

علمی- پژوهشی

طراحی و شبیه‌سازی الگوریتم تخمین جهت‌گیری اولیه سامانه ناوبری اینرسی بر اساس فیلتر کالمن و تخمین گر با ورودی نامعین

حسن محمدخانی^{*۲}

دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه جامع امام حسین (ع)
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۷)

سعید خان کلانتری^۱

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

تعیین دقیق جهت‌گیری اولیه برای یک سامانه ناوبری اینرسی، نقش مهمی را در دقت ناوبری ایفا می‌کند زیرا ناوبری اینرسی یک ناوبری کور بوده و به شدت به دقت شرایط اولیه تخمین، وابسته می‌باشد. در این مقاله روشی جدید برای افزایش دقت و سرعت همگرایی جهت‌گیری اولیه در یک سامانه ناوبری اینرسی ارائه شده است. این روش جدید شامل دو مرحله برای تخمین جهت‌گیری اولیه می‌باشد. این دو مرحله شامل تلفیق فیلتر کالمن با یک فیلتر تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین می‌باشد. هدف از مرحله اول، تخمین ناهم‌محوری افقی به کمک فیلتر کالمن بوده و هدف از مرحله دوم، تخمین ناهم‌محوری قطبی به کمک فیلتری است که از تخمین حاصل از فیلتر کالمن به‌عنوان ورودی برای تخمین خود استفاده می‌کند. براساس شبیه‌سازی انجام شده در این مقاله، استفاده از این روش نه تنها سبب افزایش سرعت همگرایی تخمین جهت‌گیری اولیه می‌شود بلکه سبب افزایش دقت آن نیز شده است.

واژه‌های کلیدی: ناوبری اینرسی، جهت‌گیری اولیه، ناهم‌محوری قطبی، ناهم‌محوری افقی، فیلتر کالمن، تخمین حالت‌ها با ورودی نامعین

A Novel Approach for Estimating the Initial Alignment of INS based on the Kalman Filter and an Estimator with Unknown Input

S. Khankalantary¹

Electrical and Computer Department
Isfahan University of Technology

H. Mohammadkhani²

Aerospace Engineering Department
Imam Hossein University

(Received: 18/January/2020; Accepted: 28/July/2020)

ABSTRACT

Accurate determination of the initial alignment for an inertial navigation system (INS), plays an important role in the accuracy of the navigation system, because inertial navigation is a blind navigation and is highly dependent on the accuracy of the initial estimation conditions. This paper presents a new method to increase accuracy and convergence speed of the initial alignment in an inertial navigation system. This new method includes two steps to estimate the initial alignment. These steps combine the Kalman method and a filter to estimate the states of a system with an uncertain input. In the first step, the estimations of horizontal misalignment angles are obtained by the Kalman filter. In the second step, the estimation which is produced by the Kalman filter, is used as an input to design an equivalent system for the INS. Finally, a filter is used to estimate the states of a system with an unknown input for the estimation of the azimuth alignment angle. Simulations show that this method not only increases the speed of estimation, but it also produces noticeable accuracy.

Keywords: Inertial Navigation, Initial Alignment, Azimuth Misalignment, Horizontal Misalignment, Kalman filter, State Estimation with Unknown Input

۱- دکتری تخصصی: s.khan@ec.iut.ac.ir

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): hmohammadkhani@ihu.ac.ir

فهرست علائم و اختصارات

g	شتاب جاذبه زمین، m/s^2
v	بردار خطای سرعت، m/s
علائم یونانی	
ψ	بردار جهت‌گیری اولیه، درجه
Ω	بردار نرخ چرخش زمین، $^\circ/hr$
ε	بردار دریافت ژيروسکوپ، $^\circ/hr$
∇	بردار خطای شتاب، μg

زیرنویس

D	پایین
E	شرق
N	شمال

۱- مقدمه

سامانه ناوبری اینرسی^۱ به صورت گسترده‌ای در ناوبری ماشین‌ها، کشتی‌ها، اجسام پرنده، زیر دریایی‌ها و ... به کار می‌رود. سامانه ناوبری اینرسی اساساً یک سامانه ناوبری کور می‌باشد به این معنی که دقت ناوبری کاملاً به دقت تخمین اولیه وابسته است به همین دلیل محاسبه و تخمین شرایط اولیه در ناوبری اینرسی بسیار مهم بوده و بسیاری از پژوهش‌های انجام شده در حوزه ناوبری اینرسی مربوط به تخمین شرایط اولیه و به خصوص جهت‌گیری اولیه سامانه ناوبری است. در عمل سرعت اولیه و موقعیت اولیه توسط حسگرهای دیگر مانند سامانه موقعیت‌یاب جهانی^۲ به راحتی قابل اندازه‌گیری هستند و با توجه به این‌که روش‌ها و ابزارهای نسبتاً دقیقی برای اندازه‌گیری آن‌ها موجود می‌باشد بنابراین عامل اصلی خطا مربوط به تخمین جهت‌گیری اولیه بوده و به همین دلیل، در یک سامانه ناوبری اینرسی تخمین جهت‌گیری اولیه چالش اصلی است.

هدف از این مقاله تعیین جهت‌گیری اولیه سامانه ناوبری می‌باشد که در مقالات مختلف این موضوع را با عنوان هم‌محوری اولیه^۳ [۱-۲] بیان کرده‌اند. هم‌محوری اولیه شامل دو مرحله است در مرحله اول که به آن هم‌محوری کورس^۴ گفته می‌شود هدف تعیین جهت‌گیری اولیه با یک

خطای قابل قبول است که این امر می‌تواند با روش‌های کلاسیک مانند حداقل مجموع مربعات به صورت یک مسئله تخمین مقید به دست آید. هم‌محوری کورس در واقع یک مرحله ابتدایی برای انجام مرحله دوم هم‌محوری یعنی هم‌محوری دقیق است [۳]. هدف این مقاله ارائه یک روش جدید برای مسئله هم‌محوری دقیق می‌باشد.

