

علمی-پژوهشی

## مدل سازی تحلیلی بار ضربه‌ای نانوذره روی نانو ورق انحنا دار

سعید فعلی<sup>۱</sup>گلاره مهربان<sup>۲</sup>

دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک

دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۱۷)

## چکیده

در این مقاله مدل تحلیلی برای بررسی پاسخ دینامیکی نانو ورق انحنا دار تحت اثر بار ضربه‌ای نانوذره ارائه شده است. برخلاف مقیاس ماکرو، در مقیاس نانو، تعاملات بین‌اتمی مانند نیروی واندروالسی در محاسبات در نظر گرفته می‌شوند. بار ضربه‌ای وارد شده به نانو ورق انحنا دار، به صورت نیروی واندروالسی بین نانوذره و نانو ورق در نظر گرفته شده و با استفاده از پتانسیل لنارد-جونز نیروی واندروالسی بین نانو ورق سیلیکونی و نانوذره کربنی محاسبه گردیده است. برای محاسبه میدان جابجایی نانو ورق از تئوری ورق کیرشف-لاو و سری دوگانه فوریه استفاده شده است. همچنین، معادلات حاکم با استفاده از نظریه الاستیسیته سطحی و در نظر گرفتن تنش پسماند سطحی، روابط گورتین-مرداک و اصل هامیلتون استخراج شده و این معادلات برای نانو ورق انحنا دار با شرایط تکیه‌گاهی ساده، با استفاده از روش عددی رانج-کاتای مرتبه چهارم و کدنویسی متلب حل شده است. نتایج مدل تحلیلی با مدل تحلیلی که بار ضربه‌ای نانوذره را روی نانو ورق مسطح چهارگوش مدل کرده، اعتبارسنجی شده است. در ادامه، اثر پارامترهای هندسی نانو ورق مانند انحناء و ضخامت، اثرات سطحی آن و تغییرات جرم و سرعت نانوذره بر نیروی واندروالسی و پاسخ دینامیکی نانو ورق مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش شعاع خمیدگی ورق، بیشینه تغییر شکل در یک زاویه انحنای ثابت کاهش می‌یابد و با در نظر گرفتن اثر سطحی، بیشینه جابجایی مرکز نانو ورق نیز کاهش خواهد یافت و نیز نقش اثر سطحی در بیشینه انحراف نانو ورق با افزایش ضخامت ورق کمتر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نانو ورق انحنا دار، نانوذره، ضربه، حل تحلیلی

## Analytical Modeling of Impact loading of Nanoparticles on the Nano-curved Plate

S. Feli<sup>2</sup>G. Mehraban<sup>1</sup>Dept. of Mechanical Engineering  
Razi University, Kermanshah, Iran

(Received: 23/ Sepyember /2019; Accepted: 06/February/2020)

## ABSTRACT

In this paper an analytical model is presented to investigate the dynamic response of the nano-curved plate under impact loading of nanoparticles. Unlike the macroscale, long-range interatomic interactions, such as the Van der Waals (vdW) force, are considered at the nanoscales. The impact load on the nano-curved plate is considered as an interaction between the nanoparticle and the nano-plate. The vdW force between the carbon nanoparticle and silicon nano-curved plate is determined by the Lennard-Jones potential. The Love-Kirchhoff plate theory and Double Fourier series are used for determining the displacement field of the nano-plate. Also the governing equations of the nano-curved plate are derived by considering the residual surface stress, Gurtin and Murdoch relations and Hamilton's principle and are solved for a simply supported nano-curved plate by using the Rung-Kutta's fourth order method in MATLAB. The analytical model results are validated with an analytical model that has investigated the dynamic response of the nanoparticle impact on a rectangular nano-plate. The effects of geometrical parameters such as curvature, thickness, mass and velocity are investigated. Also the surface effects of the nano-plate on the vdW force and the dynamic response of the nano-curved plate are studied. The results show that by increasing the radius of curvature, the maximum deformation at a constant curvature angle is decreased. Also, by considering the surface effect, the maximum displacement of the center of the nano-plate is reduced and the role of the surface effect on the maximum deflection of the nano-plate decreases with increasing nano-plate thickness.

**Keywords:** Nano-curved plate, impact, Nanoparticle, Analytical solution

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): felisaeid@gmail.com

۲- دانشجوی دکتری: g.mehraban62@yahoo.com

License \* حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (CC BY-NC) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://maj.ihu.ac.ir> دیدن فرمائید.

## ۱- مقدمه

اخیراً از نانو ساختارها به‌طور گسترده در سیستم‌های نانو الکترومکانیکی و میکروماشین‌ها مانند نانوحسگرها، نانو محرک‌ها و حسگرها استفاده می‌شود. با توجه به رشد روزافزون فناوری نانو، علاقه زیادی به بررسی پدیده‌های مکانیکی مختلف در مقیاس نانو وجود دارد [۱،۲]. یکی از موضوعات علمی در این خصوص بررسی و تحلیل مقاومت به ضربه سازه‌های ساخته‌شده در مقیاس نانو و توانایی تحمل ضربه اجسام خارجی در این سازه‌ها می‌باشد [۳]. بررسی و تحلیل برخورد نانوذره به نانو ورق در طراحی میکروماشین‌ها، طراحی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و نانو الکترومکانیکی، نانو شتاب‌سنج‌ها، نانو محرک‌ها و طراحی حسگرها در مقیاس نانو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در مسائل برخورد در مقیاس مایکروسکوپی، مدل‌های تماسی کلاسیک مانند مدل تماسی هرتز تطابق خوبی با نتایج تجربی و شبیه‌سازی عددی دارد ولیکن پیش‌بینی ضربه بر اساس مدل تماس هرتز، برای اجسام در مقیاس نانو قابل‌استفاده نیست زیرا در این مدل اثرات سطحی و نیروی تعاملی واندروالسی در نظر گرفته نمی‌شود [۴]. در سازه‌های ساخته‌شده در مقیاس نانو ثابت گردیده که خواص مکانیکی مواد روی لایه‌های الاستیک مرز خارج، متفاوت از توده ماده است. این موضوع با بررسی معادلات تعادل در حجم و سطح ماده توسط گورتین و مرداک بررسی شده است. در بررسی نانو ساختارها به دلیل مقادیر بزرگ نسبت سطح به حجم، از خواص سطحی نمی‌توان چشم‌پوشی نمود. علاوه بر آن در بررسی ضربه در مقیاس میکرو و نانو نیروهای تعاملی بین‌اتمی مانند نیروی واندروالسی در نظر گرفته می‌شوند [۵]. در ضربه بین نانو ساختارها، هم‌زمان دونیروی واندروالسی دافع کوتاه-برد و جاذب دور-برد وجود دارد. در ضربه سرعت‌پایین، ضربه زننده نانو شانس رسیدن به نانو ورق را ندارد و به دلیل وجود نیروی قوی واندروالسی دافع، از آن دور می‌شود. وقتی فاصله جدایی بین ضربه زننده و نانو ورق از یک فاصله مشخصی بیشتر شود، نیروی جاذب واندروالسی غالب شده و ضربه زننده را به نانو ورق نزدیک می‌کند.

سان [۴] نیروهای تعاملی یک نانوذره کروی و یک لایه مسطح که شامل نیروهای واندروالسی و نیروهای تماسی

مکانیکی است را بررسی کرد. اسدی [۵] ارتعاش اجباری نانو ورق‌ها را با در نظر گرفتن اثرهای سطحی بررسی کرد. او روشی تحلیلی برای مدل‌سازی ارتعاش اجباری نانو ورق مستطیلی تحت بارگذاری عمومی خارجی را با استفاده از تئوری عمومی مدل ورق کیرشهف ارائه کرد و نشان داد که خواص سطحی، طیف فرکانس‌های نانو ورق را به هم نزدیک می‌کند. هوانگ [۶] مدل پیوسته اصلاح‌شده از فیلم نازکی در مقیاس نانو با ترکیب الاستیسیته سطحی و تئوری ورق فون کارمن پیشنهاد داد که در آن اثر تنش‌های عمودی غیر صفر و تغییر شکل‌های بزرگ را نیز در نظر گرفت. این مدل راه‌حل دقیقی برای مطالعه خمش، کمانش و ارتعاش نانو ورق‌ها با تکیه‌گاه‌های ساده را ارائه می‌کند. لی و وانگ [۷] اثر پارامتر مقیاس کوچک روی فرکانس‌های طبیعی و پایداری دینامیکی نانولوله‌های تک و دوجداره که تحت بارهای نوسانی محوری را بررسی کردند و فهمیدند که اثر این پارامتر به شکل بارگذاری و هندسه نانولوله کربنی بستگی دارد. وانگ و همکاران [۸] ارتعاش آزاد میکرو و نانو تیرها را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و الاستیسیته غیرمحلی ارینگن بررسی کردند. معادلات حاکم و شرایط مرزی را با استفاده از معادلات هامیلتون به دست آورده و حل تحلیلی برای ارتعاش تیرها با شرایط انتهایی مختلف را ارائه دادند. ملک‌زاده و غلامی [۹] به تحلیل دینامیکی پوسته‌های مرکب دوانحنایه، تک انحنایه، صفحه تخت و پوسته استوانه‌ای کامل تحت ضربه عرضی سرعت‌پایین چند جرم ضربه زننده پرداختند. سان و همکاران [۱۰] نیروهای تماسی نرمال بین نانو کره‌های سیلیکا را بررسی کردند. در این روش نیروهای تعاملی بین دو نانو کره سیلیکا بعد از تماس که شامل نیروهای جاذب واندروالسی و دافع و نیز نیروهای تماسی مکانیکی است با شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی مورد مطالعه قرار گرفت. اثرات مسیر تماس (نزدیک شدن یا دور شدن)، سرعت نسبی اولیه و جهت‌گیری نسبی ابتدایی دو نانو کره مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که نیروهای بین‌ذره‌ای تا حد زیادی مستقل از این متغیرها است. در سال ۲۰۱۷ هوآ لیو و همکاران [۱۱] بار ضربه‌ای سرعت‌پایین یک نانوذره کروی روی یک نانو ورق مسطح چهارگوش را به‌صورت تئوری بررسی کردند. آن‌ها پاسخ دینامیکی نانو ورق را با استفاده از

