D_{11} + 7D_{22} + 4D_{12} + 8D_{66}] \quad (23)$$

برای تحلیل مسئله از اصل انرژی پتانسیل کمینه استفاده می‌شود. اگر w کار انجام شده در اثر نیروی برخورد باشد، با فرض این که از اثرات توزیع فشار ضربه‌زننده صرف نظر گردد و نیروی تماس به‌عنوان نیروی متمرکز در نظر گرفته شود، در این صورت کار خارجی برابر است با:

$$w = p\delta \quad (24)$$

می‌توان جهت دقت بالاتر مسئله در خصوص ضربه‌زننده کروی شکل، سطح تماس را دایروی فرض کرد. با محاسبه انرژی پتانسیل کل ورق چندلایه مرکب در فرایند فرورفتگی و با کمینه سازی آن نسبت به پارامتر δ خواهیم داشت:

$$\frac{2D_1\delta}{(R-\xi)^2} = p \quad (25)$$

با استفاده از رابطه $F_{max} = k\alpha_{max}^n$ رابطه‌ای برای k بر اساس دو پارامتر دیگر به دست می‌آید:

$$k = \left[\frac{F_{max}^{\frac{n-1}{n}}}{(n+1)M} \right]^{-n} \quad (26)$$

که در آن:

$$M = \frac{2D_1\delta}{(R-\xi)^2}$$

معادله (۲۶) بر اساس دو پارامتر F_{max} و n به دست می‌آید. با تساوی قرار دادن رابطه (۱۹) و (۲۶) رابطه‌ای بر اساس n برای F_{max} به دست می‌آید:

$$F_{max} = (n+1)v_i F_{16} \quad (27)$$

که در آن، $F_{16} = \sqrt{\frac{m_i}{2F_{15}}}$ ، $F_{15} = \left[\frac{1}{M} + F_{14} \right]$ در نظر گرفته شده و v_i سرعت اولیه ضربه‌زننده فرض می‌شود. با استفاده از رابطه (۲۶) و جایگذاری معادله (۲۷) مقدار k بر اساس پارامترهای مهم F_{max} و n تعیین می‌شود:

$$k = (n+1)^n F_{max}^{1-n} M^n \quad (28)$$

از معادله (۲۸)، پارامترهای F_{max} و k برحسب n به دست می‌آیند. با توجه به اهمیت پارامتر F_{max} ، حل مسئله با کمک مدل جرم و فنر ادامه می‌یابد. با توجه به شکل ۲ در مدل جرم و فنر، ضربه‌زننده و جسم هدف به ترتیب با جرم‌های m_i و m_s ، میزان فرورفتگی ضربه‌زننده در جسم هدف توسط یک فنر به سفتی خطی شده k^* و سفتی معادل سازه با فنر k_g مشخص گردیده است. معادلات سیستم دو درجه آزادی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

می‌توان از معادله فوق پارامتر سفتی غیرخطی برخورد k را برحسب دو مجهول دیگر محاسبه کرد:

$$k = \left[\frac{1}{2} (n+1) m_i v_i^2 F_{max}^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{F_{14}}{n+1} \right) F_{max}^{\frac{n-1}{n}} \right]^{-n} \quad (19)$$

در معادله فوق پارامتر سفتی غیرخطی برخورد برحسب دو پارامتر F_{max} و n نوش شده است. حال برای حل مسئله نیاز به وجود رابطه دیگر بر اساس F_{max} و n می‌باشد. از آنجا که هدف استخراج رابطه بین نیروی اعمالی از طرف ضربه‌زننده بر روی هدف لذا برای برر تغییر شکل‌های موضعی، شرایط مری شرایط چندلایه مرکب در اینجا به صورت بستر صلب فرض می‌شود. در شرایط فوق انرژی کروی سازه برابر است با:

$$u = \frac{1}{2} \iint \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right) + 4D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} dA \quad (20)$$

که در آن، D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) درایه‌های ماتریس سفتی چندلایه ارتوتروپیک است. فرض می‌شود جسم نفوذکننده به صورت یک استوانه سر تخت با شعاع R باشد و نیروی تماس به‌طور یکنواخت توزیع گردد. در مورد ضربه‌زننده نیمکره‌ای بر اساس مرجع [۱۵]، آن را به صورت یک استوانه سر تخت با شعاع $0.4R$ در نظر می‌گیرند. تغییر شکل سازه در اثر جسم نفوذکننده را می‌توان با تابع ذیل تقریب زد:

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \delta \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \delta \left[\left(1 - \left(\frac{x-R}{\xi-R} \right)^2 \right) \right]^2 \left[\left(1 - \left(\frac{y-R}{\xi-R} \right)^2 \right) \right]^2 \quad R^2 \leq x^2 + y^2 \leq \xi^2 \end{array} \right\} \quad (21)$$

در رابطه فوق، δ انحناء زیر فرورفتگی که همان α_{max} است و ξ وسعت جانبی منطقه تغییر شکل و R شعاع فرورفتگی ضربه‌زننده استوانه‌ای-سر تخت می‌باشد.