تخمین گرهای مختلفی برای تخمین جهت‌گیری اولیه معرفی و ارائه شده‌اند از جمله فیلتر کالمن [۴] که یک تخمین گر بهینه خطی بدون بایاس برای کمینه سازی کواریانس خطای تخمین می‌باشد. در فیلتر کالمن استاندارد فرضیاتی بر روی مدل سامانه و ویژگی‌های نویز در نظر گرفته شده است به همین دلیل پژوهش‌های فراوانی جهت بهبود فیلتر کالمن استاندارد برای تخمین حالت‌های یک سامانه اتفافی انجام گرفته است. در این میان تعداد زیادی از این پژوهش‌ها بر مبنای سامانه خطای ناوبری اینرسی انجام گرفته‌اند. به عنوان مثال در مرجع [۵] یک فیلتر کالمن تطبیقی برای تعیین جهت‌گیری اولیه سامانه ناوبری اینرسی معرفی شده است. در [۶] یک روش براساس نرخ انتقال فاز برای سامانه‌های ناوبری اینرسی همراه با سامانه موقعیت‌یاب جهانی ارائه شده است، وابستگی به اطلاعات سامانه موقعیت‌یاب جهانی یک اشکال اساسی این روش است زیرا این اطلاعات ممکن است در دسترس نباشند. در [۷] هانگ و وانگ یک فیلتر کالمن دو مرحله‌ای برای تخمین جهت‌گیری اولیه جسم ارائه داده‌اند. در روش ارائه شده فیلتر کالمن اول در واقع برای انجام هم‌محوری کورس و فیلتر ثانویه برای انجام هم‌محوری دقیق مورد استفاده قرار گرفته است. با این حال روش ارائه شده بسیار کند بوده و برای ناهم‌محوری‌های بزرگ پاسخ مطلوبی نخواهد داشت. در [۸] یک روش برای بهبود تخمین جهت‌گیری اولیه در سامانه‌های ناوبری در شرایط حرکت با سرعت و شتاب متغیر ارائه شده است. در مراجع [۹-۱۲] هدف ارائه روش‌های بهینه برای تخمین هم‌محوری است. در [۱۳] یک روش برای هم‌محوری بر مبنای انتگرال‌گیری سرعت-موقعیت براساس روش‌های بهینه‌یابی ارائه شده است. در این مقاله بایاس حسگرها در نظر گرفته نشده است. در [۱۴] بایاس حسگر ژيروسکوپ به عنوان یک متغیر حالت جدید به مدل دینامیکی جهت‌گیری اولیه الحاق شده است

^۱ Inertial Navigation System (INS)
^۲ GPS
^۳ Initial Alignment
^۴ Coarse

ناهم‌محوری قطبی به‌عنوان یک ورودی نامعین برای سامانه‌ی معادل با سامانه خطای ناوبری اینرسی در نظر گرفته می‌شود سپس برای تخمین حالت‌های سامانه جدید از فیلتر بدون بایاس با کواریانس خطای کمینه استفاده می‌شود. فیلترهای مختلفی برای تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین توسعه داده شده‌اند به‌عنوان مثال در [۲۱-۲۲] برای یک سامانه با ورودی نامعین در خروجی فیلتر بدون بایاس و با کمینه کواریانس خطای تخمین ارائه شده است. در [۲۳] یک فیلتر بدون بایاس با کم‌ترین کواریانس خطای تخمین برای یک سامانه اتفاقی ارائه شده است که به‌طور همزمان حالت‌ها و ورودی‌های نامشخص را برای یک سامانه اتفاقی با ورودی نامشخص در معادلات حالت و خروجی تخمین می‌زند. ما از فیلتر ارائه شده در این مقاله برای تخمین ناهم‌محوری قطبی استفاده می‌کنیم.

در این مقاله یک سامانه معادل با سامانه خطای ناوبری اینرسی به‌گونه‌ای تعریف شده است که شرایط پایداری و همگرایی فیلتر ارائه شده در [۲۳] را برقرار نماید. نتایج شبیه‌سازی روش ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهد که علاوه بر سرعت همگرایی دقت همگرایی نیز افزایش یافته است. در این مقاله در ارائه مدل معادل برای مرحله دوم فیلتر از وجود نویز صرف نظر نشده است در حالی که در [۱۹] در تعریف سامانه برای مشاهده‌گر اغتشاش از وجود نویز صرف نظر شده است.

در ادامه مقاله در بخش دوم تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین بررسی شده است، در بخش سوم معادلات خطای ناوبری اینرسی و ارائه مدل معادل برای سامانه خطای ناوبری اینرسی جهت استفاده در مرحله دوم تخمین ارائه شده است، در بخش چهارم شبیه‌سازی فیلتر ارائه شده در این مقاله و مقایسه آن با فیلتر کالمن و فیلتر ارائه شده در [۱۹] آورده شده است و بخش پنجم نتایج و مزایای روش ارائه شده بحث شده است.

۲- تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین

در این قسمت مطابق [۲۳] تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین و پایداری آن را بررسی می‌کنیم. سامانه بیان شده با معادلات (۱) و (۲) را در نظر می‌گیریم، همان‌طور که مشاهده می‌شود ورودی نامعین هم در

تا بتواند به کمک روش‌های بهینه‌یابی علاوه بر هم‌محوری، مقدار بایاس را نیز به‌طور همزمان تخمین بزند. در [۱۵] یک روش براساس تلفیق تخمین گر فازی تطبیقی با فیلتر کالمن خنثی برای افزایش سرعت همگرایی تخمین جهت‌گیری اولیه ارائه شده است.

تمامی پژوهش‌های فوق در جهت افزایش سرعت همگرایی تخمین و همچنین افزایش دقت تخمین هم‌محوری اولیه هستند با این حال سرعت و دقت همگرایی هم‌محوری اولیه در تضاد با هم بوده و برای رسیدن به دقت بالاتر نیاز به زمان بیش‌تری می‌باشد [۱۶].