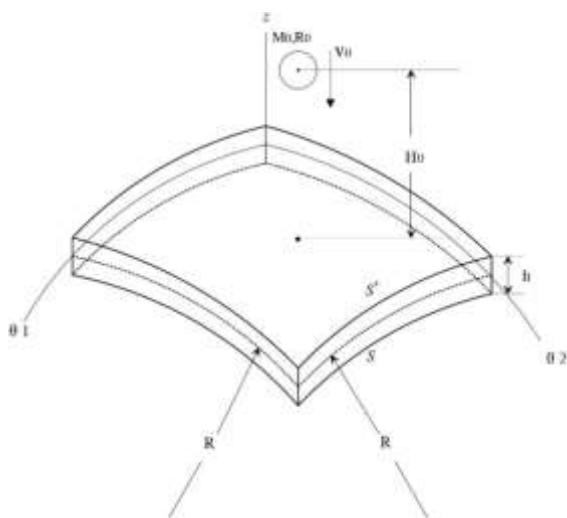
تئوری الاستیسیته سطحی و اصل هامیلتون و با در نظر گرفتن خواص سطحی نانو ورق به دست آوردند.

در این مقاله برای اولین بار مدل تحلیلی جدیدی ارائه می‌گردد که ضربه سرعت‌پایین یک نانوذره کربنی را بر مرکز یک نانو ورق انحنادار سیلیکونی مدل‌سازی و تحلیل می‌نماید. با الگوگیری از روش ارائه‌شده توسط هوآ لیو، برای اولین بار ضربه سرعت‌پایین نانوذره روی نانو ورق انحنادار تحلیل می‌شود. نیروی عامل بر نانو ورق، نیروی تعاملی واندروالسی است. نیروهای واندروالسی در یک محدوده معین عمل می‌کنند که این محدوده، به نوع اتم‌هایی که باهم تعامل دارند بستگی دارد و دارای مقدار مشخصی می‌باشد. در ابتدا ضربه زننده که در فاصله‌ای بزرگ‌تر از محدوده عمل نیروی تعاملی قرار دارد، با سرعت اولیه ثابت به نانو ورق نزدیک شده و تا زمانی که نانوذره به محدوده عمل نیروی تعاملی نرسد، نیرویی به آن وارد نمی‌شود. هنگامی که نانوذره وارد محدوده اثر نیروی تعاملی می‌شود، در ابتدا نیروی جاذب واندروالسی<sup>۱</sup> به آن وارد شده و نانوذره و نانو ورق به هم نزدیک می‌شوند. زمانی که فاصله نانوذره و نانو ورق از مقدار معینی کمتر شود، نیروی دافع واندروالسی<sup>۲</sup> بر نیروی جاذب غلبه کرده و نانوذره و نانو ورق از هم دور می‌شوند. بدین ترتیب به نانو ورق نیرو وارد شده و شروع به نوسان می‌کند. با به دست آوردن معادلات مربوط به جابجایی نانو ورق انحنادار و حل آن‌ها به کمک برنامه رایانه‌ای، مقدار نیروی تعاملی واندروالسی، مقدار جابجایی نانو ورق و مؤلفه‌های تنش اعمالی به نانو ورق محاسبه می‌شود. در نهایت، اثرات جرم و سرعت اولیه پرتابه، تغییرات شعاع و زوایای انحنای و ضخامت نانو ورق و نیز خواص سطحی آن بر پاسخ دینامیکی نانو ورق بررسی شده است.

تغییر شکل نمی‌دهد و فرض می‌شود که در طول ضربه، تغییر شکل‌های بی‌نهایت کوچک را تحمل کند. شعاع اصلی انحنای صفحه میانی در جهت محورهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  است. حجم داخلی و هر دو سطح نانو ورق الاستیک خطی، همگن و همسانگرد فرض شده است. در تئوری الاستیسیته سطحی، سطح بالایی را با  $S^+$  و سطح پایینی را با  $S^-$  نشان می‌دهند که به طور ایده‌آل این دو سطح کاملاً به ورق چسبیده و بدون لغزش هستند. نانوذره کروی به صورت عمود، با سرعت اولیه  $v_0$  و ارتفاع اولیه  $H_0$  به مرکز نانو ورق نزدیک می‌شود.

فرضیات زیر برای ارائه مدل تحلیلی در نظر گرفته شده است:

- پرتابه صلب است و بدون تغییر شکل باقی می‌ماند.
- نانو ورق به صورت انحنادار با شعاع انحناء دو طرف  $R$  و ضخامت یکنواخت  $h$  می‌باشد.
- نانو ورق دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده است.
- سرعت ضربه و رفتار نانوذره به گونه‌ای است که تغییر شکل‌ها در آن به صورت الاستیک بوده و عیوب ناشی از نیروی زیاد در نانو ورق ایجاد نمی‌شود.
- توزیع اتم‌ها در نانوذره و نانو ورق یکنواخت می‌باشد.
- در تغییر شکل‌های کوچک از نیروهای درون صفحه در نانو ورق صرف نظر می‌شود.



شکل (۱): نانو ورق انحنادار تحت ضربه نانوذره.

## ۲- مدل تحلیلی

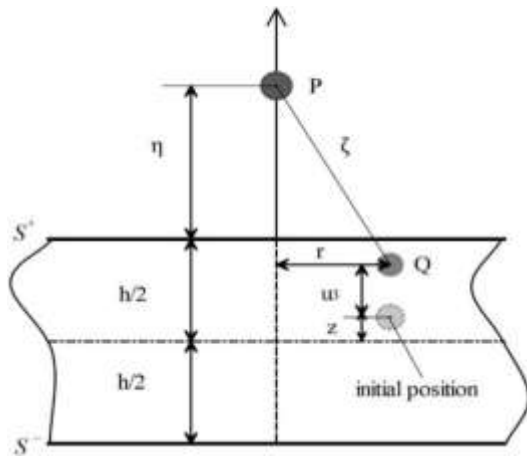
شکل ۱ مشخصات هندسی نانو ورق دو انحنایی را نشان می‌دهد.

$(\theta_1, \theta_2, z)$  محورهای مختصات منحنی الخط متعامد می‌باشند، به طوری که  $\theta_1$  و  $\theta_2$  منطبق بر صفحه میانی

<sup>1</sup>. Attractive van der Waals (vdW) force

<sup>2</sup>. Repulsive vdW force

که در آن،  $N$  تعداد اتم‌ها در واحد حجم نانو ورق است.



شکل (۲): نیروی تعاملی واندروالسی بین نقاط Q و P [۱۱].

برای رسیدن به یک عبارت تحلیلی برای نیروی تعاملی بین نانوذره و نانو ورق، نمونه‌ای که کمترین فاصله بین آن‌ها بسیار بیشتر از جابجایی عرضی نانو ورق ( $u_3$ ) است، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین بار توزیع شده  $q_{vdw}$  با توجه به وضعیت تغییر شکل نیافته، می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۱۱]:

$$q_{vdw} = q_{vdw}|_{u_3=0} + \frac{\partial q_{vdw}}{\partial u_3} |_{u_3=0} u_3 \quad (5)$$

با استفاده از معادلات (۳) و (۴) [۱۱]:

$$q_{vdw}|_{u_3=0} = \frac{6N(\eta + h/2 + z)}{\zeta^8} \left( A - \frac{2B}{\zeta^6} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial q_{vdw}}{\partial u_3} |_{u_3=0} = 6N \left[ \frac{(\eta + h/2 + z)^2}{\zeta^{10}} \left( 8A - \frac{28B}{\zeta^6} \right) - \frac{A}{\zeta^8} + \frac{2B}{\zeta^{14}} \right]$$

با انتگرال‌گیری روی حجم نانو ورق، نیروی تعاملی واندروالسی کلی در طول محور  $z$ ، میان اتم P و نانو ورق می‌تواند به صورت زیر داده شود [۱۱]:

$$f_0 = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{r_{cut}} q_{vdw} r dr d\theta dz \quad (7)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{r_{cut}} \left( q_{vdw}|_{u_3=0} + \frac{\partial q_{vdw}}{\partial u_3} |_{u_3=0} u_3 \right) r dr d\theta dz$$