با قرار دادن معادله (۲۱) در (۲۰) خواهیم داشت:

$$u = \frac{D_1 \delta^2}{(R-\xi)^2} \quad (22)$$

که در آن،

$$KE = \frac{32}{225} \rho_p h a^2 \dot{\Delta}^2 \quad (34)$$

مقدار انرژی جنبشی با استفاده از جرم مؤثر ورق چندلایه مرکب نیز می‌تواند به صورت ذیل تعیین شود:

$$KE = \frac{1}{2} m_s \dot{\Delta}^2 \quad (35)$$

در این صورت جرم مؤثر ورق چندلایه مرکب مربعی برابر می‌شود با:

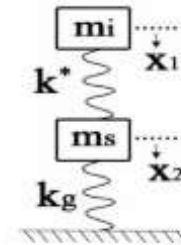
$$m_s = \frac{64}{225} \rho_p h a^2 \quad (36)$$

سفتی مؤثر سازه نیز از حل معادلات (۱۱) به دست می‌آید.

۳- بررسی و تحلیل نتایج

به منظور بررسی و اعتبار سنجی نتایج در مرحله اول، صفحه تخت چندلایه مرکب با چیدمان $[45.90.-45.0]_{3S}$ تحت ضربه زننده کروی با جرم بزرگ $m = 6/15 \text{ kg}$ قرار دارد. مشخصات هندسی و فیزیکی سازه هدف و ضربه زننده در جدول ۱ نشان داده شده است. نیروی ضربه پیش‌بینی شده با سایر مراجع تحلیلی [۱۲ و ۱۴] و نتایج تجربی مرجع [۷] مطابق شکل ۳ مقایسه شده است. نتایج روش حاضر تطابق خوبی با روش تحلیلی مراجع [۱۲] دارد. اختلاف این روش با روش تجربی ناشی از شکل ضربه زننده است که در اینجا به صورت استوانه‌ای سر تخت در نظر گرفته شده و حالت کروی آن با ضریب تصحیح مناسبی مطابق با روش مرجع [۱۵] اعمال می‌گردد. لازم به ذکر است که مرجع [۱۴] از شرایط اولیه خاصی برای رسیدن به دقت مناسب در تعیین پاسخ ضربه سرعت پایین استفاده نموده است. در مرحله دوم صفحه تخت چندلایه مرکب با لایه چینی متعامد صفر و نود متقارن ۱۰ لایه و ضربه زننده با جرم کوچک $m = 0/05 \text{ kg}$ در نظر گرفته شده است. مشخصات هندسی و فیزیکی سازه هدف و ضربه زننده در جدول ۲ نشان داده شده است. تاریخچه نیروی برخورد مدل حاضر با نتیجه مرجع [۱۴] در شکل ۴ مقایسه شده است. بر اساس شکل ۴ مشاهده می‌شود که روش اخیر اختلاف ناچیزی با مرجع [۱۴] دارد. این اختلاف به دلیل استفاده مرجع [۱۴] از نتایج تجربی و حدس اولیه سرعت و جرم ضربه‌زننده ناشی می‌شود که تأثیر به‌سزایی در تعیین پاسخ نهایی سیستم دارد به طوری که جهت همگرایی پاسخ سیستم، نیاز است از حدس اولیه مناسبی استفاده گردد.

$$\begin{cases} m_i \ddot{X}_1 + k^*(X_1 - X_2) = 0 \\ m_s \ddot{X}_2 - k^*(X_1) + (k_g + k^*)X_2 = 0 \end{cases} \quad (29)$$



شکل (۲): مدل دو درجه آزادی.

به لحاظ تحلیلی بودن روش، می‌توان جهت خطی سازی از روش‌های مختلف از قبیل روش چوی [۱۶] یا روش مساوی قرار دادن پرپود خطی و غیرخطی نیز استفاده کرد. در رابطه (۲۹) سفتی تماس خطی شده با روش چوی به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$k^* = k \frac{1}{n} F_{max}^{n-1} \quad (30)$$

شرایط مرزی مسئله نیز به صورت ذیل است:

$$t = 0 \rightarrow X_1 = X_2 = 0, \quad \dot{X}_1 = v_i, \quad \dot{X}_2 = 0 \quad (31)$$