متغیرهای هم‌محوری را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. دسته اول شامل هم‌محوری در راستای شمال و شرق جغرافیایی بوده و در پژوهش‌های مختلف آن را هم‌محوری افقی می‌نامند. دسته دوم هم‌محوری در راستای عمود بر صفحه حاصل از جهت شمال و شرق جغرافیایی بوده و آن را هم‌محوری قطبی می‌نامند. سرعت همگرایی ناهم‌محوری برای هم‌محوری قطبی و هم‌محوری‌های افقی یکسان نبوده و در واقع ناهم‌محوری قطبی بسیار دیرتر همگرا می‌شود به‌همین دلیل پژوهش‌های فراوانی در جهت ارائه روش‌هایی برای کاهش زمان همگرایی ناهم‌محوری قطبی انجام گرفته است. به‌عنوان مثال در [۱۷][۱۸] پس از همگرایی ناهم‌محوری افقی، ناهم‌محوری قطبی به کمک خروجی اندازه‌گیری شده و مشتق آن تخمین زده شده است. در [۱۹] ابتدا به کمک فیلتر کالمن ناهم‌محوری افقی تخمین زده شده و سپس به کمک مشاهده‌گر اغتشاش ناهم‌محوری قطبی نیز تخمین زده می‌شود. در [۲۰] هانگ و همکارانش یک روش جدید برای محاسبه جهت‌گیری اولیه براساس فیلتر کالمن و حسگرهای جابجایی، جهت تصحیح خطاهای ژيروسکوپ ارائه کرده‌اند.

همان‌طور که گفته شد یک روش برای افزایش سرعت همگرایی تخمین جهت‌گیری اولیه در سامانه ناوبری اینرسی استفاده از فیلترهای کمکی پس از همگرایی ناهم‌محوری‌های افقی می‌باشد. در این مقاله برای تخمین جهت‌گیری اولیه روش جدیدی بر مبنای فیلتر کالمن و فیلتر تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین ارائه شده است. در واقع پس از اعمال فیلتر کالمن و پس از آنکه ناهم‌محوری افقی همگرا شد خطای همگرایی

برای طراحی مشاهده‌گر ابتدا معادلات خروجی سامانه را به دو دسته به گونه‌ای تفکیک می‌کنیم که یک دسته مستقل از ورودی نامعین باشد. با تعریف $d_{1,k} = V_1^T d_k$ و $d_{2,k} = V_2^T d_k$ و با توجه به اینکه V یک ماتریس یکانی می‌باشد روابط (۵) و (۶) را خواهیم داشت.

$$x_{k+1} = Ax_k + G_1 d_{1,k} + G_2 d_{2,k} + w_k \quad (۵)$$

$$y_k = Cx_k + H_1 d_{1,k} + v_k \quad (۶)$$

که در این معادلات $G_2 = GV_2$ ، $G_1 = GV_1$ و $H_1 = HV_1 = U_1 \Sigma$ می‌باشند.

به کمک تبدیل همانندی (۷) معادلات خروجی سامانه را به دو دسته تفکیک می‌کنیم.

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{p_H} & -U_1^T R U_2 (U_2^T R U_2)^{-1} \\ 0 & I_{l-p_H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$z_{1,k} = T_1 y_k = C_1 x_k + \Sigma d_{1,k} + v_{1,k} \quad (۸)$$

$$z_{2,k} = T_2 y_k = C_2 x_k + v_{2,k} \quad (۹)$$

که در این معادلات، $C_2 = T_2 C = U_2^T C$ ، $C_1 = T_1 C$ و $v_{1,k} = T_1 v_k$ و $v_{2,k} = T_2 v_k$ می‌باشد. $z_{2,k}$ و خروجی‌های تفکیک شده و T ماتریس تبدیل همانندی می‌باشد. همچنین ماتریس‌های کواریانس زیر را خواهیم داشت.

$$R_1 = E[v_{1,k} v_{1,k}^T] = T_1 R T_1^T > 0 \quad (۱۰)$$

$$R_2 = E[v_{2,k} v_{2,k}^T] = T_2 R T_2^T = U_2^T R U_2 > 0 \quad (۱۱)$$

$$R_{12} = E[v_{1,k} v_{2,k}^T] = T_1 R T_2^T = 0 \quad (۱۲)$$

فیلتر ارائه‌شده در [۲۳] شامل سه گام است. گام اول تخمین ورودی نامعین در اندیس زمانی k ، گام دوم به‌روزرسانی زمانی و گام سوم به‌روز رسانی تخمین حالت است.

معادلات دینامیکی سامانه و هم در خروجی اندازه‌گیری شده وجود دارند.

$$x_{k+1} = Ax_k + Gd_k + w_k \quad (۱)$$

$$y_k = Cx_k + Hd_k + v_k \quad (۲)$$

در معادلات فوق $x_k \in R^n$ حالت‌های سامانه در اندیس زمانی k ، $d_k \in R^p$ ورودی‌های نامعین در اندیس زمانی k ، $y_k \in R^l$ خروجی اندازه‌گیری شده سامانه، $w_k \in R^n$ و $v_k \in R^l$ نویز سفید گوسی با میانگین صفر و ماتریس کواریانس $Q = E[w_k w_k^T] \geq 0$ و $R = E[v_k v_k^T] > 0$ هستند. فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} \right) = p; n \geq l \geq 1; l \geq p \geq 0 \quad (۳)$$

فرض کنیم $p_H := \text{rank}(H)$ باشد. با استفاده از تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس H را به صورت رابطه (۴) می‌نویسیم.

$$H = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که در آن، $\Sigma \in R^{p_H \times p_H}$ یک ماتریس قطبی با رنک کامل است. $V_1 \in R^{p \times p_H}$ ، $U_2 \in R^{l \times (l-p_H)}$ ، $U_1 \in R^{l \times p_H}$ و $V_2 \in R^{p \times (p-p_H)}$ است. همچنین ماتریس‌های $U = [U_1 \ U_2]$ و $V = [V_1 \ V_2]$ ماتریس‌های یکانی^۱ هستند. رابطه (۴) فرم استاندارد تجزیه به مقادیر منفرد^۲ می‌باشد. به طور خلاصه می‌توان گفت که تجزیه به مقادیر منفرد روشی است که یک ماتریس را به سه ماتریس دیگر تجزیه می‌کند. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه می‌توان آن را به صورت $A = USV^T$ نوشت که U یک ماتریس یکانی $m \times m$ ، S یک ماتریس قطری $m \times n$ و V یک ماتریس یکانی $n \times n$ می‌باشد.