## ۱-۲- محاسبه نیروی تعاملی بین نانوذره و نانو ورق

در مسائل ضربه در مقیاس نانو، تعامل بین‌اتمی دور-برد نقش مهمی دارد [۱۲]. پتانسیل واندروالسی بین دو اتم غیر متصل اختیاری که از یکدیگر به اندازه  $\zeta$  فاصله دارند، می‌تواند با پتانسیل لِنارد-جونز<sup>۱</sup> توصیف شود. پتانسیل لِنارد-جونز یک پتانسیل تقریبی برای توصیف برهم‌کنش میان دو ذره (اتم یا مولکول) است که در فاصله‌های دور نیروی جاذبه و در فاصله‌های نزدیک نیروی دافعه دارند؛ بنابراین، پتانسیل واندروالسی ( $W_{vdw}$ ) برابر است با [۱۱]:

$$W_{vdw} = \begin{cases} -\frac{A}{\zeta^6} + \frac{B}{\zeta^{12}} & \text{for } 0 < \zeta \leq r_{cut} \\ 0 & \text{for } \zeta > r_{cut} \end{cases} \quad (1)$$

در این رابطه،  $A$  و  $B$  ثوابت ماده،  $r_{cut}$  محدوده اثر نیروی واندروالسی و  $\zeta$  فاصله دو اتم غیر متصل در نانوذره و نانو ورق است. هنگامی که  $\zeta$  بزرگ‌تر از  $r_{cut}$  است، مقدار  $W_{vdw}$  تقریباً کوچک است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. بنابراین، نیروی واندروالسی ( $F_{vdw}$ ) بین دو اتم غیرمتصل را می‌توان از معادله زیر به دست آورد [۱۱]:

$$F_{vdw} = \frac{\partial W_{vdw}}{\partial \zeta} = \begin{cases} \left( \frac{6A}{\zeta^7} - \frac{12B}{\zeta^{13}} \right) & \text{for } 0 < \zeta \leq r_{cut} \\ 0 & \text{for } \zeta > r_{cut} \end{cases} \quad (2)$$

مطابق شکل (۲) نقطه دلخواه Q در نانو ورق توسط مختصات قطبی  $(r, \theta, z)$  نشان داده می‌شود که  $r$  و  $\theta$  جهت‌های شعاعی و مماسی هستند. فاصله بین دو نقطه Q و P عبارت است از [۱۱]:

$$\zeta = \sqrt{r^2 + (\eta + h/2 - z - u_3)^2} \quad (3)$$

که در آن،  $u_3$  مؤلفه عمودی جابجایی Q در راستای محور  $z$ ،  $h$  ضخامت نانو ورق و  $\eta$  فاصله عمودی نقطه P تا سطح بالایی نانو ورق تغییر شکل نیافته می‌باشد. با توجه به توزیع یکنواخت اتم‌ها در نانوذره و نانو ورق و صرف‌نظر کردن از نیروهای درون صفحه در نانو ورق به دلیل کوچک بودن تغییر شکل‌ها، نیروی عرضی عامل ( $q_{vdw}$ ) بر واحد حجم نانو ورق توسط اتم P عبارت است از [۱۱]:

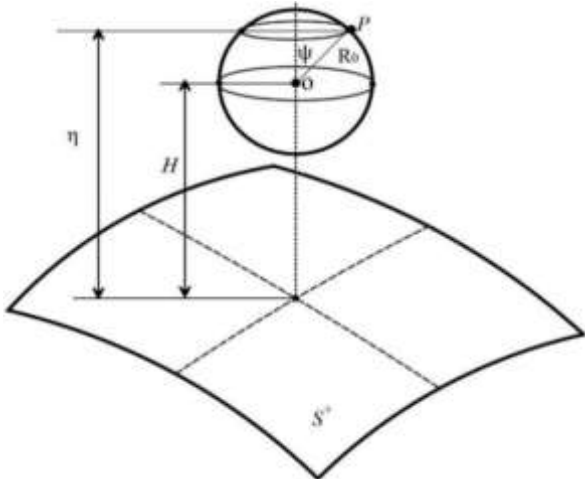
$$q_{vdw} = N \left( \frac{6A}{\zeta^7} - \frac{12B}{\zeta^{13}} \right) \left( \frac{\eta + h/2 - z - u_3}{\zeta} \right) \quad (4)$$

<sup>۱</sup>. Lennard-Jones

$$F_0 = \int_V f_0(\eta) N_0 dV \quad (10)$$

$$= N_0 \int_0^\pi f_0(\eta) \pi (R_0 \sin \psi)^2 (-R_0 \sin \psi) d\psi$$

که در آن،  $N_0$  تعداد اتم‌ها در واحد حجم نانوذره است.



شکل (۳): سیستم مختصات محلی درون نانوذره.

با جایگذاری متغیرها در معادله (۱۰) داریم [۱۱]:

$$F_0(H, u_{3c}) = 2\pi^2 R_0^3 N N_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{A}{r_{cut}^6} - \frac{B}{r_{cut}^{12}} \right) X_{-2} - \left( -\frac{A}{4} X_4 + \frac{B}{10} X_{10} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{6A}{r_{cut}^8} - \frac{12B}{r_{cut}^{14}} \right) X_{-3} u_{3c} - \left( -\frac{A}{r_{cut}^6} + \frac{B}{r_{cut}^{12}} \right) X_{-1} u_{3c} - (-AX_5 + BX_{11}) u_{3c} \right] \quad (11)$$

که در آن، ضرایب  $X_q (q = -3, -2, -1, 4, 5, 10, 11)$  رابطه زیر به دست می‌آید [۱۱]:

$$X_q = \int_{-1}^1 \frac{1 - \zeta^2}{(H + h + R\zeta)^q} d\zeta - \int_{-1}^1 \frac{1 - \zeta^2}{(H + R\zeta)^q} d\zeta \quad (12)$$

مقادیر  $X_q$  در پیوست آورده شده است.

### ۳-۲- شدت بار توزیعی

با در نظر گرفتن روش یانگ و کیانو [۱۳]، نیروی تعاملی بین ضربه زننده و نانو ورق، به صورت بار توزیع شده یکنواخت روی

از آنجا که اندازه ذرات بسیار کوچک‌تر از نانو ورق است و نیروی واندروالسی به سرعت با افزایش فاصله کاهش می‌یابد، محدوده اثر نیروی واندروالسی در واقع به یک محدوده کوچک در نانو ورق محدود می‌شود. در نتیجه، بار توزیع شده می‌تواند ثابت در نظر گرفته شود و جابجایی عرضی نانو ورق ( $u_3$ ) در داخل این محدوده تقریباً با جابجایی مرکز نانو ورق ( $u_{3c}$ ) برابر است. با وارد کردن معادلات (۳) و (۶) به معادله (۷) و انتگرال‌گیری از آن، نیروی واندروالسی بین اتم P و نانو ورق عبارت است از [۱۱]:

$$f_0(\eta, u_{3c}) = -2\pi N \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{A}{r_{cut}^6} - \frac{B}{r_{cut}^{12}} \right) [(\eta + h)^2 - \eta^2] - \left[ \left( -\frac{A}{4(\eta + h)^4} + \frac{B}{10(\eta + h)^{10}} \right) - \left( -\frac{A}{4\eta^4} + \frac{B}{10\eta^{10}} \right) \right] + \frac{1}{3} \left( \frac{6A}{r_{cut}^8} - \frac{12B}{r_{cut}^{14}} \right) [(\eta + h)^3 - \eta^3] u_{3c} + \left( -\frac{A}{r_{cut}^6} + \frac{B}{r_{cut}^{12}} \right) h u_{3c} + \left[ \left( \frac{A}{(\eta + h)^5} - \frac{B}{(\eta + h)^{11}} \right) - \left( \frac{A}{\eta^5} - \frac{B}{\eta^{11}} \right) \right] u_{3c} \right\} \quad (8)$$

### ۲-۲- تعریف سیستم مختصات محلی برای نانوذره

مطابق معادله (۸) نیروی واندروالسی به  $\eta$  وابسته است. برای بیان مقدار  $\eta$  در هر لحظه، یک سیستم مختصات محلی برای نانوذره تعریف می‌گردد که در شکل ۳ نمایش داده شده است. مبدأ O در مرکز نانوذره و H، فاصله مرکز نانوذره از سطح بالایی نانو ورق تغییر شکل داده نشده است.  $\eta$  در هر لحظه به مقدار H و زاویه بین خط واصل نقطه P و مبدأ O یعنی  $\psi$  بستگی دارد. این رابطه را می‌توان به شکل رابطه (۹) بیان کرد [۱۱]:

$$\eta = H + R_0 \cos \psi \quad (9)$$

با فرض توزیع یکنواخت اتم‌ها در نانوذره و انتگرال‌گیری روی حجم نانوذره، نیروی واندروالسی کلی ( $F_0$ ) بین نانوذره و نانو ورق به دست می‌آید [۱۱]:

با توجه به میدان جابجایی، جابجایی صفحات  $S^+$  و  $S^-$  (سطوح بالا و پایین نانو ورق انحناء دار) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} u_1^{s\pm} &= \mp \frac{h}{2R} u_{3,1} \\ u_2^{s\pm} &= \mp \frac{h}{2R} u_{3,2} \\ u_3^{s\pm} &= u_3 \end{aligned} \quad (18)$$

فرض می‌شود سطوح  $S^+$  و  $S^-$  که به صورت لایه‌های نازک بالایی و پایینی در نظر گرفته می‌شوند، دارای ثابت‌های الاستیک مشابه هستند. روابط ساختاری تنش-جابجایی این سطوح که توسط گورتین و مرداک [۱۵] ارائه شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^s &= \tau^s \delta_{\alpha\beta} + (\tau^s + \lambda^s) \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \tau^s u_{\alpha,\beta} \\ &\quad + 2(\mu^s - \tau^s) \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 3}^s &= \tau^s u_{3,\alpha} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

که در این رابطه،  $\delta_{\alpha\beta}$  دلتای کرونکر،  $\tau^s$  تنش باقیمانده سطحی است که فرض می‌شود به صورت یکنواخت روی سطوح  $S^+$  و  $S^-$  توزیع شده است و  $\lambda^s$  و  $\mu^s$  ثوابت لامه سطح هستند.

از معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۱۸) تنش‌های سطحی به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{s\pm} &= \tau^s \mp \frac{h}{2R^2} [(2\mu^s + \lambda^s) u_{3,11} \\ &\quad + (\tau^s + \lambda^s) u_{3,22}] \\ \sigma_{22}^{s\pm} &= \tau^s \mp \frac{h}{2R^2} [(2\mu^s + \lambda^s) u_{3,22} \\ &\quad + (\tau^s + \lambda^s) u_{3,11}] \\ \sigma_{12}^{s\pm} &= \mp \frac{h}{2R^2} [(2\mu^s - \tau^s) u_{3,12}] \\ \sigma_{13}^{s\pm} &= \frac{\tau^s}{R} u_{3,1} \\ \sigma_{23}^{s\pm} &= \frac{\tau^s}{R} u_{3,2} \end{aligned} \quad (20)$$

با توجه به تنش و کرنش‌های به دست آمده، انرژی کرنشی الاستیک در نانو ورق می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} U &= U^b + U^s \\ &= \iint_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_3 + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{s+} \varepsilon_{ij}^{s+} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{s-} \varepsilon_{ij}^{s-} \right) R^2 dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( (-M_{11} u_{3,11} - M_{22} u_{3,22} - 2M_{12} u_{3,12}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^s}{R^2} (u_{3,1}^2 + u_{3,2}^2) \right) R^2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن،  $U^b$  انرژی کرنشی حجم نانو ورق،  $U^s$  انرژی کرنشی سطوح بالا و پایین،  $\Omega$  نماد سطح صفحه میانی نانو ورق است و:

سطح مربعی به طول  $a_0$  در نظر گرفته می‌شود که  $a_0 = R_0 \sqrt{\pi}$  می‌باشد. بنابراین، شدت بار توزیعی برابر است با [۱۱]:

$$q_0 = \frac{F_0(H, u_{3c})}{a_0^2} \quad (13)$$

#### ۴-۲- پاسخ ضربه نانو ورق

رفتار ضربه در نانو ساختارها با ارتعاش همراه است. مشابه با مرجع [۱۴] معادلات دینامیکی نانو ورق با در نظر گرفتن اثر سطحی بر اساس اصل هامیلتون استخراج می‌شوند. با توجه به نازک بودن ورق می‌توان از مدل ورق کیرشلف-لاو برای تحلیل پاسخ دینامیکی نانو ورق استفاده نمود.

دستگاه مختصات دکارتی و منحنی‌الخط قائم توسط روابط زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_1 &= R\theta_1 \\ x_2 &= R\theta_2 \\ x_3 &= z \end{aligned} \quad (14)$$

میدان جابجایی در صفحه میانی با توجه به صفر بودن جابجایی‌های اولیه نانو ورق، می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$u_{\alpha} = -\frac{x_3}{R} u_{3,\alpha} \quad (15)$$

که در آن، جابجایی عرضی ( $u_3$ ) در امتداد ضخامت ورق ثابت است. کاما نشان‌دهنده مشتق‌گیری در فضای مختصات است و  $\alpha$  مقادیر ۱ و ۲ را می‌گیرد.

روابط کرنش-جابجایی در یک نانو ورق دوانحنایی مطابق روابط زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} = -\frac{x_3}{R^2} u_{3,11} \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} = -\frac{x_3}{R^2} u_{3,22} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = -\frac{x_3}{R^2} u_{3,12} \end{aligned} \quad (16)$$

روابط تنش-کرنش داخل نانو ورق (به جز، سطوح بالا و پایینی) طبق روابط هوک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{E x_3}{R^2(1-\nu^2)} (u_{3,11} + \nu u_{3,22}) \\ \sigma_{22} &= -\frac{E x_3}{R^2(1-\nu^2)} (u_{3,22} + \nu u_{3,11}) \\ \sigma_{12} &= -\frac{E x_3}{R^2(1+\nu)} u_{3,12} \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن،  $\nu$  و  $E$  به ترتیب ضریب پواسون و مدول یانگ ماده هستند.

که  $D^*$  استحکام خمشی مؤثر نانو ورق است.

برای یک نانو ورق انحنادار با تکیه‌گاه‌های ساده، شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$u_3|_{\theta_1=0} = u_3|_{\theta_1=\theta} = 0, \quad u_3|_{\theta_2=0} = u_3|_{\theta_2=\theta} \quad (۲۹)$$

برای ارضا شرایط مرزی در معادله (۲۷)، جابجایی نانو ورق انحنادار می‌تواند به صورت سری دوگانه فوریه زیر بیان شود:

$$u_3(\theta_1, \theta_2, t) = \sum_m \sum_n W_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi\theta_1}{\theta}\right) \sin\left(\frac{n\pi\theta_2}{\theta}\right) \quad (۳۰)$$

که در آن،  $W_{mn}$  تابع زمان است. واضح است که جابجایی عرضی مرکز نانو ورق انحنادار عبارت است از:

$$u_{3c} = u_3\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}, t\right) = \sum_m \sum_n W_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (۳۱)$$

توزیع بار خارجی روی نانو ورق انحنادار از سری دوگانه فوریه زیر محاسبه می‌گردد:

$$q(\theta_1, \theta_2, t) = \sum_m \sum_n Q_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi\theta_1}{\theta}\right) \sin\left(\frac{n\pi\theta_2}{\theta}\right) \quad (۳۲)$$

با جایگذاری معادله (۱۳) در معادله (۳۲)،  $Q_{mn}$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$Q_{mn} = \frac{4}{\theta\theta} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}+\frac{\theta_0}{2}} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}+\frac{\theta_0}{2}} q_0 \sin\left(\frac{m\pi\theta_1}{\theta}\right) \sin\left(\frac{n\pi\theta_2}{\theta}\right) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{16F_0}{\pi^2 mn R_0^2 \theta_0^2} \left( \sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2} \sin\frac{m\pi\theta_0}{2\theta} \sin\frac{n\pi\theta_0}{2\theta} \right) \quad (۳۳)$$

با جایگذاری معادلات (۳۰) و (۳۲) در معادله (۲۷) معادله خیز حاکم بر مسئله از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{W}_{mn} = - \left\{ \frac{D^* \pi^4}{\rho^* h R^4} \left( \frac{m^2}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^2} \right)^2 + \frac{2\tau^s \pi^2}{\rho^* h R^2} \left( \frac{m^2}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^2} \right) \right\} W_{mn} + \frac{Q_{mn}}{\rho^* h} \quad (۳۴)$$

با صرف نظر کردن از انرژی کرنشی نانو ذرات به دلیل کوچکی اندازه آن‌ها، شتاب نانوذره برابر است با [۱۱]:

$$\ddot{H} = -\frac{F_0}{M_0} = -\frac{3F_0}{4\pi\rho_0 R_0^3} \quad (۳۵)$$

شرایط اولیه مسئله عبارت است از:

$$M_{11} = - \left( D + \frac{(2\mu^s + \lambda^s)}{4R^4} h^2 \right) u_{3,11} - \left( \nu D + \frac{(\tau^s + \lambda^s)}{4R^4} h^2 \right) u_{3,22}$$

$$M_{22} = - \left( D + \frac{(2\mu^s + \lambda^s)}{4R^4} h^2 \right) u_{3,22} - \left( \nu D + \frac{(\tau^s + \lambda^s)}{4R^4} h^2 \right) u_{3,11} \quad (۲۲)$$

$$M_{12} = M_{21} = - \left[ (1 - \nu) D + \frac{(2\mu^s - \tau^s)}{4R^4} h^2 \right] u_{3,12}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12R^4(1 - \nu^2)}$$

انرژی جنبشی نانو ورق انحنادار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\rho h + 2\rho^s) \dot{u}_3^2 R^2 dx_1 dx_2 \quad (۲۳)$$

که علامت. نشان‌دهنده مشتق زمانی،  $\rho$  چگالی حجمی و  $\rho^s$  چگالی سطح‌های بالا و پایین است.

کار انجام‌شده توسط نیروی توزیع‌شده خارجی  $q(x_1, x_2, t)$  عبارت است از:

$$\Pi = \iint_{\Omega} q u_3 R^2 dx_1 dx_2 \quad (۲۴)$$

معادلات اساسی را می‌توان از اصل هامیلتون به دست آورد: [۱۶]

$$\delta \int_0^t (T + \Pi - U) dt = 0 \quad (۲۵)$$

که در آن،  $\delta$  اپراتور تغییرات است.