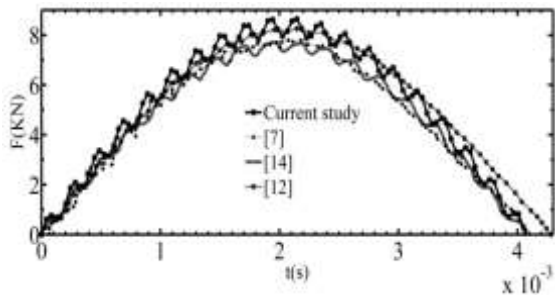
با کمک روابط (۳۰) و (۳۱) معادله دو درجه آزادی حل می‌گردد و نتیجه به صورت ذیل بیان می‌گردد:

$$F(t) = k^*(X_1 - X_2) \quad (32)$$

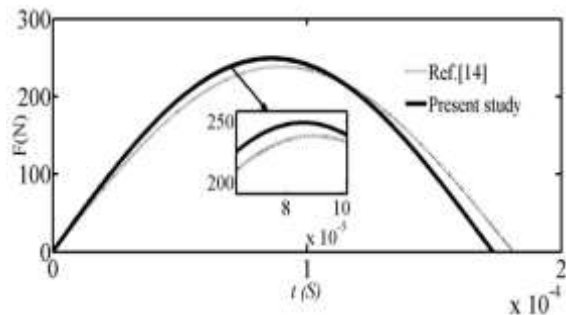
از مشتق‌گیری از رابطه مذکور، بیشینه زمان برخورد به دست می‌آید. سپس با قرار این زمان در رابطه (۳۲) مقدار F_{max} تعیین می‌شود. در ادامه از معادلات (۲۶) و (۲۷) مقادیر پارامترهای k و n محاسبه می‌شود. در رابطه (۲۹) برای محاسبه جرم مؤثر سازه و همچنین سفتی مؤثر سازه، فرض می‌شود که پرپودیل سرعت سازه مشابه با پرپودیل خیز کلی سازه باشد [۱۵]. در این صورت انرژی جنبشی جسم ضربه‌زننده برابر است با:

$$KE = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \rho_p(h) \dot{\Delta}^2 * \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] dx dy \quad (33)$$

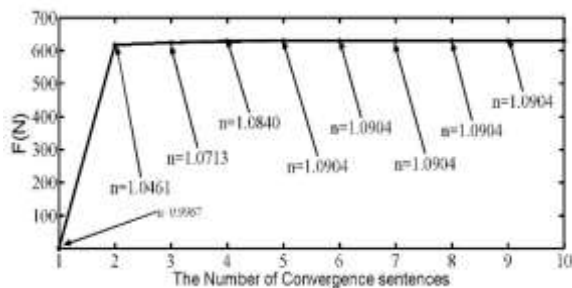
که در رابطه فوق، ρ_p دانسیته جرمی و h ضخامت کل ورق چندلایه مرکب مربعی است. پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:



شکل (۳): نمودار نیرو- زمان برای ورق چندلایه مرکب با تکیه‌گاه ساده تحت ضربه‌زننده با جرم بزرگ.



شکل (۴): نمودار نیرو- زمان برای ورق کامپوزیتی با تکیه‌گاه ساده تحت ضربه‌زننده با جرم کوچک.



شکل (۵): بررسی وضعیت همگرایی ورق چندلایه مرکب تحت ضربه‌زننده استوانه‌ای- سر تخت.

با توجه به اهمیت مطالعات پارامتری، به بررسی تعدادی از پارامتر فیزیکی و هندسی پرداخته می‌شود. به‌منظور بررسی اثر جرم ضربه‌زننده m بر روی پاسخ ضربه، مقادیر مختلفی از جرم ضربه‌زننده از 0.003 kg تا 0.009 kg را در نظر بگیرید. سرعت ضربه‌زننده در این حالت $v=1/5 \text{ m/s}$ فرض می‌گردد. در هر مورد مطابق مشخصات جدول ۲ تاریخچه نیرو به‌دست آمده است. مطابق شکل ۶ با افزایش جرم ضربه‌زننده، مقادیر نیروی برخورد و مدت‌زمان تماس افزایش می‌یابد. در این شرایط پارامتر توانی n نیز به مقدار $1/5$ مطابق با قانون هرتر نزدیک‌تر می‌شود. افزایش نیرو

به‌طور خلاصه حدس اولیه سرعت و جرم ضربه‌زننده در پاسخ نهایی سیستم مؤثر است. در ادامه نیاز است همگرایی پاسخ سیستم با مدل تحلیلی جدید بررسی گردد. بدین منظور ورق چندلایه مرکب با چیدمان (متوالی صفر و نود متقارن ۱۰ لایه) و ضربه‌زننده مطابق با مشخصات جدول ۲ را در نظر بگیرید. مطابق شکل ۵ مشاهده می‌شود که روش حاضر بر اساس داده‌های مندرج در جدول ۲، از جملات ششم به بعد همگرا می‌گردد. در مورد ضربه‌زننده با جرم‌های کوچک‌تر تعداد جملات تا دوازده جمله نیز افزایش می‌یابد. در این بررسی جرم ضربه‌زننده $m=0.005 \text{ kg}$ نظر گرفته شده است.