^۱ Unitary

^۲ Singular value decomposition

$$\hat{A}_k = A - G_1 M_{1,k} C_1 \quad (۲۵)$$

گام اول:

همچنین \hat{Q}_k که تخمین ماتریس Q_k می‌باشد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{Q}_k := Q_k + G_1 M_{1,k} R_1 M_{1,k}^T G_1^T \quad (۲۶)$$

$P_{k|k}^x$ کواریانس تخمین بردار حالت بوده و به صورت رابطه (۲۷-۲۸) به روزرسانی می‌شود.

$$P_{k|k}^x = (I - L_k C) P_{k|k}^{*x} (I - L_k C)^T + L_k R L_k^T + (I - L_k C) G_2 M_{2,k} U_2^T R L_k^T \quad (۲۷)$$

$$+ L_k R U_2 M_{2,k}^T G_2^T (I - L_k C)^T \\ P_{k|k}^{*x} = G_2 M_{2,k} R_2 M_{2,k}^T G_2^T + (I - G_2 M_{2,k} C_2) \tilde{P}_k (I - G_2 M_{2,k} C_2)^T \quad (۲۸)$$

به روزرسانی زمانی تخمین ماتریس R_k بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\tilde{R}_k^* = C P_{k|k}^{*x} C^T - R U_2 M_{2,k}^T G_2^T C + R - C G_2 M_{2,k} U_2^T R \quad (۲۹)$$

K_k ضریب تصحیح فیلتر بوده و به صورت رابطه (۳۰) محاسبه می‌شود.

$$K_k = P_{k|k}^{*x} C^T - G_2 M_{2,k} U_2^T R \quad (۳۰)$$

$M_{1,k}^*$ به روزرسانی ماتریس $M_{1,k}$ بوده و در محاسبه گین فیلتر استفاده می‌گردد.

$$M_{1,k}^* := \Sigma^{-1} (U_1^T \tilde{R}_k^* U_1)^{-1} U_1^T \tilde{R}_k^* \quad (۳۱)$$

ماتریس‌های کواریانس تخمین ورودی نامعین به صورت زیر تخمین زده می‌شوند.

$$P_{1,k}^d = M_{1,k} \tilde{R}_{1,k} M_{1,k} \quad (۳۲)$$

$$P_{2,k-1}^d = (G_2^T C_2^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} C_2 G_2)^{-1} \quad (۳۳)$$

$$P_{12,k-1}^d = -P_{1,k}^d G_1^T C_2^T M_{2,k}^T + M_{1,k-1} C_1 P_{k-1|k-1}^x A^T C_2^T M_{2,k}^T \quad (۳۴)$$

$$P_{k-1}^d = V \begin{bmatrix} P_{1,k-1}^d & P_{12,k-1}^d \\ P_{12,k-1}^{dT} & P_{2,k-1}^d \end{bmatrix} V^T \quad (۳۵)$$

$$\hat{d}_{1,k} = M_{1,k} (z_{1,k} - C_1 \hat{x}_{k|k}) \quad (۱۳)$$

$$\hat{d}_{2,k-1} = M_{2,k} (z_{2,k} - C_2 \hat{x}_{k|k}) \quad (۱۴)$$

$$\hat{d}_{k-1} = V_1 \hat{d}_{1,k-1} + V_2 \hat{d}_{2,k-1} \quad (۱۵)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = A \hat{x}_{k-1|k-1} + G_1 \hat{d}_{1,k-1} \quad (۱۶)$$

گام دوم:

$$\hat{x}_{k|k}^* = \hat{x}_{k|k-1} + G_2 \hat{d}_{2,k-1} \quad (۱۷)$$

گام سوم:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^* + L_k (y_k - C \hat{x}_{k|k}^*) \\ = \hat{x}_{k|k}^* + \tilde{L}_k (z_{2,k} - C \hat{x}_{k|k}^*) \quad (۱۸)$$

در روابط (۱۳-۱۸) تخمین بهینه $\hat{x}_{k|k}$ ، $\hat{x}_{k|k}^*$ ، x_k مقدار به روزرسانی زمانی \hat{d}_k ، تخمین بهینه d_k

$$\tilde{L}_k := L_k U_2 \in R^{n \times (l-p_H)}, L_k \in R^{n \times l}$$

$$M_{2,k} \in R^{(p-p_H) \times (l-p_H)} \text{ و } M_{1,k} \in R^{p_H \times p_H}$$

ماتریس‌های گین فیلتر هستند که باید به گونه‌ای تعیین شوند که کواریانس خطای تخمین حالت‌ها و ورودی نامعین کمینه گردد. مطابق [۲۳] گین‌های فیلتر برای کمینه‌سازی ماتریس کواریانس خطا و همچنین بدون بایاس بودن تخمین سامانه به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$M_{1,k} = \Sigma^{-1} \quad (۱۹)$$

$$M_{2,k} = (G_2^T C_2^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} C_2 G_2)^{-1} G_2^T C_2^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} \quad (۲۰)$$

$$L_k = K_k (I_l - U_1 \Sigma M_{1,k}^*)^T \tilde{R}_k^{*+} \quad (۲۱)$$

در این معادلات روابط زیر را داریم.

$$\tilde{R}_{1,k} = C_1 P_{k|k}^x C_1^T + R_1 \quad (۲۲)$$

$$\tilde{R}_{2,k} = C_2 \tilde{P}_k C_2^T + R_2 \quad (۲۳)$$

در رابطه فوق، \tilde{P}_k را به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{P}_k := \hat{A}_{k-1} P_{k-1|k-1}^x \hat{A}_{k-1}^T + \hat{Q}_{k-1} \quad (۲۴)$$

که در آن، \hat{A}_k به صورت رابطه (۲۵) می‌باشد.

