

علمی- پژوهشی

کنترل آرایش متغیر با زمان سیستم‌های چندعاملی پرنده بدون سرنشین با ورودی رهبر نامعلوم

محمد حائری^۳دانشکده مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریفنوشین بیگدلی^{۲*}دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)مجتبی زائری امیرانی^۱

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۰۷)

چکیده

کنترل آرایش متغیر با زمان سیستم چندعاملی برای اجسام پرنده بدون سرنشین در ساختار رهبر- پیرو در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته است. فرض بر این است که تعداد عوامل در حین حرکت تغییر می‌کند. با تغییر تعداد عوامل، آرایش مطلوب نیز، به صورت چندضلعی‌های منتظم با اضلاع ثابت به‌گونه‌ای تغییر می‌یابد که فاصله نسبی پیروهای همسایه از یکدیگر ثابت نگه داشته شود. یک کنترل‌کننده دو حلقه‌ای ارائه شده است که در آن، حلقه داخلی با استفاده از قانون کنترل خطی‌ساز بازخورد، دینامیک عوامل را خطی می‌کند. حلقه بیرونی نیز، یک کنترل‌کننده بازخورد حالت انتگرالی است که از بردار موقعیت نسبی و سرعت نسبی همسایگان برای حفظ آرایش در اجماع بهره می‌برد. پیروها از مسیر رهبر اطلاعی ندارند و فقط با حفظ فاصله نسبی نسبت به همسایگان خود آرایش را حفظ و رهبر را دنبال می‌کنند. ضرایب کنترلی به صورت غیر برخط و با حل معادله جبری ریکاتی و بر اساس قضیه گراف تعیین می‌شود و لذا نیازی به تنظیم برخط ضرایب نیست. پایداری سیستم حلقه بسته تحت قانون کنترل پیشنهادی از طریق قضیه پایداری لیاپانوف بررسی شده و شبیه‌سازی‌های مختلفی برای نشان دادن توانایی کنترل‌کننده پیشنهادی انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم چندعاملی، آرایش متغیر با زمان، اجماع، رهبر- پیرو، ماتریس لاپلاسیان

Time Varying Formation Control of Unmanned Aerial Vehicle Multi-Agent Systems with Unknown Leader Input

M. Zaeri Amirani¹Faculty of Technical & Engineering
Imam Khomeini International UniversityN. Bigdeli^{2*}Department of Electrical Engineering
Sharif University of TechnologyM. Haeri³

(Received: 21/May/2020; Accepted: 28/ August/2020)

ABSTRACT

Time-varying motion consensus and formation control of leader-follower unmanned aerial vehicle multi-agent system (UAV-MAS) is studied, in this paper. It is assumed that the number of agents changes during the motion. According to the variations in number of agents, the desired formation would also change in the form of various regular polygons in such a way that, whose sides, which are the relative distances of the neighboring followers from each other, are kept constant. A two-loop controller is provided, in which, the internal loop uses the feedback linearization control law to linearize the dynamics of the agents. In the outer loop, an integral state feedback controller is employed as a new consensus formation controller based on the relative position and velocity vectors of neighboring agents. The followers do not know the path of the leader and only maintain the formation and track the leader by maintaining their relative distance with their neighbors. Controller coefficients are determined offline by solving the algebraic Riccati equation and based on the graph theory. Therefore, no online tuning is needed. Closed loop stability of system under the proposed control law would be investigated via the Lyapunov stability theorem and various simulations are performed to illustrate the capability of the proposed controller.

Keywords Multi-agent system, Time-varying formation, Consensus, Leader-follower, Laplacian matrix

۱- دانشجوی دکتری: zaeri_mojtaba@yahoo.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): n.bigdeli@eng.ikiu.ac.ir