جدول (۱): مشخصات هندسی و جنس صفحه چندلایه

مرکب و ضربه‌زننده فولادی [۷].

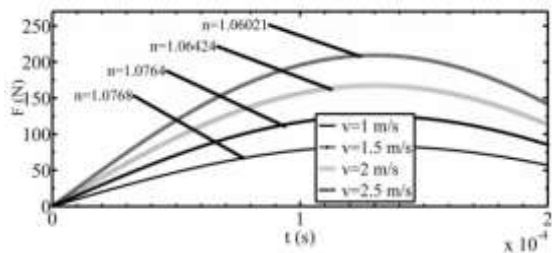
خواص	ورق چند لایه مرکب	ضربه‌زننده
$E_{11}(Gpa)$	۱۲۹	۲۰۰
$E_{22}(Gpa)$	۷/۵	-----
$G_{12}(Gpa)$	۳/۵	-----
$G_{23}(Gpa)$	۲/۶	-----
$G_{13}(Gpa)$	۳/۵	-----
$\rho(kgm^{-3})$	۱۵۴۰	-----
$d(mm)$	---	۲۵/۴
$h(mm)$	۴/۶۵	-----
θ_{12}	۰/۳	۰/۳
$a(mm)$	۱۲۷	-----
$b(mm)$	۷۶/۲	-----

جدول (۲): مشخصات هندسی و جنس صفحه چندلایه مرکب

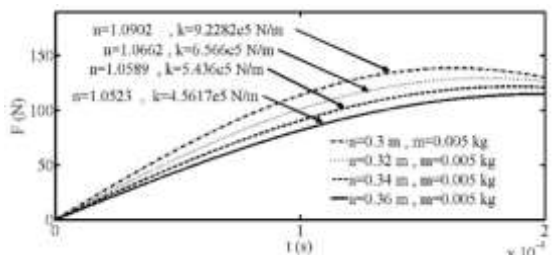
و ضربه‌زننده فولادی [۱۴].

خواص	ورق چند لایه مرکب	ضربه‌زننده
$E_{11}(Gpa)$	۱۲۰	۲۰۰
$E_{22}(Gpa)$	۷/۹	-----
$G_{12}(Gpa)$	۵/۵	-----
$\rho(kgm^{-3})$	۱۵۸۰	-----
$d(mm)$	---	۱۲/۷
$h(mm)$	۲/۶۹	-----
θ_{12}	۰/۳	۰/۳
$a(mm)$	۲۰۰	-----
$b(mm)$	۲۰۰	-----
$v(ms^{-1})$	---	۳

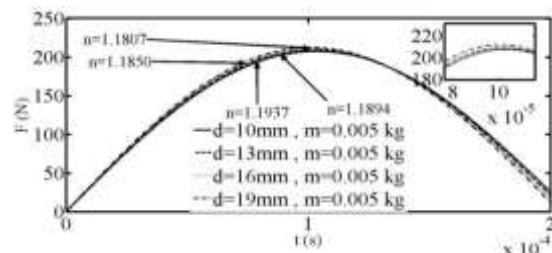
برای پاسخ دینامیکی پانلهای ساندویچی تحت ضربه سرعت پایین، این مسئله بررسی گردیده است در اینجا نیز به نظر می‌رسد قطر ضربه‌زنده نقش مؤثری در افزایش بیشینه نیروی برخورد ندارد.



شکل (۷): اثرات سرعت ضربه‌زنده بر روی تاریخچه نیرو در ورق چندلایه مرکب.



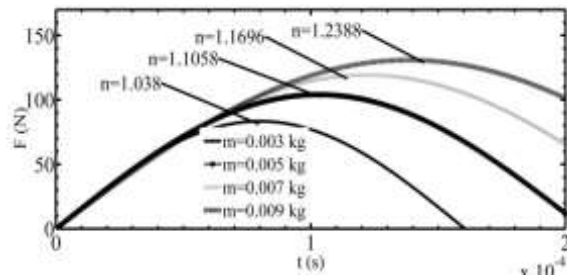
شکل (۸): اثرات ابعاد ورق چندلایه مرکب در تاریخچه نیرو ضربه.