ژیروسکوپ و g شتاب جاذبه زمین می‌باشد، همچنین زیر نویس‌های E ، N و D به ترتیب نشان دهنده مؤلفه‌های شرق، شمال و مؤلفه زیرین (مؤلفه عمود بر شرق و شمال) هستند. در سامانه خطای ناوبری اینرسی تنها مقدار خطای سرعت قابل اندازه‌گیری است زیرا جهت‌گیری اولیه معمولاً قبل از شروع حرکت محاسبه شده و بنابراین مقدار سرعت برابر صفر است از اینرو هر آنچه حسگرهای سرعت اندازه می‌گیرند برابر خطای سرعت می‌باشد. با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x = [v_E, v_N, \psi_E, \psi_N, \psi_D, \nabla_E, \nabla_N, \varepsilon_E, \varepsilon_N, \varepsilon_D]^T$ و با در نظر گرفتن اینکه تنها خطای سرعت در معادلات خطای ناوبری اینرسی قابل اندازه‌گیر است، معادلات خطای ناوبری اینرسی به صورت روابط (۴۴-۴۵) می‌باشد.

$$\dot{x} = A_1 x + \omega_1 \quad (44)$$

$$y = C_1 x + v_1 \quad (45)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} F_1 & I_{5 \times 5} \\ 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 & -g & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & -\Omega_N \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$C_1 = [I_2 \quad 0_{2 \times 8}] \quad (48)$$

ω_1 و v_1 نویز سفید گوسی هستند.

هدف این مقاله ارائه مدلی از خطای ناوبری اینرسی است که با شرایط پایداری فیلتر ارائه شده در [۲۳] مطابقت داشته باشد. هدف ارائه سامانه معادل با سامانه خطای ناوبری اینرسی به صورت روابط (۴۹-۵۰) می‌باشد، که x متغیرهای حالت، d ورودی نامعین، w و v نویز سفید گوسی می‌باشند.

$$\dot{x} = Ax + Gd + w \quad (49)$$

$$y = Cx + Hd + v \quad (50)$$

با توجه به روابط (۴۱-۴۳) متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعین را به صورت (۵۱-۵۲) در نظر می‌گیریم.

مطابق [۲۳] شروط زیر برای پایداری فیلتر نیاز هستند.

۱- سامانه آشکارپذیر قوی^۱ باشد یعنی

$$E[y_k] = 0 \quad \forall k \geq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E[k] = 0 \quad (36)$$

یک شرط لازم و کافی برای آشکارپذیری یک سامانه خطی تغییرناپذیر با زمان برقراری رابطه (۳۷) می‌باشد.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} zI_n - A & -G \\ C & H \end{bmatrix} \right) = n + p, \forall z \in C, |z| \geq 1 \quad (37)$$

رابطه (۳۷) معادل کمینه فاز بودن سامانه است.

۲-

$$\text{rank}(C_2 G_2) = p - p_H \quad (38)$$

۳- زوج (\tilde{A}, C_2) آشکارپذیر باشد.

۴- برای پایداری نمایی باید زوج $(\tilde{A}, \tilde{Q}^{\frac{1}{2}})$ پایدارپذیر باشد.

$$\tilde{Q} = (I - G_2 \tilde{M}_2 C_2) \hat{Q} (I - G_2 \tilde{M}_2 C_2)^T \quad (39)$$

$$\tilde{M}_2 = (C_2 G_2)^\dagger$$

$$\tilde{A} := (I - G_2 \tilde{M}_2 C_2) \hat{A} + G_2 \tilde{M}_2 C_2 \quad (40)$$

۳- معادلات خطای ناوبری اینرسی

معادلات خطای ناوبری اینرسی به صورت زیر می‌باشد [۲۴].

$$\begin{aligned} \dot{v}_E &= 2\Omega_D v_N - g \psi_N + \nabla_E \\ \dot{v}_N &= -2\Omega_D v_E + g \psi_E + \nabla_N \\ \dot{\psi}_E &= \Omega_D \psi_N - \Omega_N \psi_D + \varepsilon_E \\ \dot{\psi}_N &= -\Omega_D \psi_E + \varepsilon_N \end{aligned} \quad (41)$$

$$\dot{\psi}_D = \Omega_N \psi_E + \varepsilon_D$$

$$\dot{\nabla}_E = 0, \dot{\nabla}_N = 0 \quad (42)$$

$$\dot{\varepsilon}_E = 0, \dot{\varepsilon}_N = 0, \dot{\varepsilon}_D = 0 \quad (43)$$

در معادلات (۴۱-۴۳) v و ψ به ترتیب بردار خطای سرعت و جهت‌گیری بوده و Ω بردار نرخ چرخش زمین، ∇ بردار خطای شتاب، ε بردار دررفت

¹ Strong Detectability

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 & 0.3 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

انتخاب این ماتریس‌ها به این دلیل است که شرایط پایداری و همگرایی حالت‌ها در فیلتر [۲۳] را برقرار نماید. ماتریس H یکتا نبوده و می‌تواند به شکل‌های متفاوتی تعیین شود. برای تعیین آن باید دقت کرد که ستون آخر آن به جز درایه مربوط به سطر ۵ باید برابر صفر باشد زیرا مقدار ψ_D^d را نداریم. همچنین درایه واقع در سطر ۵ و ستون آخر حتماً باید برابر ۱ باشد زیرا آنچه فیلتر کالمن تخمین می‌زند برابر $\psi_D + \psi_D^d$ می‌باشد. همچنین تعیین درایه‌های دیگر باید دقت کرد که شرایط پایداری که در ادامه بررسی خواهد شد برآورده شود.