با جایگذاری معادلات (۲۱) و (۲۳) و (۲۴) در معادله (۲۵)، معادله حرکت می‌تواند به صورت زیر استخراج گردد:

$$(M_{11,11} + M_{22,22} + 2M_{12,12}) - \frac{2\tau^s}{R^2} (u_{3,11} + u_{3,22}) - q + \rho^* h \ddot{u}_3 = 0 \quad (۲۶)$$

و با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۶)، معادله حرکت برحسب جابجایی  $u_3$  نوشته می‌شود:

$$\frac{D^*}{R^4} (u_{3,1111} + u_{3,2222} + 2u_{3,1212}) - \frac{2\tau^s}{R^2} (u_{3,11} + u_{3,22}) - q = -\rho^* h \ddot{u}_3 \quad (۲۷)$$

که در آن:

$$D^* = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{(2\mu^s + \lambda^s)}{4} h^2 \quad (۲۸)$$

$$\rho^* h = \rho h + 2\rho^s$$

نیروی واندروالسی دافع، نانو ورق را به سمت پایین رانده و نانو ورق در مدت زمانی خاص شروع به ارتعاش می‌کند. در ضربه یک نانوذره کربنی روی نانو ورق سیلیکونی، انحراف بیشینه نانو ورق به دلیل وجود اثرات سطحی نسبت به حالتی که اثرات سطحی در نظر گرفته نمی‌شود، کاهش می‌یابد.

جدول (۱): پارامترهای نیروی واندروالسی، نانو ورق سیلیکونی و نانوذره کربنی [۱۱].

نانو ورق سیلیکونی	
$E = ۲۱۰ \text{ GPa}$	مدول یانگ
$\nu = ۰.۲۴$	ضریب پواسون
$\rho = ۲۳۳۱ \text{ kg/m}^3$	چگالی حجمی
$\tau^s = ۰.۶۰۵ \text{ N/m}$	تنش پسماند سطحی
$\lambda^s = -۴/۸۸۴ \text{ N/m}$	ثوابت لامه سطح
$\mu^s = -۲/۷۷۴ \text{ N/m}$	
$\rho^s = ۳/۱۷ \times ۱۰^{-۷} \text{ kg/m}^2$	چگالی سطح‌های بالا و پایین
$N = ۵۰ \text{ nm}^{-3}$	چگالی تعداد اتم در واحد حجم نانو ورق
$R = ۲۰۰ \text{ nm}$	شعاع انحنا
$\theta = ۳۰^\circ$	زاویه انحنا
$h = ۳ \text{ nm}$	ضخامت
نانوذره کربنی	
$R_0 = ۰.۵ \text{ nm}$	شعاع
$\rho_0 = ۲۷۵۰ \text{ kg/m}^3$	چگالی
$v_0 = ۲۰۰ \text{ m/s}$	سرعت اولیه
$H_0 = ۶ \text{ nm}$	ارتفاع اولیه پرتاب
$N_0 = ۱۳۷ \text{ nm}^{-3}$	چگالی تعداد اتم در واحد حجم نانوذره
پارامترهای نیروی واندروالسی	
$A = ۱/۳۰۴ \times ۱۰^{-۷۷} \text{ Jm}^6$ $B = ۲/۹ \times ۱۰^{-۱۳۴} \text{ Jm}^{12}$	ثابت‌های ماده
$\zeta = ۰.۴۲۰۴ \text{ nm}$	قطر محدوده واندروالسی برای یک جفت اتم سیلیکون و اتم کربن

$$W_{mn}(0) = 0, \quad \dot{W}_{mn}(0) = 0, \quad (۳۶)$$

$$H(0) = H_0, \quad \dot{H}(0) = -v_0$$

به دلیل پیچیدگی برای حل این معادلات دیفرانسیل، از روش عددی رانج- کاتای مرتبه چهارم استفاده شده است.

## ۲-۵- مؤلفه‌های تنش

با استفاده از روابط (۱۷) و (۳۰) مؤلفه‌های تنش محوری و برشی در نانو ورق به شکل زیر است:

$$\sigma_{11} = \frac{Ez}{R^2(1-\vartheta^2)} \sum \sum \left( \left( \frac{m\pi}{\theta} \right)^2 + \vartheta \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^2 \right) W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi\theta_1}{\theta} \sin \frac{n\pi\theta_2}{\theta} \quad (۳۷)$$

$$\sigma_{22} = \frac{Ez}{R^2(1-\vartheta^2)} \sum \sum \left( \left( \frac{m\pi}{\theta} \right)^2 + \vartheta \left( \frac{n\pi}{\theta} \right)^2 \right) W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi\theta_1}{\theta} \sin \frac{n\pi\theta_2}{\theta}$$

$$\sigma_{12} = \frac{-Ez}{R^2(1+\vartheta)} \sum \sum \left( \frac{m\pi}{\theta} \right) \left( \frac{n\pi}{\theta} \right) W_{mn}(t) \cos \frac{m\pi\theta_1}{\theta} \cos \frac{n\pi\theta_2}{\theta}$$

## ۳- نتایج و بحث

هدف اصلی مدل تحلیلی ارائه شده، بررسی پاسخ دینامیکی نانو ورق انحنا دار تحت ضربه سرعت پایین یک نانوذره است. برای بررسی صحت نتایج مدل تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از مدل با مدل تحلیلی مرجع [۱۱] مقایسه شده است. پارامترهای مربوط به نیروی واندروالسی، نانو ورق سیلیکونی و نانوذره کربنی در جدول ۱ داده شده است.

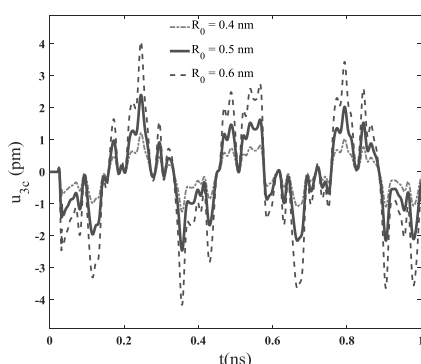
فاصله cut-off نیروی واندروالسی عموماً دو و نیم برابر قطر واندروالسی ( $\zeta$ ) و یا بیشتر در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مقدار داده شده  $\zeta$ ،  $r_{cut}$  باید حداقل برابر با  $nm$  با  $۰.۸۴۰۸$  باشد که در اینجا  $r_{cut}$  برابر با  $۲ \text{ nm}$  در نظر گرفته می‌شود [۱۱].

تاریخچه تغییر مکان نقطه میانی نانو ورق در دو حالت، با در نظر گرفتن اثرات سطحی و بدون در نظر گرفتن آن، در شکل ۴ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در ابتدا نانو ورق به دلیل وجود نیروی واندروالسی جاذب، اندکی به سمت بالا کشیده شده و سپس با کاهش فاصله بین نانو ورق و نانوذره، نیروی واندروالسی جاذب به دافع تبدیل می‌شود.



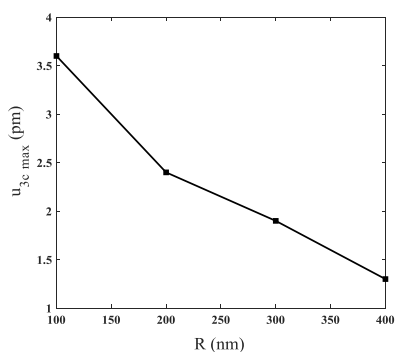
در ادامه با توجه به مطابقت مناسب نتایج مدل تحلیلی با مدل مرجع [۱۱]، اثر سایر پارامترها بر پاسخ دینامیکی نانو ورق و نیروی تعاملی و اندروالسی بررسی می‌شود.

شکل ۶ تأثیر تغییر شعاع نانوذره بر پاسخ دینامیکی نانو ورق، برای سه ذره با شعاع‌های  $0.4$ ،  $0.5$ ، و  $0.6$  nm و سرعت برخورد  $200$  m/s را نشان می‌دهد. با توجه به این که نانوذره با شعاع بزرگ‌تر جرم بیشتری دارد، در نتیجه انرژی جنبشی بیشتری خواهد داشت و نیروی بیشتری به نانو ورق وارد می‌کند. بنابراین، با افزایش جرم نانوذره، حداکثر خیز نانو ورق افزایش می‌یابد.



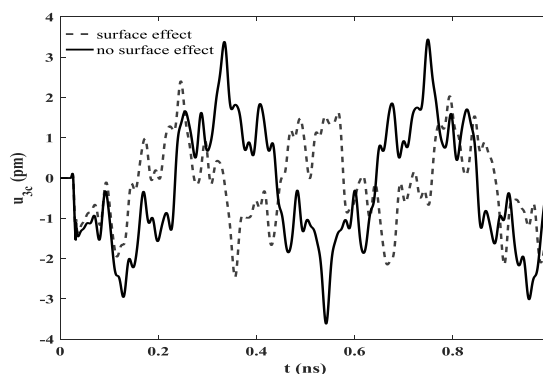
شکل (۶): تاریخچه زمانی انحراف نانو ورق برای سه نانوذره با شعاع‌های مختلف  $0.4$ ،  $0.5$ ، و  $0.6$  nm در سرعت ضربه  $200$  m/s.