شکل (۹): تغییرات قطر ضربه‌زنده در تاریخچه نیروی ضربه در ورق چندلایه مرکب.

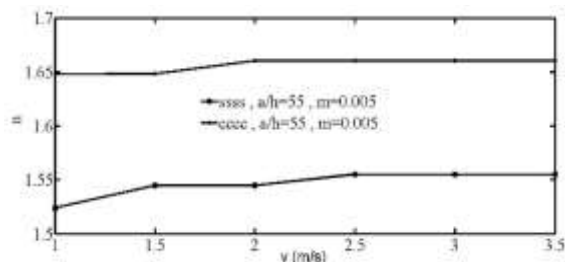
نمودار تاریخچه زمانی نیرو برای ورق کامپوزیتی با شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده در شکل‌های ۱۰ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که میزان بیشینه نیرو در شرایط تکیه‌گاه گیردار از حال تکیه‌گاه ساده بیشتر بوده و مدت‌زمان تماس آن کمتر است. داده‌ها بر اساس جدول ۲ و

برخورد در این مرحله ناشی از افزایش پارامتر توانی n می‌باشد.



شکل (۶): اثرات جرم ضربه‌زنده بر روی تاریخچه نیروی ضربه در ورق چندلایه مرکب.

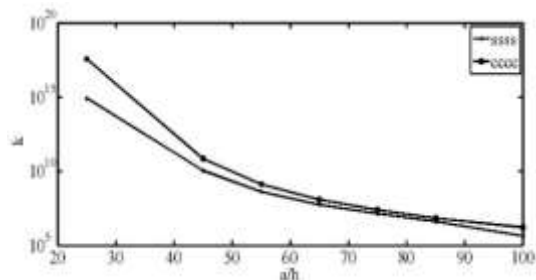
پارامتر سرعت نقش مؤثری در پدیده ضربه دارد. اثر تغییرات این پارامتر در شکل ۷ در نمودار نیرو-زمان ترسیم شده است. با افزایش سرعت از $v=1$ m/s تا $v=2/5$ m/s مقدار بیشینه نیروی تماس افزایش یافته و مقدار پارامتر n کاهش می‌یابد اما مدت‌زمان تماس تقریباً ثابت است. در نتیجه در این حالت در رابطه قانون برخورد اصلاح‌شده، افزایش مقدار نیروی بیشینه ناشی از افزایش مقدار پارامتر k است که اثرگذاری مؤثر پارامتر سرعت را در تعیین پاسخ سیستم نشان می‌دهد. داده‌ها بر اساس جدول ۲ و با فرض جرم ضربه‌زنده 0.008 kg به دست آمده‌اند. شکل ۸ تاریخچه نیروی ضربه برای ابعاد مختلفی از ورق مربعی شکل از $a=0.3$ m تا $a=0.36$ m ترسیم شده است. مشخصات ورق و ضربه‌زنده مطابق جدول ۲ است. با افزایش ابعاد ورق، با کاهش پارامترهای n و k مقدار بیشینه نیروی برخورد کاهش می‌یابد در نتیجه مدت‌زمان تماس افزایش خواهد یافت. با افزایش ابعاد ورق مربعی و در نتیجه افزایش مساحت ورق، انعطاف‌پذیری ورق افزایش یافته لذا میزان خیز آن افزایش و بیشینه نیروی برخورد کاهش می‌یابد. اثر پارامتر هندسی قطر ضربه‌زنده نیز با روش حاضر در شکل ۹ بر روی نمودار نیرو-زمان نشان داده شده است. فرض شده ضربه‌زنده با قطرهایی از 10 mm تا 19 mm به ورق چندلایه مرکب با چیدمان $[0,90,0,90,0]_s$ مطابق جدول ۲ برخورد نماید. مشاهده می‌شود که با افزایش قطر ضربه‌زنده بیشینه نیروی برخورد نیز افزایش می‌یابد. اما این افزایش نامحسوس بوده است لذا مطابق با مرجع [۱۵] که



شکل (۱۲): اثرات سرعت ضربه زنده بر روی پارامتر n برای ورق کامپوزیتی در شرایط تکیه‌گاهی مختلف.

لذا می‌توان دریافت که در سرعت‌های بالاتر، اثرات افزایش سرعت در پارامتر n دیده نمی‌شود و تغییرات پارامتر توانی وابسته به دیگر عوامل خواهد بود.