برای پایداری و همگرایی تخمین‌گر باید شروط (۴-۱) و همچنین شرط ضمنی $\text{rank} \begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} = p$ برقرار باشد. شروط ۲، ۳، ۴ و شرط فوق به راحتی با توجه به عددی بودن محاسبات قابل اثبات هستند. برای اثبات شرط ۱ ابتدا باید سامانه را به فرم گسسته بنویسیم، با توجه به اینکه $\text{rank} \begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} = p$ در حالت گسسته نیز برقرار است، همچنین با توجه به اینکه ماتریس C در حالت گسسته برابر ماتریس همانی است بنابراین، ماتریس

$$\begin{bmatrix} zI_n - A & -G \\ C & H \end{bmatrix}$$

همواره دارای رنک ستونی کامل است. اثبات این موضوع در پیوست آمده است.

۴- شبیه‌سازی

در این قسمت شبیه‌سازی روش ارائه‌شده برای تخمین جهت‌گیری اولیه آورده شده است. در این شبیه‌سازی عرض جغرافیایی محلی برابر ۳۹/۹ درجه، نااهم‌محوری اولیه برای هر سه زاویه برابر ۱ درجه و همچنین ماتریس‌های کواریانس نوین به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$x = [v_E \quad v_N \quad \psi_E \quad \psi_N \quad \psi_D \quad \nabla_E]^T \quad (51)$$

$$d = [\nabla_N \quad \varepsilon_E \quad \varepsilon_N \quad \varepsilon_D \quad \psi_D^d]^T \quad (52)$$

مؤلفه ψ_D^d در ورودی‌های نامعین مربوط به خطای همگرایی نااهم‌محوری قطبی می‌باشد. در واقع همان‌طور که قبلاً گفته شد با اعمال فیلتر کالمن پس از همگرایی نااهم‌محوری‌های افقی و خطای شتاب و دریافت ژيروسکوپ، فیلتر جدید را به سامانه معادل اعمال می‌کنیم به همین دلیل خطای تخمین نااهم‌محوری قطبی به‌عنوان ورودی نامعین در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن روابط (۴۱-۴۳) ماتریس‌های حالت و ورودی نامعین به صورت روابط (۵۳-۵۴) می‌باشد.

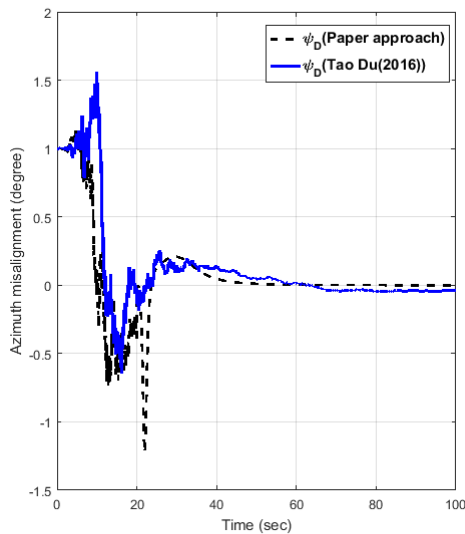
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 1 \\ -2\Omega_D & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & -\Omega_N & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

خروجی اندازه‌گیری شده در این سامانه می‌تواند شامل تمامی حالت‌های سامانه باشد زیرا در مرحله اول با استفاده از فیلتر کالمن حالت‌های سامانه اصلی را تخمین می‌زنیم و تنها نااهم‌محوری قطبی است که تخمین آن را در اختیار نداریم، اما با توجه به در نظر گرفتن خطای تخمین نااهم‌محوری قطبی به‌عنوان ورودی نامعین، این مسئله نیز حل شده و می‌توان هرکدام از حالت‌های سامانه را به‌عنوان خروجی سامانه جدید در نظر گرفت. ماتریس‌های خروجی را به صورت روابط (۵۵-۵۶) در نظر می‌گیریم.

$$C = I_6 \quad (55)$$

همان‌طور که قبلا بیان شد یک مزیت روش ارائه‌شده در این مقاله نسبت به مقالات دیگر مانند [۱۹]، در نظر گرفتن نویز برای مرحله دوم فیلتر است. در [۱۹] در مرحله دوم فیلتر وجود نویز نادیده گرفته شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی [۱۹] در حضور نویز و مقایسه آن با فیلتر ارائه‌شده در این مقاله برای تخمین ناهم‌محوری قطبی در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل (۲): تخمین ناهم‌محوری قطبی به روش فیلتر ارائه‌شده در [۱۹] و فیلتر ارائه‌شده در این مقاله

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود فیلتر ارائه‌شده در [۱۹] در حضور نویز، دیرتر از فیلتر ارائه‌شده در این مقاله همگرا می‌شود. زمان همگرایی فیلتر ارائه‌شده در این مقاله حدود ۴۰ ثانیه و برای فیلتر ارائه‌شده در [۱۹] حدود ۶۸ ثانیه می‌باشد. به‌علاوه دقت همگرایی فیلتر ارائه‌شده در [۱۹] حدود ۰/۰۵ و برای فیلتر ارائه‌شده در این مقاله حدود ۰/۰۱ می‌باشد. در جدول ۱ نتایج تخمین خطای ناهم‌محوری قطبی برای فیلتر ارائه‌شده در این مقاله، فیلتر کالمن و فیلتر ارائه‌شده در [۱۹] آورده شده است.