۳- استاد: haeri@sharif.ir

۱- مقدمه

دنبال کنند و هم باید آرایش را حفظ کنند [۲۱]. اما، در اکثر پژوهش‌های ردیابی آرایش، پیروها از مسیر رهبر اطلاع دارند [۲۴-۲۲]. در [۲۲]، عامل‌هایی با دینامیک مرتبه دو و غیرخطی در نظر گرفته شده که برای شناسایی این دینامیک‌ها، از روش یادگیری تکراری تطبیقی به کمک شبکه عصبی استفاده شده است. در این مقاله، تعداد و ارتباط عوامل ثابت فرض شده و تحت این، شرایط ردیابی رهبر و حفظ آرایش به خوبی انجام شده است. کنترل ردیابی آرایش در ساختار رهبر-پیرو برای دسته‌ای از ماهواره‌ها در [۲۳] صورت گرفته است. در این مقاله نیز، تعداد و ارتباط عوامل ثابت و مسیر از پیش دانسته فرض شده است. هدف در این مقاله، حفظ آرایش و اجماع در سرعت سیستم چند عاملی ماهواره جهت پوشش منطقه‌ای و جلوگیری از برخورد آنها با یکدیگر می‌باشد. در مرجع [۲۴]، نیز حفظ آرایش و ردیابی مجموعه‌ای از کوادراتورها در حضور اغتشاش خارجی و شرایط مشابه یعنی ثابت بودن تعداد و ارتباط عوامل اطلاع از مسیر مرجع مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور از یک رویکرد تطبیقی توزیع‌شده برای تخمین حالت‌های رهبر استفاده شده است.

آرایش می‌تواند در حین انجام مأموریت تغییر کند که در این صورت مبحث کنترل آرایش متغیر با زمان^{۱۱} مطرح می‌گردد [۲۵]. در مرجع [۲۵]، دینامیک و مرتبه عامل‌ها متفاوت فرض شده و اثر مجموع عامل‌های همسایه از طریق یک رویکرد توزیع‌شده به‌دست آورده شده است. آرایش متغیر با زمان در این مقاله، ناشی از کلیدزنی در مجموعه محدودی از توپولوژی‌های جهت‌دار است که از پیش دانسته فرض شده و تعداد عوامل ثابت است. لذا، رفتار سیستم در حالت تغییر تعداد عامل‌ها بررسی نشده است. پایداری کنترل آرایش متغیر با زمان نیز در [۲۶-۲۷] مورد توجه قرار گرفته است.

آرایش می‌تواند تغییر کند، اما تعامل^{۱۲} بین عوامل ثابت باشد که در این صورت ماتریس لاپلاسین ثابت است. کنترل آرایش متغیر با زمان با تعاملات ثابت میان عوامل در [۲۸-۲۹] مورد بررسی قرار گرفته است که در آن‌ها، تنها

اخیراً پرنده‌های بدون سرنشین برای کاربردهای مختلفی از جمله نظارت، شناسایی و مدیریت رفت و آمد، تشخیص آتش‌سوزی و موارد دیگر به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱]. استفاده از چند پرنده بدون سرنشین در کنار هم برای انجام مأموریت به بهبود عملکرد نهایی منجر می‌گردد. دیدگاه سیستم چندعاملی^۱ این امکان را فراهم آورده که هر پرنده یک عامل^۲ در سیستم چندعاملی در نظر گرفته شود. کنترل آرایش^۳ یکی از زیرمجموعه‌های سیستم‌های چندعاملی است که در بسیاری از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفته است [۴-۲]. رسیدن به آرایش مشخص، هدف اصلی یک سیستم چندعاملی کنترل آرایش است [۵]. اما، در صورتی که حفظ آرایش با دنبال کردن مسیر همراه باشد، ردیابی آرایش^۴ مورد توجه قرار می‌گیرد [۶]. کنترل آرایش توزیع‌شده^۵ براساس تعامل محدود بین همسایگان انجام می‌شود و به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است [۷-۱۰] با این حال، متمرکز^۶ در برخی تحقیقات نیز مورد توجه قرار گرفته است [۱۱-۱۳]. اگرچه این رویکرد متمرکز نسبت به رویکرد توزیع‌شده ساده‌تر است. اما به دلیل هزینه‌های پیاده‌سازی بالا و محدودیت‌های ارتباطی چندان کاربردی نیست. در این مقاله نیز، رویکرد کنترل آرایش توزیع‌شده مورد توجه است. به‌طور کلی، راهبردهای کنترل آرایش شامل سه دسته اصلی است. ۱- رهبر-پیرو^۷ [۱۴]، ۲- ساختار مجازی مجازی^۸ [۱۵] ۳- مبتنی بر رفتار^۹ [۱۶]. مشخصات هر سه راهبرد در [۱۷] بررسی شده است. استفاده از اجماع^{۱۰} در کنترل آرایش در هر سه راهبرد بیان شده سبب توسعه کاربردهای آن شده است [۱۸-۲۱]. در این مقاله راهبرد رهبر-پیرو با استفاده از پروتکل اجماع مورد توجه قرار گرفته است. مسئله ردیابی آرایش برای ساختار رهبر-پیرو، با فرض ثابت بودن ارتباط میان عوامل، پیروها هم باید رهبر را