در شکل ۱۳ تغییرات پارامتر سفتی برخورد (k) نسبت به پارامتر a/h بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در هر دو حالت تکیه‌گاهی با افزایش مقدار a/h مقدار سفتی برخورد با شیب زیادی کاهش می‌یابد. شیب این کاهش برای هر دو حالت شرایط تکیه‌گاهی تقریباً مشابه است. به نظر می‌رسد کاهش مقدار پارامتر سفتی تماس با افزایش ضخامت ورق نسبت به پارامتر توانی n نقش مؤثرتری دارد. در این حالت نیز فرض شده جرم ضربه زنده $m=0.005$ kg باشد. سایر داده‌های موردنیاز از جدول ۲ اقتباس گردیده است.

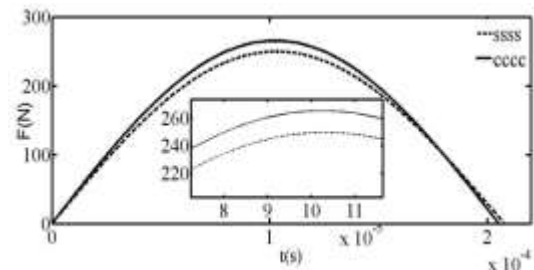


شکل (۱۳): تغییرات پارامتر توانی K بر اساس نسبت a/h در ورق‌های چندلایه مرکب با شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده.

۴- بحث و بررسی

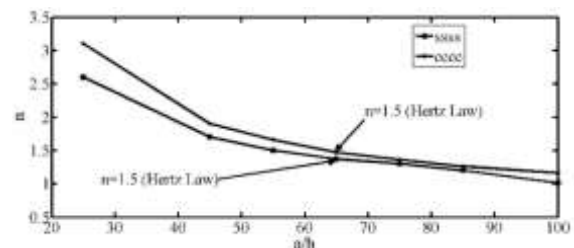
مسیر حل مسئله به‌صورت فلوجارتی در شکل ۱۴ ترسیم شده است. در این فلوجارت با فرض کردن حداکثر نیروی ضربه به‌عنوان مثال عدد ۱، مقادیر ضرایب سفتی تماس و پارامتر توانی در معادله برخورد اصلاح‌شده در طی یک فرایند تکرار برای مسئله تعیین می‌گردند. این روش تحلیلی در نرم‌افزار متلب برنامه‌نویسی شده و نتایج آن استخراج

با فرض سرعت $v=3/6$ m/s برای ضربه‌زنده در نظر گرفته شده است.



شکل (۱۰): تاریخچه نیروی تماس ورق چندلایه مرکب تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار.

در شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده اثر تغییرات نسبت بر روی پارامتر توانی n مطابق شکل ۱۱ بررسی شده است. در هر دو مورد با افزایش نسبت ابعاد به ضخامت ورق، مقدار پارامتر توانی n کاهش می‌یابد. جالب است که برای ورق‌های چندلایه مرکب با شرایط تکیه‌گاهی ساده اگر نسبت a/h بین ۵۰ تا ۶۰ در نظر گرفته شود؛ آن‌گاه پارامتر n تقریباً برابر با عدد ۱/۵ مطابق با قانون هرتز است. در خصوص تکیه‌گاه گیردار تغییرات اگر نسبت a/h در ورق کامپوزیتی در محدوده ۶۰ تا ۷۰ می‌باشد می‌توانیم از قانون هرتز مستقیماً استفاده کنیم. مشخصات ورق چندلایه در حالت مذکور بر اساس جدول ۲ با چیدمان $[0,90,0,90,0]_s$ در نظر گرفته شده است.



شکل (۱۱): تغییرات پارامتر توانی n بر اساس نسبت a/h در ورق‌های چندلایه مرکب با شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده.

در شکل ۱۲ برای نسبت مشخصی از a/h با جرم ضربه‌زنده $m=0.005$ kg، تغییرات n بر اساس سرعت‌های مختلفی از ضربه‌زنده بررسی شده است. برای مشخصات داده‌شده، مشهود است که در یک سرعت خاصی با توجه به شرایط تکیه‌گاهی ورق پارامتر توانی n ثابت می‌ماند و نقش کمتری در تغییرات بیشینه نیروی برخورد و خیز ورق داشته و پارامتر k در این وضعیت نقش مؤثرتری دارد.