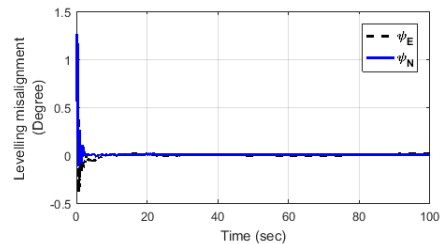
جدول (۱): مقایسه فیلتر ارائه‌شده در این مقاله با فیلتر کالمن و فیلتر ارائه‌شده در [۱۹] برای تخمین ناهم‌محوری قطبی

فیلتر	زمان همگرایی	دامنه همگرایی
فیلتر ارائه‌شده در این مقاله	۴۰ ثانیه	۰/۰۱ درجه
فیلتر ارائه‌شده در [۱۹]	۶۸ ثانیه	۰/۰۵ درجه
فیلتر کالمن	۸۰ ثانیه	۰/۰۹ درجه

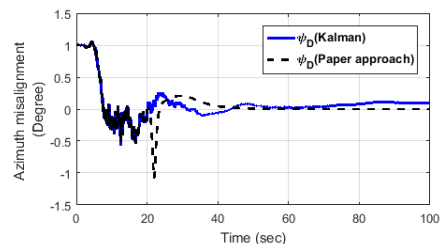
$$Q = \text{diag}[(50\mu\text{g} / \text{Hz})^2 (50\mu\text{g} / \text{Hz})^2 (0.01^\circ / \text{hr} / \text{Hz})^2 (0.01^\circ / \text{hr} / \text{Hz})^2 (0.01^\circ / \text{hr} / \text{Hz})^2 000000]$$

$$R = \text{diag}[(0.1\text{m} / \text{s})^2 (0.1\text{m} / \text{s})^2]$$

نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل ۱ آورده شده است. همان‌طور که در قسمت قبل بیان شد هدف این مقاله تلفیق فیلتر کالمن با فیلتر ارائه‌شده در [۲۳] می‌باشد. در واقع یک سامانه معادل با سامانه خطای ناوبری اینرسی پیشنهاد شده است و پس از آنکه تخمین فیلتر کالمن، به جز برای ناهم‌محوری قطبی همگرا شد با استفاده از فیلتر دوم، تخمین حالت‌ها را همزمان با فیلتر کالمن ادامه می‌دهیم. با توجه به اینکه همگرایی فیلتر دوم براساس قسمت قبل به صورت نمایی می‌باشد بنابراین، فیلتر تلفیق شده سریع‌تر از فیلتر کالمن همگرا خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی نیز این موضوع را تایید می‌کند.



شکل (۱): تخمین به روش فیلتر کالمن و فیلتر تلفیقی ارائه شده در این مقاله



همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، روش ارائه‌شده در این مقاله خطای ناهم‌محوری قطبی، سریع‌تر و دقیق‌تر همگرا می‌شود. خطای ناهم‌محوری قطبی در زمان ۴۰ ثانیه از شروع تخمین همگرا می‌شود در حالی که زمان همگرایی برای فیلتر کالمن ۸۰ ثانیه می‌باشد. به علاوه دقت این همگرایی نیز قابل مقایسه بوده و برای فیلتر کالمن دامنه همگرایی حدود ۰/۰۹ درجه و برای فیلتر ارائه‌شده در این مقاله حدود ۰/۰۱ درجه است. همان‌طور که می‌دانیم به دلیل وجود نویز، دامنه همگرایی به صفر نمی‌رسد.

- [3] El-Sheimy, N., Nassar, S., and Noureldin, A. "Wavelet de-noising for IMU alignment", IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, pp. 32-39, 2004.
- [4] Kalman, R. E. "A new approach to linear filtering and prediction theory", Trans. ASME, J. Basic Eng, pp. 95-108, 1961.
- [5] Jiancheng, F., and Sheng, Y. "Study on innovation adaptive EKF for in-flight alignment of airborne POS", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 60, no. 4, pp. 1378-1388, 2011.
- [6] Park, J. G., Lee, J. G., and Park, C. G. "SDINS/GPS in-flight alignment using GPS carrier phase rate", GPS Solutions, vol. 8, no. 2, pp. 74-81, 2004.
- [7] Han, S., and Wang, J. "A novel initial alignment scheme for low-cost INS aided by GPS for land vehicle applications", The Journal of Navigation, vol. 63, no. 4, pp. 663-680, 2010.
- [8] Zhang, Y., Luo, L., Fang, T., Li, N., and Wang, G. "An improved coarse alignment algorithm for odometer-aided SINS based on the optimization design method", Sensors, vol. 18, no. 1, p. 195, 2018.
- [9] Gu, D., El-Sheimy, N., Hassan, T., and Syed, Z. "Coarse alignment for marine SINS using gravity in the inertial frame as a reference", In Proceedings of IEEE/ION PLANS, Monterey, California, USA, 2008.
- [10] Silson, P. M. "Coarse alignment of a ship's strapdown inertial attitude reference system using velocity loci", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 60, no. 6, pp. 1930-1941, 2011.
- [11] Taizhong, K., Jiancheng, F., and Wei, W. "Quaternion-optimization-based in-flight alignment approach for airborne POS", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 61, no. 11, pp. 2916-2923, 2012.
- [12] Li, J., Xu, J., Chang, L., and Zha, F. "An improved optimal method for initial alignment", The Journal of Navigation, vol. 67, no. 4, pp. 727-763, 2014.
- [13] Wu, Y., and Pan, X. "Velocity/position integration formula part I: Application to in-flight coarse alignment", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 49, no. 2, pp. 1006-1023, 2013.

روش ارائه‌شده در این مقاله هم از نظر سرعت همگرایی و هم از نظر دقت همگرایی با تحقیقات انجام شده در پژوهش‌های دیگر قابل مقایسه بوده و باعث افزایش دقت و کاهش زمان همگرایی تخمین نااهم‌محوری قطبی شده است. به‌عنوان نمونه دامنه همگرایی فیلتر ارائه‌شده در [۲۵] حدود ۰/۰۶ درجه و سرعت همگرایی آن حدود ۹۰ ثانیه می‌باشد. در جدول ۲ نتایج حاصل از تخمین نااهم‌محوری قطبی در تعدادی از پژوهش‌های اخیر و مقایسه آن با نتایج حاصل از این مقاله آورده شده است.