¹ Multi-agent² Agent³ Formation control⁴ Formation tracking⁵ Distributed⁶ Centralized⁷ Leader-follower⁸ Virtual structure⁹ Behavioral based¹⁰ Consensus protocols¹¹ Time varying¹² Interaction

[۳۳- ۳۱ و ۳۷] از پیش تعیین شده نیست و علاوه بر آن آرایش مطلوب نیز متغیر بازمان است. با تغییر تعداد عوامل، آرایش مطلوب، بصورت چندضلعی‌های منتظم با اضلاع مساوی به گونه‌ای تغییر می‌یابد که فاصله نسبی پروها از یکدیگر ثابت نگه داشته شود. یک کنترل کننده دو حلقه‌ای پیشنهاد شده است که در آن، حلقه داخلی با استفاده از قانون کنترل خطی ساز بازخورد، دینامیک عوامل را خطی می‌کند. حلقه بیرونی نیز، یک فید بک حالت انتگرالی است که با ایجاد اجماع در موقعیت و سرعت نسبی همسایگان، ردیابی آرایش را محقق می‌تواند. در این مقاله، پروها از مسیر رهبر اطلاعی ندارند و فقط با حفظ فاصله نسبی نسبت به همسایگان خود آرایش را حفظ و رهبر را دنبال می‌کنند. ضرایب کنترلی از پیش تعیین شده است که با حل معادله جبری ریکاتی و بر اساس قضیه گراف تعیین می‌شود و لذا نیازی به تنظیم برخظ ضرایب نیست. پایداری حلقه بسته سیستم تحت قانون کنترل پیشنهادی از طریق قضیه پایداری لیپانوف بررسی شده و شبیه‌سازی‌های مختلفی برای نشان دادن توانایی کنترل کننده پیشنهادی انجام شده است. آنچه این مقاله را از سایر پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه مورد این است که دو مسئله اساسی ذیل را با هم مورد مطالعه قرار داده است:

۱. تغییر تعداد پروها و در نتیجه تغییر ارتباطات پیرو به صورت از پیش تعیین نشده
۲. دنبال کردن رهبر بدون اطلاع از مسیر رهبر

بخش‌های مختلف مقاله به شرح زیر می‌باشد. معرفی و فرمول‌بندی مساله شامل تئوری گراف، شرح مساله، دینامیک مدل و قانون کنترل معکوس برای هر عامل در بخش ۲ توضیح داده شده است. راهبرد کنترل آرایش متغیر با زمان پیشنهادی در بخش ۳ آورده شده است. شبیه‌سازی عددی در بخش ۴ بررسی شده و در آخر نتیجه‌گیری در بخش ۵ آورده شده است.

۲- معرفی و فرمول‌بندی مساله

در این بخش ابتدا مقدمات مربوط به قضیه گراف مورد نیاز در این مقاله بیان شده است. در قسمت بعد شرح مساله بیان شده است.

آرایش مطلوب براساس سناریو تغییر می‌کند. بیشتر این تحقیقات بر روی سیستم‌های مرتبه اول و دوم تمرکز دارد [۱۷] و برخی دیگر مرتبه بالاتر و به نوعی عوامل غیرخطی را در نظر می‌گیرند [۳۰]. تغییر در تعامل میان عوامل به وسیله کلیدزنی^۱ با ثابت زمانی مشخص به صورت از پیش تعیین شده برای تعداد ثابتی از عوامل در [۲۵- ۳۳- ۳۱] مورد توجه قرار گرفته است که در این صورت، تغییرات آرایش در تمام سناریوهای حرکتی ثابت و محدود است و آرایش نمی‌تواند غیر از تغییرات از پیش تعیین شده آرایش دیگری داشته باشد.

از سوی دیگر، تغییر در آرایش بدون تغییر در تعاملات، می‌تواند در اثر یک رخداد^۲ صورت پذیرد. وجود مانع به عنوان یک رخداد سبب تغییر در آرایش می‌گردد [۳۴- ۳۶]. رخداد از پیش تعیین شده نیست و در طی حرکت بر اساس شرایط ایجاد می‌گردد. در این حالت، تعداد عوامل در حین رخدادها ثابت است و راهبرد موجود نمی‌تواند برای تغییرات تعداد عامل‌ها مفید باشد.