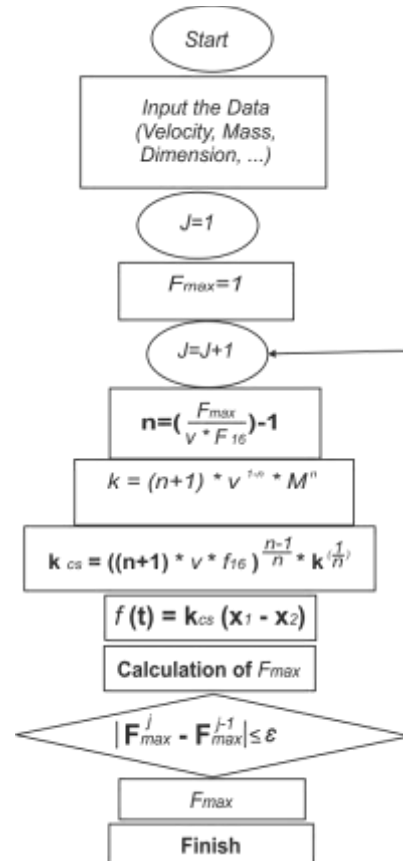
مطرح شده در این پژوهش با شرایط تکیه‌گاهی ساده، اگر نسبت a/h بین ۵۰ تا ۶۰ در نظر گرفته شود آن‌گاه پارامتر n از قانون هرتز پیروی می‌کند، این مورد در خصوص تکیه‌گاه گیردار متفاوت می‌باشد. لذا این موضوع نشان می‌دهد که پارامتر n و همچنین K در قانون هرتز تابع عوامل هندسی و فیزیکی مسئله می‌باشند. در خصوص همگرایی روش حل، در اجرام ضربه زننده بزرگ، همگرایی بسیار سریع‌تر از همگرایی اجرام با وزن کوچک‌تر می‌باشد که این موضوع به سبب ماهیت روش حل تحلیلی به‌کار رفته می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک فرایند سیستماتیک تحلیلی برای تحلیل دینامیکی سازه کامپوزیتی تحت ضربه‌زننده صلب ارائه شده است. در این روش با کمک اصل کمینه پتانسیل انرژی و مدل بالانس انرژی بین ورق و ضربه زننده، ضرایب مجهول تابع توانی به‌طور تحلیلی به‌دست می‌آید. بیشینه انرژی تماس با کمک مدل جرم و فنر دو درجه آزادی به‌دست می‌آید. نتایج حاصله از این روش جدید با سایر نتایج تجربی و تحلیلی مقایسه شده است که از تطابق خوبی برخوردار است. با توجه به اهمیت برخی از پارامترهای مؤثر در پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی، نسبت به بررسی این پارامترها و اثرات آن در ضریب تماس و ضریب سفتی اقدام شده است. اثر پارامترهای فیزیکی و هندسی از قبیل قطر، جرم و سرعت ضربه زننده و همچنین ضخامت، و ابعاد سازه هدف بر روی تاریخچه نیروی برخورد بررسی شده است. این روش نشان می‌دهد که ضرایب استفاده‌شده در قانون هرتز به‌شدت وابسته به شرایط مرزی، خصوصیات هندسی و موادی سازه هدف و ضربه زننده می‌باشند و در خصوص هر مسئله ضرایب منحصره‌فرد به‌دست می‌آید. همچنین تحلیل نشان می‌دهد که با افزایش جرم ضربه زننده و سرعت آن، بیشینه نیروی برخورد نیز افزایش می‌یابد. در ضمن با افزایش طول و عرض ورق، بیشینه نیروی برخورد کاهش یافته اما با افزایش ضخامت ورق بیشینه نیروی برخورد افزایش می‌یابد.

۶- مراجع

گردیده است. لذا با کمک این روش، امکان حل تحلیلی مسئله ضربه با سرعت پایین بر روی ورق‌های کامپوزیتی با تکرار تا همگرایی وجود داشته و مطابق نتایج تجربی مقادیر مرتبط با k و n با دقت مناسب تعیین می‌شوند.



شکل (۱۴): فلوجارت حل مسئله به روش تحلیلی.

همان‌طور که از نتایج مشاهده می‌شود در معادله غیرخطی هرتز پارامتر توانی n در حالات خاصی از مسئله و نه به‌صورت کلی می‌تواند عدد $1/5$ را شامل گردد. در نتیجه جهت استفاده از قانون هرتز بایستی محدوده معتبری از شرایط مسئله را در نظر گرفت. اثبات گردیده است که برای هر مسئله برخورد این قانون از نظر مقادیر ضرایب سفتی تماس و توانی منحصره‌فرد بوده و برای مسئله دیگر قابل قبول نیست. مقدار پارامتر n با افزایش سرعت و قطر ضربه زننده و ضخامت سازه هدف افزایش یافته درحالی‌که با افزایش جرم ضربه زننده و ابعاد سازه هدف این پارامتر کاهش می‌یابد. اثر تغییرات نسبت a/h بر روی پارامتر توانی n نشان می‌دهد که برای ورق‌های چندلایه مرکب