شکل ۷ نمودار خیز نانو ورق برحسب شعاع انحناء را نشان می‌دهد. در یک نانو ورق با زاویه انحناء مشخص، با افزایش شعاع خمیدگی، مقدار بیشینه خیز نانو ورق کم می‌شود. می‌توان گفت با افزایش طول نانو ورق، نیروی اعمالی به آن باید نانو ورق بزرگ‌تری را به ارتعاش درآورد، بنابراین بیشینه خیز کاهش می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۷ مشخص است، تغییرات بیشینه خیز نانو ورق در شعاع انحناءهای کمتر شیب بیشتری دارد زیرا تأثیر نیروی و اندروالسی در سازه‌هایی با ابعاد کوچک‌تر بیشتر است.



شکل (۷): بیشینه تغییر شکل نانو ورق انحنادار با زاویه انحنای ثابت  $30^\circ$  و شعاع انحناءهای مختلف.

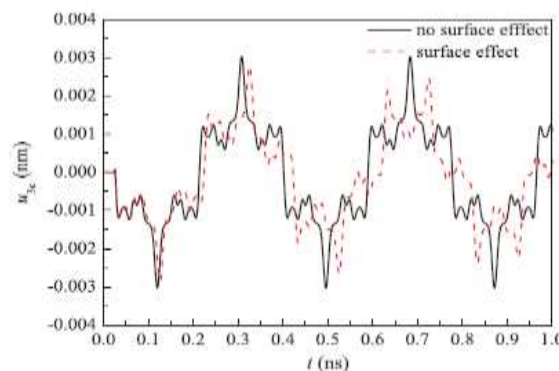
برای اعتبارسنجی مدل تحلیلی ارائه‌شده، شعاع و زاویه انحنای نانو ورق انحنادار طوری انتخاب‌شده که طول آن با طول نانو ورق مسطح چهارگوشی که در مرجع [۱۱] بررسی شده است، یکسان باشد. جنس نانوذره و نانو ورق، شعاع نانوذره و سرعت اولیه آن نیز یکسان در نظر گرفته‌شده و نمودار تاریخچه زمانی انحراف نانو ورق‌ها باهم مقایسه شده است.



شکل (۴): تاریخچه زمانی انحراف مرکز نانو ورق با و بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی. ( $v_0 = 200$  m/s و  $R_0 = 0.5$  nm)

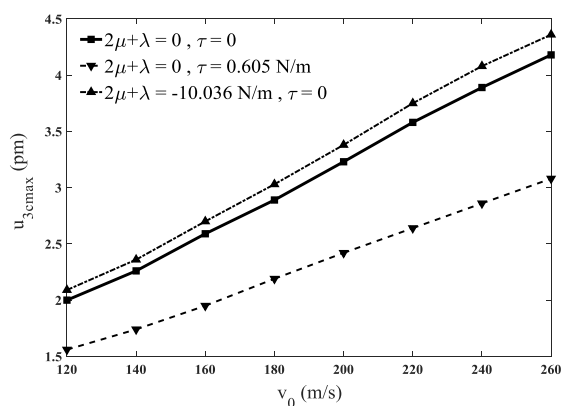
شکل ۵ نمودار تاریخچه زمانی انحراف نانو ورق مرجع [۱۱] را نشان می‌دهد. با مقایسه شکل‌های ۴ و ۵، مشاهده می‌شود که:

۱. بیشینه خیز محاسبه‌شده بدون در نظر گرفتن اثر سطحی، در مدل تحلیلی مقاله برابر  $3/3$  pm و در مدل تحلیلی مرجع [۱۱] حدود  $3/1$  pm است.
۲. بیشینه خیز محاسبه‌شده با در نظر گرفتن اثر سطحی، در این مدل تحلیلی برابر  $2/4$  pm و در مدل تحلیلی مرجع [۱۱] حدود  $2/6$  pm می‌باشد.
۳. دوره تناوب جابجایی در این مدل تحلیلی برابر  $0.43$  nm و در مدل تحلیلی مرجع [۱۱] حدود  $0.4$  nm است.



شکل (۵): تاریخچه زمانی انحراف مرکز نانو ورق مسطح چهارگوش با و بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی از مرجع [۱۱]. ( $v_0 = 200$  m/s و  $R_0 = 0.5$  nm)

سطحی در مواد جامد می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. طبق معادله (۲۸) ثوابت الاستیک سطحی منفی باعث کاهش سفتی خمشی مؤثر ( $D^*$ ) شده و نانو ورق مانند ماده با سفتی بالا رفتار می‌کند و ثوابت الاستیک سطحی مثبت باعث افزایش سفتی خمشی مؤثر می‌شود و نانو ورق مانند ماده نرم رفتار خواهد کرد. شکل ۱۰ اثر ثوابت الاستیک و تنش پسماند سطحی بر بیشینه انحراف نانو ورق اتحنادار را نشان می‌دهد. برای این منظور یک‌بار هر دو تنش پسماند سطحی و ثوابت الاستیک سطحی صفر در نظر گرفته شده و در سرعت اولیه‌های مختلف، بیشینه خیز نانو ورق محاسبه شده است. بار دیگر فقط تنش سطحی پسماند صفر در نظر گرفته شده و در نهایت فقط ثوابت الاستیک سطحی صفر در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود هنگامی که ثوابت الاستیک سطحی صفر و تنش پسماند سطحی مخالف صفر است، بیشینه انحراف نانو ورق کاهش می‌یابد و با افزایش سرعت ضربه این کاهش شدیدتر است. در حالتی که ثوابت الاستیک سطحی مخالف صفر و تنش پسماند سطحی صفر است، عکس حالت قبل برقرار است یعنی بیشینه انحراف نانو ورق افزایش می‌یابد. همچنین اثر تنش پسماند سطحی در تغییر بیشینه انحراف نانو ورق بیشتر از اثر ثوابت الاستیک سطحی است، بنابراین، در حالتی که هر دو اثر باهم در نظر گرفته شوند، بیشینه انحراف نانو ورق نسبت به حالتی که اثر سطحی وجود ندارد، کمتر است. این موضوع در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

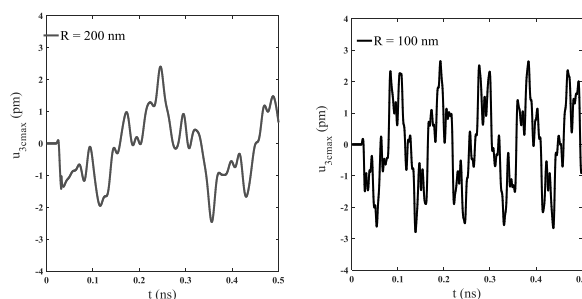


شکل (۱۰): نمودار انحراف بیشینه نانو ورق بر حسب سرعت اولیه نانوذره و بررسی تأثیر ثوابت الاستیک سطحی و تنش پسماند.

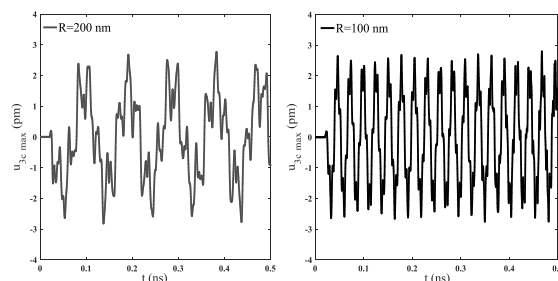
شکل ۱۲ بیشینه انحراف نانو ورق را به صورت تابعی از ضخامت و در دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثرات سطحی نشان می‌دهد.

شکل ۸ تاریخچه زمانی خیز مرکز نانو ورق  $30^\circ$  را در شعاع انحنای  $100\text{ nm}$  و  $200\text{ nm}$  و شکل ۹ تاریخچه زمانی خیز مرکز نانو ورق  $15^\circ$  با همان شعاع انحنای را نشان می‌دهد. با مقایسه این دو شکل مشاهده می‌گردد در یک شعاع انحنای ثابت، هنگامی که زاویه نانو ورق نصف می‌شود و از  $30^\circ$  به  $15^\circ$  کاهش می‌یابد، مقدار بیشینه خیز نانو ورق و تعداد نوسانات آن افزایش یافته و در نانو ورق با ابعاد کوچک‌تر (زاویه انحنای  $15^\circ$  و شعاع انحنای  $100\text{ nm}$ ) این افزایش شدیدتر است. هراندازه نانو ورق ابعاد کوچک‌تری داشته باشد، تعداد نوسان و میزان تغییر شکل آن بیشتر می‌شود.

اگر شعاع نانو ورق  $n$  برابر و زاویه آن  $1/n$  برابر شود، طول نانو ورق تغییر نمی‌کند (طول نانو ورق برابر حاصل ضرب شعاع انحنای در زاویه انحنای است). همان‌طور که در شکل‌های ۸ و ۹ مشخص است، هنگامی که تغییرات مقدار شعاع و زاویه انحنای به‌گونه‌ای است که طول نانو ورق تغییر نکند، مقدار خیز بیشینه و فرکانس ارتعاش نانو ورق تغییر چندانی نخواهد داشت.