نوع دیگر آرایش متغیر با زمان، در اثر تغییر آرایش به علت تغییر تعداد عوامل رخ می‌دهد. در این حالت، ماتریس لاپلاسیان متغیر با زمان می‌باشد و قانون کنترلی یا به صورت محتاطانه و یا وابسته به رخداد طراحی می‌گردد. به عنوان مثال در مرجع [۱۰]، تغییر تعداد عوامل، سبب تغییر آرایش می‌گردد. قانون کنترلی به صورت وابسته به رخداد و برای حالتی طراحی شده که همه عوامل از مسیر حرکت اطلاع دارند و رهبر نیز از نوع رهبر مجازی است. در این مقاله، مساله ردیابی آرایش متغیر با زمان سیستم‌های چندعاملی پرنده بدون سرنشین با تغییر تعداد عوامل و ورودی رهبر نامعلوم مورد نظر قرار گرفته است. پروها باید هم رهبر در حال حرکت را دنبال کنند و هم شکل‌گیری متغیر با زمان را حفظ کنند. در این مقاله، در مقایسه با [۱۷، ۲۰ و ۲۷] رهبر دارای حرکت است و ورودی رهبر برای پروها ناشناخته است. تغییر تعداد عوامل به عنوان یک رخداد در این مقاله در نظر گرفته شده است که سبب تغییر آرایش می‌گردد. این تغییر برخلاف [۲۵]،

¹ Switching

² Event

۱-۲- تئوری گراف

هر سیستم چندعاملی با یک گراف تعامل توصیف می‌شود. این گراف به صورت $G=(V(G),W(G),\varepsilon(G))$ نمایش داده می‌شود. اگر تعداد گره‌های گراف برابر N باشد، $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ می‌باشد. هر v_i بیانگر یک گره است. یال‌های سیستم چندعاملی با $\varepsilon(G)$ نشان داده می‌شود. هر یال (v_i, v_j) ; $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ε_{ij} دو گره را به هم متصل می‌کند. در نهایت $W(G)$ وزن هر یال را مشخص می‌کند. اگر $\varepsilon_{ij} \in \varepsilon(G)$ موجود باشد $w_{ij} \neq 0$ ؛ در غیر این صورت $w_{ij} = 0$ می‌باشد. اگر $w_{ij} = w_{ji}$, $\forall i, j$ برقرار باشد. آن‌گاه گراف بدون جهت است در غیر این صورت گراف جهت‌دار است.

ماتریس وزنی $W(G)$ یک ماتریس $N \times N$ است که وزن میان هر گره با سایر گره‌ها را تعیین می‌کند. همسایگان گره (v_i) به صورت $N_i = \{v_j \in V(G) : \varepsilon_{ij} \in \varepsilon(G)\}$ تعریف می‌شود. رهبر عاملی است که هیچ همسایه‌ای ندارد ($N_L = \{0\}$). پیروها می‌توانند رهبر را در همسایگی خود داشته باشند که در این صورت $w_{iL} \neq 0$. وجود رهبر با توجه به تعریف رهبر در این مقاله سبب می‌شود گراف جهت‌دار گردد. تعداد یال‌هایی که به یک گره وارد می‌شود، درجه گره را تعیین می‌کند ($\deg(v_i) = \sum_{j=1}^N w_{ij}$). ماتریس درجه به صورت $D(G) = \text{diag}\{\deg v_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ تعریف می‌گردد. ماتریس لاپلاسیان گراف که مهم‌ترین ماتریس گراف می‌باشد، به صورت $L = D(G) - W(G)$ تعریف می‌گردد. مجموع درایه هر سطر ماتریس لاپلاسیان برابر صفر می‌گردد و لذا، ماتریس لاپلاسیان همیشه یک مقدار ویژه صفر دارد [۳۸]. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان با λ_i^L نمایش داده می‌شود و به صورت $(\lambda_1^L \leq \lambda_2^L \leq \lambda_3^L \leq \dots \leq \lambda_{N+1}^L)$ در نظر گرفته می‌شوند. اولین مقدار ویژه برابر صفر است ($\lambda_1^L = 0$). کوچک‌ترین مقدار ویژه غیر صفر ماتریس لاپلاسیان را اتصال جبری^۱ گراف گویند که برابر (λ_{\min}^L) می‌باشد. اتصال جبری سرعت همگرایی گراف را بیان می‌کند [۳۸]. هنگامی که تعداد عوامل و یا تعامل بین عوامل تغییر می‌کند، آنگاه ماتریس لاپلاسیان متغیر با زمان خواهد بود.