- Computers and structures, Vol. 79, pp. 2607-2619, 2001.
15. Hoo Fatt, M. S. and Park, K. S. "Dynamic Models for Low-Velocity Impact Damage of Composite Sandwich Panels-Part A: Deformation", Composite Structure, vol. 52, pp. 335-351, 2001.
 16. Choi, I. H. and Lim, C. H., "Low Velocity Impact Analysis of Composite Laminates Using Linearized Contact Law", Composite structures, vol. 66, pp. 125-132, 2004.
 17. Sutherland, L. S., "Contact Indentation of Marine Composites", Composite Structures, Vol. 70, No.3, pp. 287-94, 2005.
 18. Hosseinzadeh, R., Shokrieh, M. M. and Lessard, L., "Damage Behavior of Reinforced Composite Plates Subjected to Drop Weight Impacts", Composite science and technology, vol. 66, pp. 61-68, 2006.
 19. Choi, I. H., "Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates under Initial in-Plane Load, Journal of Composite Structures", Composite Structures, vol. 86, pp. 251-257, 2008.
 20. Chai, G. B. and Zhu, S., "A Review of Low-Velocity Impact on Sandwich Structures, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineer", Materials Design and Applications Part L, Vol. 225, No. 4, pp. 207-225, 2011.
 21. Zhang, D., Sun, Y., Chen, L. and Pan, N. "A Comparative Study on Low Velocity Impact Response of Fabric Composite Laminate", Material and design, Vol. 50, No. 1, pp. 750-756, 2013.
 22. Zhu, S., Chai, G. B. "Low-Velocity Impact Response of Composite Sandwich Panels", Journal Materials: Design and Applications, Vol. 230, No. 2, pp.1-12, 2015.
 23. Azarnia, A. H. and Malekzadeh, K. "Analytical Modeling to Predict Dynamic Response of Fiber-Metal Laminated Panel Subjected to Low Velocity Impact", In persian, Journal of science and technology of composite(JSTC), Vol. 5, No. 3, pp. 331 To 342, 2018.
 24. Feli, S., Khodadadian, S., Safari, M. "A Modified New Analytical Model for Low-Velocity Impact Response of Circular Composite Sandwich Panels", Journal of Sandwich Structures and Materials. Vol. 8, No. 5, pp.552-578,2016.
 1. Tabor, D. "The Hardness of Metals", Third ed., Oxford University Press, pp. 421-462, 1951.
 2. Yang, S. S. "Indentation Law for Composite Laminates", ASTM STP, Vol. 787, No. 1, pp. 425-49, 1982.
 3. Dobyns, A. L. "Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subjected to Static and Dynamic Loads", AIAA, Vol. 19, pp. 642-650, 1981.
 4. Shivakumar, K. N., Elbr, W. and Illg, W. "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Camينات", Applied Mechanics, vol. 52, pp. 674-680, 1985.
 5. Abrate, S. "Impact on Laminated Composite Materials", Applied Mechanics, vol. 44, pp. 155-190, 1991.
 6. Khalili, M. R. "Analysis of the Dynamic Response of Large Orthotropic Elastic Plates to Transverse Impact and Its Application to Fiber Reinforced Plates", Ph.D. Thesis, Indian Institute of Technology, Delhi, 1992.
 7. Delfoss, D., Vaziri, R., Pierson, M. O. and Poursartip, A. "Analysis of the Non-Penetrating Impact Behavior of CFRP Laminates", Analysis of the non-Proceeding of the 9th International Conference on Composite Materials, Madrid, Spain, Cambridge, England, UK, Woodhead Publishing, vol. 5, pp. 366-373, 1993.
 8. Choi, I. H. and Hong, C. H., "New Approach for Simple Prediction of Impact Force History on Composite Laminates", AIAA, vol. 132, No. 1, pp. 2072-2083, 1994.
 9. Carvalho, A. and Soares, C. G. "Dynamic Response of Rectangular Plates of Composite Materials Subjected Impact Loads", Composite Structure, vol. 34, pp. 55-63, 1996.
 10. Mittal, R. K. and Jafari, M. S. "Influence of Fiber Contact and Impactor Parameters on Transverse Impact Response of Uniaxially Reinforced Composite Plate", Journal of Composite, vol. 26, pp. 877-886, 1995.
 11. Ambour, D. R. and Cruz, J. R. "Low-Speed Impact Response Characteristics of Composite Sandwich Panels", AIAA-95-1460-CP, pp. 2681-2695, 1995.
 12. Pierson M. O. and Vaziri R. "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA, vol. 8, pp. 1633-1640, 1996.
 13. Olsson, R. "Mass Criterion Wave Controlled Impact Sponse of Composite Plates", Composite, Part A, vol. 31, pp. 879-887, 2000.
 14. Christoforou, A. P., Elsharkawy, A. A. and Guedouer, L. H. "An Inverse Solution for Low Velocity Impact in Composite Plates",