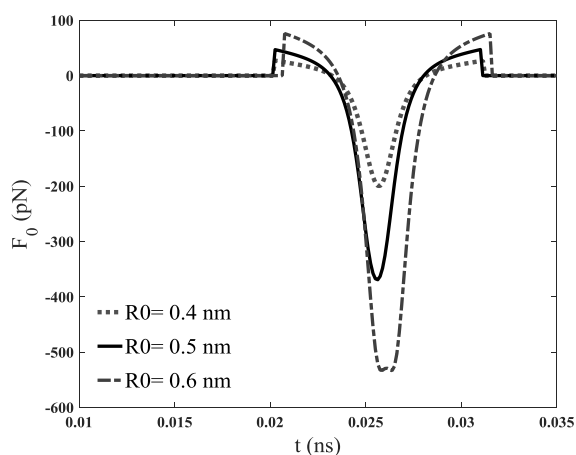
شکل (۸): بیشینه تغییر شکل نانو ورق اتحنادار با زاویه انحنای ثابت  $30^\circ$  و شعاع انحنای مختلف.



شکل (۹): بیشینه تغییر شکل نانو ورق اتحنادار با زاویه انحنای ثابت  $15^\circ$  و شعاع انحنای مختلف.

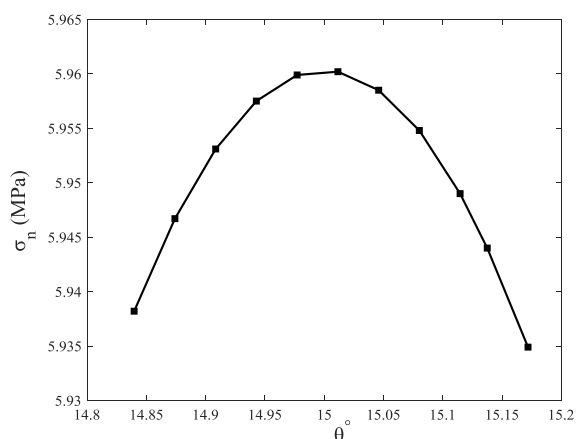
اثر سطحی از هر دو الاستیسیته سطحی و تنش پسماند سطحی ناشی می‌شود. ثوابت الاستیک سطحی و تنش پسماند

نانوذره و بیشتر شدن انرژی جنبشی آن می‌باشد.



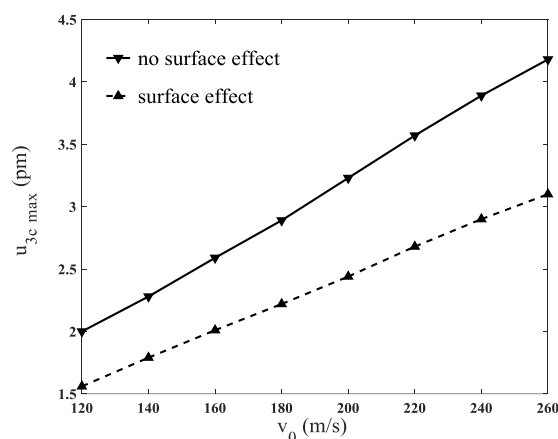
شکل (۱۳): تغییرات نیروی تعاملی برای سه نانوذره با شعاع‌های  $nm$  ۰/۴، ۰/۵ و ۰/۶ و سرعت اولیه ثابت  $200 m/s$ .

شکل ۱۴ تغییرات مؤلفه تنش محوری و شکل ۱۵ تغییرات مؤلفه تنش برشی برحسب تغییرات زاویه قطبی ( $\theta$ ) نانو ورق و در مجاورت محل اعمال بار ضربه‌ای را نشان می‌دهد. با نزدیک شدن به وسط نانو ورق، مؤلفه تنش محوری به تدریج افزایش یافته و در مرکز نانو ورق به بیشترین مقدار خود می‌رسد. برعکس، مؤلفه تنش برشی با نزدیک شدن به وسط نانو ورق کاهش می‌یابد و در مرکز آن صفر است.



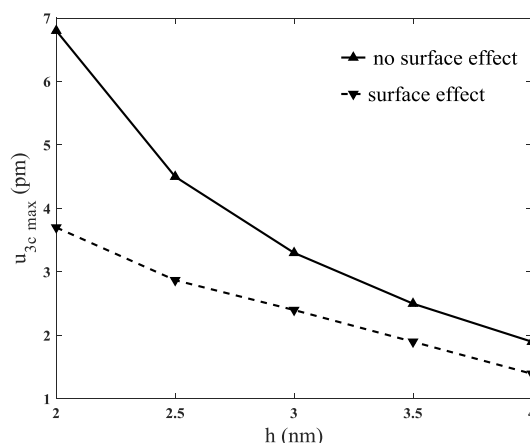
شکل (۱۴): دار تغییرات مؤلفه تنش محوری حداکثر برحسب زاویه قطبی ( $\theta$ ) نانو ورق و در محدوده محل اعمال بار ضربه‌ای.

شکل ۱۶ نمودار بیشینه مؤلفه تنش محوری برحسب فاصله از محور خنثی را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود رابطه‌ای خطی بین تغییر ارتفاع و بیشینه مؤلفه تنش محوری وجود دارد.



شکل (۱۱): بیشینه انحراف نانو ورق برحسب سرعت اولیه نانوذره در دو حالت با در نظر گرفتن اثرات سطحی و بدون آن.

از مقایسه دو نمودار، مشاهده می‌گردد که هرچقدر ضخامت نانو ورق افزایش یابد، بیشینه انحراف آن در دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر سطحی، اختلاف کمتری با یکدیگر پیدا خواهند کرد و میزان انحراف نانو ورق با افزایش ضخامت آن به سمت یکدیگر همگرا می‌شود. لذا با افزایش ضخامت نانو ورق، در نظر گرفتن اثرات سطحی تأثیر فراوانی در نتایج ندارد. بنابراین، می‌توان گفت اثرات سطحی نقش مهمی در پاسخ دینامیکی سازه‌هایی با ابعاد کوچک‌تر دارد.



شکل (۱۲): نمودار بیشینه انحراف نانو ورق برحسب ضخامت آن برای سه نانوذره با شعاع‌های  $nm$  ۰/۴، ۰/۵ و ۰/۶

تغییرات نیروی تعاملی و اندروالسی بین نانوذره و نانو ورق در شکل ۱۳ نشان داده شده است. سرعت اولیه نانوذره ثابت و برابر  $200 m/s$  می‌باشد. همان‌طور که در شکل مشخص است با افزایش شعاع نانوذره، مقدار حداکثر نیروی تعاملی و اندروالسی بیشتر می‌شود که این امر به دلیل افزایش جرم

ورق، نیروی تعاملی و اندروالسی بین نانوذره و نانو ورق و مؤلفه‌های تنش محاسبه شده است. دستاوردهای علمی و کاربردی مقاله به شرح زیر است:

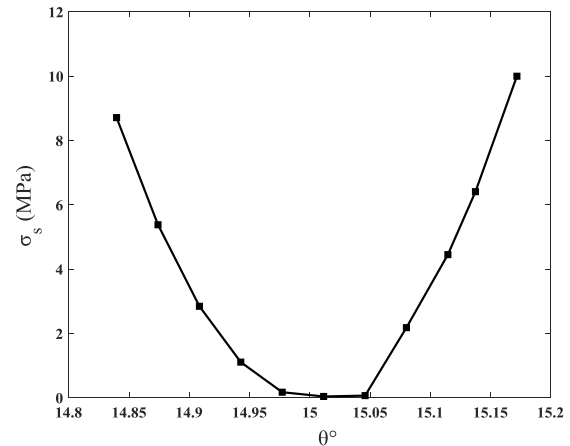
- هرچه مقدار شعاع نانوذره افزایش یابد، به دلیل افزایش جرم نانوذره و در نتیجه انرژی جنبشی آن، مقدار نیروی تعاملی و اندروالسی افزایش می‌یابد و در نتیجه با افزایش نیروی تعاملی، بیشینه انحراف نانو ورق نیز افزایش خواهد یافت.

- اثرات سطحی شامل ثابت‌های الاستیک و تنش پسماند سطحی نقش مهمی در میزان تغییر شکل نانو ورق دارد. برای نانو ورق سیلیکونی، ثابت‌های الاستیک منفی و تنش پسماند سطحی مثبت است. ثابت‌های الاستیک منفی باعث کاهش سفتی خمشی مؤثر شده و بیشینه تغییر شکل نانو ورق را بیشتر می‌کند. در مقابل تنش پسماند سطحی مثبت باعث کاهش بیشینه تغییر شکل ورق می‌شود. زیرا تنش پسماند سطحی اثر مهم‌تری در تغییر شکل نانو ورق دارد، به‌طور کلی وجود اثرات سطحی در این مدل باعث کاهش مقدار بیشینه تغییر شکل نانو ورق نسبت به حالتی می‌شود که اثرات سطحی در نظر گرفته نمی‌شود.