۲-۲- تعریف مسئله

در این مقاله، یک سیستم چند عاملی که در آن، تعداد عوامل متغیر با زمان می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر این است که سیستم چند عاملی متشکل از یک رهبر و تعداد $N(t)$ پیرو می‌باشد. همه عوامل پرنده‌های بدون سرنشین هستند و دینامیک هر عامل به صورت مدل به صورت مدل سه درجه آزادی^۲ جرم نقطه‌ای^۳ که در بخش بعدی آمده است در نظر گرفته می‌شود. آرایش در صفحه (x, y) در نظر گرفته شده است و ارتفاع تمام عوامل ثابت فرض شده است. قانون کنترل آرایش در فضای دو بعدی و براساس بردار فاصله و بردار سرعت و با توجه به ثابت بودن ارتفاع حاصل می‌گردد. هدف از کنترل، این است که علی‌رغم تغییر تعداد عوامل، سیستم چند عاملی ضمن ردیابی رهبر آرایش جدید را تشکیل دهند. چندضلعی منتظم با اندازه ضلع ثابت آرایش مطلوب در این مقاله می‌باشد. به عبارت دیگر، لازم است که فاصله هر عامل با همسایگان خود حتی با تغییر تعداد عوامل ثابت باقی بماند. فرضیات زیر برای سیستم چندعاملی در نظر گرفته می‌شود.

۱- گراف متصل^۴ است.

۲- ارتفاع عوامل ثابت است و با حرکت جمعی تغییر نمی‌کند.

۳- فاصله بین پیروها (طول ضلع چندضلعی)، حتی اگر تعداد پیروها تغییر کند، باید در حین حرکت ثابت نگه داشته شود.

۴- آرایش مطلوب، چندضلعی منتظم است. اگر تعداد پیروها از n به m تغییر یابد، در این صورت آرایش مطلوب از n ضلعی منتظم به m ضلعی منتظم تغییر می‌کند.

۵- تعداد پیروها دارای محدودیت است و نمی‌تواند از تعداد مشخصی (مثلاً ۹ عامل در این مقاله) بیشتر باشد.

۶- اگر فاصله مطلوب بین پیروها d باشد، با توجه به آرایش چندضلعی، فاصله بین هر پیرو و رهبر برابر $R(t) = \frac{d}{2 \sin(\frac{\pi}{N(t)})}$ است.

۷- هر پیرو فقط می‌تواند با دو پیرو دیگر همسایه باشد.

^۲ Degree of freedom

^۳ Point-mass

^۴ Connected

^۱ Algebraic connectivity

$$\frac{dh}{dt} = v \sin(\gamma), \quad (۶)$$

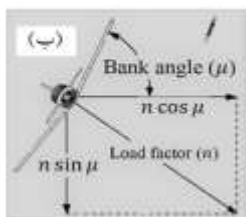
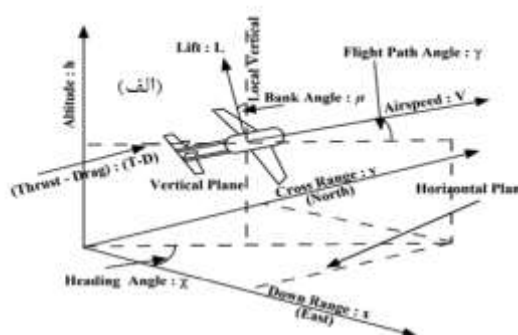
که χ (زاویه مسیر^۳)، γ (زاویه مسیر پرواز^۴)، بردار موقعیت $[x, y, h]^T$ ، اندازه سرعت (v)، نیروی تراست^۵ (T)، نیروی کشش^۶ (D)، وزن جسم پرنده (W)، گرانش زمین^۷ (g)، ضریب نیرو n و زاویه چرخش^۹ (μ) می‌باشد. در اینجا، منظور از زاویه چرخش، زاویه چرخش پرنده حول محور x دستگاه بدنی و زاویه مسیر پرواز، زاویه سرعت پرنده با افق می‌باشد (شکل ۱). تغییرات نیروی تراست، زاویه چرخش و ضریب نیرو با یک فیلتر مرتبه اول به مدل اعمال می‌گردد. که در (۷) - (۹) بیان شده است.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_c - T}{\tau_T} \quad (۷)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\mu_c - \mu}{\tau_\mu}, \quad (۸)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_c - n}{\tau_n}, \quad (۹)$$

T_c ، μ_c و n_c همان مقادیر مطلوب است که باید توسط سیستم دنبال گردد. τ_T ، τ_μ و τ_n برابر ثابت زمانی‌های معادلات می‌باشند.