جدول (۲): مقایسه فیلتر ارائه‌شده در این مقاله با فیلترهای ارائه‌شده در پژوهش‌های اخیر

فیلتر	زمان همگرایی	دامنه همگرایی
فیلتر ارائه‌شده در این مقاله	۴۰ ثانیه	۰/۰۱ درجه
چن (۲۰۱۸) [۲۵]	۹۰ ثانیه	۰/۰۶ درجه
یانگ (۲۰۱۷) [۲۶]	۷۰ ثانیه	۰/۰۸ درجه
چن (۲۰۱۹) [۲۷]	۱۰۰ ثانیه	۰/۰۲ درجه
ژیانگ (۲۰۱۹) [۲۸]	۶۰ ثانیه	۰/۰۲ درجه

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به منظور افزایش دقت و سرعت همگرایی جهت‌گیری اولیه در یک سامانه ناوبری اینرسی، روشی جدید شامل تلفیق فیلتر کالمن با یک فیلتر تخمین حالت‌های یک سامانه با ورودی نامعین ارائه‌شده است. همان‌طور که از نتایج شبیه‌سازی مشخص است روش ارائه‌شده در این مقاله نسبت به فیلتر کالمن و فیلتر ارائه‌شده در [۱۷]، هم دقت بالاتری دارد و هم سریع‌تر همگرا می‌شود. به‌علاوه یک مزیت این روش نسبت به روش‌های ارائه‌شده در مقالات دیگر این است که در مرحله دوم تخمین، نویز موجود در معادلات سامانه در نظر گرفته شده است و فیلتر ارائه‌شده با وجود این نویز همگرا شده است.

۶- مراجع

- [1] Rogers, R. M. "Applied mathematics in integrated navigation systems", American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [2] Titterton, D., Weston, J. L., and Weston, J. "Strapdown inertial navigation technology", IET, vol. 17, 2004.

- Conference, 1972.
- [25] Cheng, G., Cao, S., Guo, L., and Chen, W. "Initial alignment of Inertial Navigation System based on a predictive iterated Kalman filter", In 37th Chinese Control Conference (CCC), Wuhan, China, 2018.
- [26] Yang, D., Xu, X., Zhang, T., Sun, J., and Yao, Y. "A fast alignment method for SINS with large misalignment angles based on ADRC", in Integrated Communications, Navigation and Surveillance Conference (ICNS), Nanjing, China, 2017.
- [27] Chen, Y., Li, W., Yang, H., and Xia, T. "Research on the Compensation Strategy of the Initial Alignment of the SINS Based on the Dynamic Model of the Shearer", IEEE Access, vol. 7, pp. 36736-36747, 2019.
- [28] Xu, X., Lu, J., and Zhang, T. "A Fast-Initial Alignment Method With Angular Rate Aiding Based on Robust Kalman Filter", IEEE Access, vol. 7, pp. 51369-51378, 2019.
- [14] Chang, L., Li, J., and Chen, S. "Initial alignment by attitude estimation for strapdown inertial navigation systems", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 64, no. 3, pp. 784-794, 2014.
- [15] Li, J., Song, N., Yang, G., and Jiang, R. "Fuzzy adaptive strong tracking scaled unscented Kalman filter for initial alignment of large misalignment angles", Review of Scientific Instruments, vol. 87, no. 7, p. 075118, 2016.
- [16] Li, W., Wu, W., Wang, J., and Lu, L. "A fast SINS initial alignment scheme for underwater vehicle applications", The Journal of Navigation, vol. 66, no. 2, pp. 181-198, 2013.
- [17] Chuanbin, Z., Weifeng, T., and Zhihua, J. "A novel method improving the alignment accuracy of a strapdown inertial navigation system on a stationary base", Measurement Science and Technology, vol. 15, no. 4, pp. 765-769, 2004.
- [18] Wang, X. "Fast alignment and calibration algorithms for inertial navigation system", Aerospace Science and Technology, vol. 13, no. 4, pp. 204-209, 2009.
- [19] Du, T., Guo, L., and Yang, J. "A fast initial alignment for SINS based on disturbance observer and Kalman filter", Transactions of the Institute of Measurement and Control, vol. 38, no. 10, pp. 1261-1269, 2016.
- [20] Huang, Y., Zhang, Y., and Wang, X. "Kalman-filtering-based in-motion coarse alignment for odometer-aided SINS", IEEE Transactions on instrumentation and measurement, vol. 66, no. 12, pp. 3364-3377, 2017.
- [21] Hou, M., and Patton, R. J. "Optimal filtering for systems with unknown inputs", IEEE transactions on Automatic Control, vol. 43, no. 3, pp. 445-449, 1998.
- [22] Cheng, Y., Ye, H., Wang, Y., and Zhou, D. "Unbiased minimum-variance state estimation for linear systems with unknown input", Automatica, vol. 45, no. 2, pp. 485-491, 2009.
- [23] Yong, S. Z., Zhu, M., and Frazzoli, E. "A unified filter for simultaneous input and state estimation of linear discrete-time stochastic systems", Automatica, vol. 63, pp. 321-329, 2016.
- [24] NASH, JR, R., D'APPOLITO, J., and ROY, K. "Error analysis of hybrid aircraft inertial navigation systems", In Guidance and Control

پیوست:

اثبات شرط ۱ از شروط پایداری:

اثبات:

با توجه به این که $rank \begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} = p$ بنابراین، با عملیات سطری-ستونی مقدماتی می توان ماتریس $\begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix}$ را به فرم $\begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}$ تبدیل کرد. بنابراین، زیر ماتریس $\begin{bmatrix} -G \\ H \end{bmatrix}$ را می توان با عملیات سطری-ستونی مقدماتی به صورت $\begin{bmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{n \times p} \end{bmatrix}$ تبدیل کرد. از طرفی چون ماتریس C رنک ستونی n دارد. بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} zI_n - A & -G \\ C & H \end{bmatrix}$ همواره رنک ستونی کامل خواهد داشت. توجه شود که برای تبدیل $\begin{bmatrix} -G \\ H \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{n \times p} \end{bmatrix}$ از هیچ عملیات ستونی که به ستون های $\begin{bmatrix} zI_n - A \\ C \end{bmatrix}$ نیاز داشته باشد استفاده نشده است.