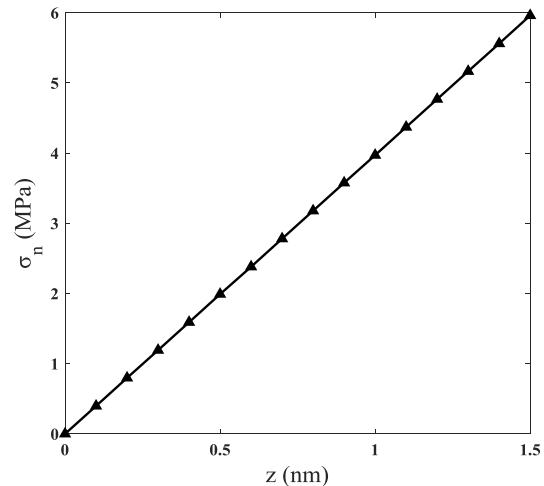
- در یک زاویه انحناء ثابت نانو ورق، با کاهش شعاع انحناء، مقدار و تعداد پیک تغییر شکل آن افزایش می‌یابد. بنابراین، بیشینه تغییر شکل نانو ورق در یک زاویه انحنای ثابت با اندازه شعاع آن نسبت عکس دارد و همان‌طور که نشان داده شد، در شعاع انحناء-نای کمتر، شیب این نمودار بیشتر و با افزایش شعاع انحناء، شیب تغییرات بیشینه تغییر شکل کمتر می‌شود.

- هرچه میزان ضخامت نانو ورق افزایش یابد، نقش اثرات سطحی در تغییر شکل نانو ورق کمتر خواهد شد و برای ورق‌های ضخیم‌تر می‌توان از اثرات سطحی صرف‌نظر نمود. لذا اثرات سطحی در پاسخ دینامیکی نانو ورق‌هایی با ضخامت کمتر، تأثیر زیادی بر پاسخ دینامیکی نانو ورق دارد.

- در محدوده محل توزیع نیرو روی نانو ورق در مرکز آن، مؤلفه تنش محوری حداکثر است و مؤلفه تنش برشی به صفر می‌رسد.



شکل (۱۵): نمودار تغییرات مؤلفه تنش برشی حداکثر برحسب زاویه قطبی (θ) نانو ورق و در محدوده محل اعمال بار ضربه‌ای.



شکل (۱۶): تغییرات بیشینه تنش محوری برحسب فاصله از محور خنثی نانو ورق.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل تحلیلی ارائه گردیده است که بار ضربه‌ای سرعت‌پایین یک نانوذره کربنی روی یک نانو ورق انحنادار سیلیکونی را مدل‌سازی می‌کند. در این مدل‌سازی، نیرویی که نانو ورق را به حرکت درمی‌آورد، نیروی تعاملی و اندروالسی بین نانوذره و نانو ورق است. هر دو اثر الاستیک سطحی و تنش پسماند سطحی در معادلات حاکم بر ورق گنجانده شده است. این معادلات از اصل هامیلتون به‌دست‌آمده و تئوری ورق مورد استفاده، تئوری کیرشلف-لاو است که برای ورق‌های نازک کاربرد دارد. معادلات دیفرانسیل خیز نانو ورق به روش عددی رانج-کاتای مرتبه چهارم در نرم‌افزار متلب حل شده و مقادیر بیشینه خیز نانو

## ۵- مراجع

9. Malekzadeh Fard, K., and Gholami, M. "Dynamic Response of the Curved Composite Shells Subjected to Low-Velocity Multi Mass Impacts", *J. Aerospace Mech.*, Vol. 10, No. 3, pp. 73-88, 2014 (in persian).
10. Sun, W. F., Zeng, Q. H., Yu, A. B., and Kendall, K. "Calculation of Normal Contact Forces between Silica Nanospheres", *Langmuir*, Vol. 29, No. 7, pp. 825-37, 2013.
11. Liu, H., Liu, J., Yang, J. L., and Feng, X. Q. "Low velocity impact of a nanoparticle on a rectangular nanoplate: A theoretical study", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 123, pp. 253-259, 2017.
12. Feng, X. Q., Li, H., Zhao, H. P., and Yu, S. W. "Numerical simulations of the normal impact of adhesive microparticles with a rigid substrate", *Powder Technol.*, Vol. 189, pp. 34-41, 2009.
13. Yang, M. J., Qiao, P. Z. "Nonlinear impact analysis of fully backed composite sandwich structures", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 65, No. 3-4, pp. 551-562, 2005.
14. Zhao, D. M., Liu, J. L., Wang, L. "Nonlinear free vibration of a cantilever nanobeam with surface effects: semi-analytical solutions", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 113, pp. 184-195, 2016.
15. Gurtin, M. E., and Murdoch, A. I. "A continuum theory of elastic material surfaces", *Arch Ratio Mech Anal*, Vol. 57, pp. 291-323, 1975.
16. Reddy, J. N. "Energy principles and variational methods in applied mechanics", second ed, John Wiley & Sons, New Jersey, 2002.
1. Karlicic, D., Kozic, P., Adhikari, S., Cajic, M., Murmu, T., and Lazarevic, M. "Nonlocal massnanosensor model based on the damped vibration of single-layer graphene sheet influenced by in-plane magnetic field", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 96-97, pp. 132-42, 2015.
2. Wilber, J. P., Clemons, C. B., Young, G. W., Buldum, A., and Quinn, DD. "Continuum and atomistic modeling of interacting graphene layers", *Phys. Rev. B*, Vol. 75, 045418, 2007.
3. Sun, W. F. "The dynamic effect on mechanical contacts between nanoparticles", *Nanoscale*, Vol. 5, No. 12, pp. 658-669, 2013.
4. Sun, W. F. "Interaction forces between a spherical nanoparticle and a flat surface", *Phys Chem Chem Phys*, Vol. 16, No. 5, pp. 846-854, 2014.
5. Assadi, A. "Size dependent forced vibration of nanoplates with consideration of surface effects", *Appl. Math. Model.*, Vol. 37, No. 3, pp. 575-588, 2013.
6. Huang, D. W., "Size-dependent response of ultra-thin films with surface effects", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 45, pp. 568-579, 2008.
7. Li, H.B., Wang, X. "Effect of small scale on the dynamic characteristic of carbon nanotubes under axially oscillating loading", *Physica*, Vol. 46, pp. 198-205, 2012.
8. Wang, C M., Zhang, Y Y., and He, X Q. "Vibration of nonlocal Timoshenko beams", *Nanotechnology*, Vol. 18, 105401, 2007.

## پیوست

در بخش ۲ پارامترهای رابطه (۱۲) به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$X_{-3} = \left[ -\frac{(H+h)^2 - 4(H+h)R_0 - 5R_0^2}{60R_0^3(H+h+R_0)^{-4}} + \frac{(H+h)^2 + 4(H+h)R_0 - 5R_0^2}{60R_0^3(H+h-R_0)^{-4}} \right] + \left[ \frac{H^2 - 4HR_0 - 5R_0^2}{60R_0^3(H+R_0)^{-4}} - \frac{H^2 + 4HR_0 - 5R_0^2}{60R_0^3(H-R_0)^{-4}} \right]$$

$$X_{-2} = \left[ -\frac{(H+h)^2 - 3(H+h)R_0 - 4R_0^2}{30R_0^3(H+h+R_0)^{-3}} + \frac{(H+h)^2 + 3(H+h)R_0 - 4R_0^2}{30R_0^3(H+h-R_0)^{-3}} \right] + \left[ \frac{H^2 - 3HR_0 - 4R_0^2}{30R_0^3(H+R_0)^{-3}} - \frac{H^2 + 3HR_0 - 4R_0^2}{30R_0^3(H-R_0)^{-3}} \right]$$

$$X_{-1} = \frac{4}{3}h$$

$$X_4 = \left[ \frac{(H+h)^2 + 3(H+h)R_0 + 2R_0^2}{3R_0^3(H+h+R_0)^3} - \frac{(H+h)^2 - 3(H+h)R_0 + 2R_0^2}{3R_0^3(H+h-R_0)^3} \right] - \left[ \frac{H^2 + 3HR_0 + 2R_0^2}{3R_0^3(H+R_0)^3} - \frac{H^2 - 3HR_0 + 2R_0^2}{3R_0^3(H-R_0)^3} \right]$$

$$X_5 = \left[ \frac{(H+h)^2 + 4(H+h)R_0 + 3R_0^2}{12R_0^3(H+h+R_0)^4} - \frac{(H+h)^2 - 4(H+h)R_0 + 3R_0^2}{12R_0^3(H+h-R_0)^4} \right] - \left[ \frac{H^2 + 4HR_0 + 3R_0^2}{12R_0^3(H+R_0)^4} - \frac{H^2 - 4HR_0 + 3R_0^2}{12R_0^3(H-R_0)^4} \right]$$

$$X_{10} = \left[ \frac{(H+h)^2 + 9(H+h)R_0 + 8R_0^2}{252R_0^3(H+h+R_0)^9} - \frac{(H+h)^2 - 9(H+h)R_0 + 8R_0^2}{252R_0^3(H+h-R_0)^9} \right] - \left[ \frac{H^2 + 9HR_0 + 8R_0^2}{252R_0^3(H+R_0)^9} - \frac{H^2 - 9HR_0 + 8R_0^2}{252R_0^3(H-R_0)^9} \right]$$

$$X_{11} = \left[ \frac{(H+h)^2 + 10(H+h)R_0 + 9R_0^2}{360R_0^3(H+h+R_0)^{10}} - \frac{(H+h)^2 - 10(H+h)R_0 + 9R_0^2}{360R_0^3(H+h-R_0)^{10}} \right] - \left[ \frac{H^2 + 10HR_0 + 9R_0^2}{360R_0^3(H+R_0)^{10}} - \frac{H^2 - 10HR_0 + 9R_0^2}{360R_0^3(H-R_0)^{10}} \right]$$