شکل (۱): (الف) مدل سه درجه آزادی جرم نقطه‌ای؛ (ب) رابطه زاویه چرخش با ضریب نیرو [۴۰].

۸- هر پیرو دارای یک شماره است. اگر تعداد پیروها n باشد و یک پیرو به سیستم اضافه شود، شماره پیرو جدید $n+1$ است. پیرو شماره $n+1$ بین پیرو ۱ و n قرار می‌گیرد.

۹- اگر پیرو نام از سیستم حذف شود، شماره پیروهای $n+1$ به بعد یکی کاهش می‌یابد.

همچنین، لازم به ذکر است که در این مقاله فرض شده است که همه عوامل دارای دینامیک یکسان می‌باشند. دینامیک هر عامل نیز، مطابق مرجع [۳۹]. به صورت مدل سه درجه آزادی جرم نقطه‌ای در نظر گرفته شده است. پهنای باند دینامیک هر عامل به همراه کوچک‌ترین مقدار ویژه^۱ غیر صفر ماتریس لاپلاسین سرعت همگرایی آرایش را تعیین می‌کند. در اینجا با توجه به مدل در نظر گرفته شده، پهنای باند هر عامل از کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین بزرگ‌تر است. ورودی‌های کنترلی دینامیک هر عامل بر اساس ساختار کنترل آرایش ساخته می‌شود، اما هر عامل به طور مجزا کنترل می‌گردد. به عبارت دیگر فرمان‌ها کنترلی با توجه به آرایش تعیین می‌گردد و هر عامل باید به طور مجزا این فرمان‌ها را دنبال کند. لذا برای دنبال کردن فرمان‌های کنترلی از قانون کنترل معکوس^۲ استفاده شده است. دینامیک مدل و کنترل معکوس در ادامه بیان شده است.

۲-۳- دینامیک مدل و قانون کنترل معکوس

هر عامل با استفاده از یک مدل سه درجه آزادی با جرم نقطه‌ای در نظر گرفته شده است (شکل ۱- الف). معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل جرم نقطه به شرح ذیل است [۳۹]:

$$\frac{dv}{dt} = g \left(\frac{T-D}{W} - \sin(\gamma) \right), \quad (۱)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{g}{v} (n \cos(\mu) - \cos(\gamma)), \quad (۲)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = g \left(\frac{n \sin(\mu)}{v \cos(\gamma)} \right), \quad (۳)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(\cos(\gamma) \cos(\chi)), \quad (۴)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(\cos(\gamma) \sin(\chi)), \quad \frac{dn}{dt} = \frac{n_c - n}{\tau_n}, \quad (۵)$$

^۳ Heading angle

^۴ Flight path angle

^۵ Thrust

^۶ Drag

^۷ Gravity

^۸ Load Factor

^۹ Bank angle

^۱ Eigenvalues

^۲ Inversion control law

۳- راهبرد کنترل آرایش

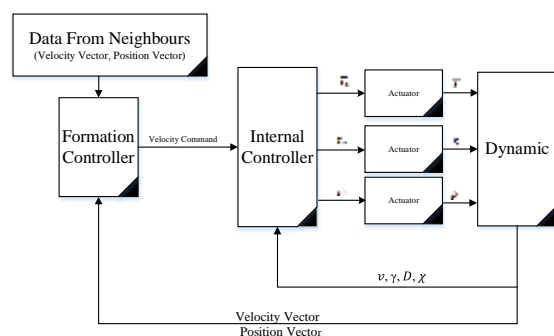
تمام عوامل در حرکت جمعی باید سرعت یکسانی داشته باشد. اما برای رسیدن به یک آرایش خاص، نیاز است که موقعیت عوامل در طول حرکت نسبت به هم کنترل شود. آرایش خاص مد نظر در این مقاله چندضلعی منظم است. با تغییر تعداد عوامل تعداد اضلاع چندضلعی تغییر می‌کند اما، فاصله میان عوامل تغییر نمی‌کند. برای دست یافتن به آرایش سیستم چندعاملی باید بردار سرعت (\vec{v}) تمام عوامل یکسان شود. اجماع سرعت به صورت $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{v}_i - \vec{v}_j = 0$ بیان می‌شود. بردار موقعیت (\vec{p}_i) هر عامل نیز باید نسبت به همسایگان برابر بردار مطلوب باشد. لذا اجماع بردار موقعیت به فرم $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{p}_i - \vec{p}_j\| = d$ می‌باشد. اجماع سرعت و موقعیت باید نسبت به رهبر صورت پذیرد. لذا اجماع بردار سرعت و موقعیت با توجه به ثابت بودن ارتفاع همه عوامل به صورت معادلات ۲۱-۲۴ بیان می‌گردد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_{x_L}(t) - v_{x_i}(t)) = v_{x_d}(t), \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_{y_L}(t) - v_{y_i}(t)) = v_{y_d}(t), \quad (22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_L(t) - x_i(t)) = x_{id}(t), \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_L(t) - y_i(t)) = y_{id}(t), \quad (24)$$



شکل (۲): دیاگرام بلوکی ساختار کنترل آرایش پیشنهادی

تغییر تعداد عوامل سبب تغییر آرایش می‌گردد، اما هدف آن است که با تغییر تعداد عوامل و تغییر شکل باید اندازه فاصله میان پیروها ثابت بماند $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i - p_j\| = d$ $(i, j = 1, 2, \dots, N)$. همچنین فرض می‌شود ارتفاع عوامل در حرکت ثابت است $\lim_{t \rightarrow \infty} \|h_i - h_j\| = 0$ $(i, j = 1, 2, \dots, N)$. در این صورت $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = d_x(t)$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i - y_j\| = d_y(t)$ $(i, j = 1, 2, \dots, N)$ می‌باشد. با توجه

بردار سرعت مطلوب ($[v_{xc} \ v_{yc} \ v_{hc}]$) به‌عنوان فرامین کنترل آرایش به هر عامل اعمال می‌شود. باید فرمان‌ها کنترل آرایش را به فرمان‌ها مدل که τ_n و τ_μ ، τ_T است تبدیل کرد. ابتدا با کمک معادلات (۴-۶) مقادیر مطلوب (v_c, γ_c, χ_c) از بردار سرعت مطلوب به‌دست می‌آید.

$$v_c = \sqrt{v_{xc}^2 + v_{yc}^2 + v_{hc}^2} \quad (10)$$

$$\gamma_c = \tan^{-1} \frac{v_{hc}}{\sqrt{v_{xc}^2 - v_{yc}^2}} \quad (11)$$

$$\chi_c = \tan^{-1} \frac{v_{yc}}{v_{xc}} \quad (12)$$

حالت‌های مطلوب مدل (v_c, γ_c, χ_c) با اعمال به یک فیلترهای مرتبه اول به ترتیب با پهنای باند ω_χ و ω_γ و ω_v به مدل اعمال می‌شوند. معادلات (۱۳)-(۱۵) کنترل‌کننده‌های مرتبه اول مدل را بیان می‌کند.

$$\frac{dv_d}{dt} = \omega_v(v_c - v), \quad (13)$$

$$\frac{d\gamma_d}{dt} = \omega_\gamma(\gamma_c - \gamma), \quad (14)$$

$$\frac{d\chi_d}{dt} = \omega_\chi(\chi_c - \chi), \quad (15)$$

برای محاسبه مقادیر مطلوب T_c ، n_c و μ_c از روی v_c و γ_c باید معادلات ۱ را با ۱۳، ۲ را با ۱۴ و ۳ را با ۱۵ در نظر گرفت. که در این صورت معادلات ۱۶-۱۸ حاصل می‌گردد که در آن، می‌توان از روابط ۱۷-۱۸ مقادیر مطلوب n_c و μ_c را به‌دست آورد. چگونگی محاسبه n_c و μ_c در روابط ۱۹-۲۰ بیان می‌شود.

$$T_c = D + W\omega_v \left(\frac{v_c - v}{g} \right) + W \sin \gamma_c, \quad (16)$$

$$n_c \cos \mu_c = \cos \gamma + v\omega_\gamma \left(\frac{\gamma_c - \gamma}{g} \right) = a, \quad (17)$$

$$n_c \sin \mu_c = v\omega_\chi \left(\frac{\chi_c - \chi}{g} \right) \cos \gamma = b, \quad (18)$$

$$n_c^2 = a^2 + b^2, \quad (19)$$

$$\mu_c = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \quad (20)$$

دینامیک در نظر گرفته شده دارای محدودیت‌های حرکتی می‌باشد. به‌عنوان مثال نیروی تراست دارای مقدار ماکزیمم می‌باشد. دینامیک مدل و قانون کنترل معکوس براساس [۳۹] بیان شده است. ساختار کنترل آرایش براساس ساختار بیان‌شده در شکل ۲ نمایش داده شده است.

اغتشاشات ثابت حذف گردد. حالت انتگرالی $q(t)$ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\dot{q} = z - r = C\zeta - r, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (27)$$

که در آن، r ورودی مرجع سیستم چندعاملی است که بر اساس ساختار کنترل آرایش حاصل می‌شود. کنترل انتگرالی قابلیت دنبال کردن رهبر بدون اطلاع از مسیر را فراهم می‌آورد. معادلات حالت سیستم با در نظر گرفتن کنترل انتگرالی به عنوان یکی از حالت‌های سیستم به فرم (۲۸) بیان می‌گردد.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r \\ z = \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \zeta \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (28)$$

که $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ است.

حال باید V را به گونه‌ای یافت که مدل (۲۸) را پایدار کند. شرط لازم و کافی برای وجود V که مدل را پایدار کند آن است که معادله ۲۸ کنترل‌پذیر حالت باشد. ماتریس کنترل‌پذیری سیستم به شرح ذیل است.

$$\begin{pmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & (\bar{A})^2\bar{B} \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (29)$$

اگر (۳۰) در (۲۹) قرار داده شود (۳۱) حاصل می‌گردد.

$$\phi_c = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & (\bar{A})^2\bar{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A\phi_c \\ 0 & C\phi_c \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} B & A\phi_c \\ 0 & C\phi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \phi_c \end{pmatrix},$$

با توجه به آن که ϕ_c رتبه کامل است، سیستم کنترل‌پذیر کامل حالت است، اگر و فقط اگر ماتریس (۳۲) رتبه کامل باشد.

$$\begin{pmatrix} B & A \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad (32)$$

ثابت بودن فاصله میان عوامل باید قید $(\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{(d_x(t))^2 + (d_y(t))^2} = d)$ برقرار باشد. ورودی کنترلی رهبر بر اساس مسیر پروازی تعیین می‌گردد و هیچ تاثیری از سایر عوامل نمی‌پذیرد، اما ورودی کنترلی سایر عوامل براساس حفظ آرایش در طول مسیر تعیین می‌گردد. لازم به ذکر است که تنها رهبر از مسیر حرکت آگاهی دارد و پیروها فقط رهبر را دنبال می‌کنند. لذا، عواملی که با رهبر در ارتباط هستند، باید علاوه بر حفظ آرایش، رهبر را دنبال کنند. همچنین برای حفظ آرایش نیاز است که موقعیت نسبی پیروها نسبت به هم حفظ شود. لذا عواملی که با رهبر همسایه نیستند، تنها کافی است موقعیت خود را نسبت به سایر عوامل حفظ کنند. آرایش نیز در صفحه (x, y) در نظر گرفته می‌شود. با توجه معادلات ۷-۲۰ کافی است بردار سرعت مطلوب به سیستم اعمال گردد. لذا معادلات حرکت سیستم برای کنترل آرایش به صورت ذیل در نظر گرفته می‌شود

$$\dot{\zeta} = A\zeta + BV, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0_{2 \times 2} & \\ & & 0 & 1 \\ 0_{2 \times 2} & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix},$$

آرایش براساس موقعیت عوامل ایجاد می‌گردد. لذا خروجی فضای حالت به فرم (۲۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$z = C\zeta, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

با توجه به معادلات ۲۵-۲۶ برای راحتی نوشتار معادلات حرکت در ادامه این معادلات فقط در راستای x در نظر گرفته می‌شود.

برای دنبال کردن رهبر بدون اطلاع از ورودی رهبر (مسیر حرکت) از کنترل‌کننده بازخورد حالت انتگرالی^۱ استفاده می‌شود. کنترل انتگرالی علاوه بر اینکه خاصیت ردیابی را برای پیروها ایجاد می‌کند، سبب می‌شود

¹ Integral control

$$\begin{cases} \zeta'_L = \bar{A}\zeta'_L + \bar{B}V_L + Fr_L \\ \zeta'_1 = \bar{A}\zeta'_1 + \bar{B}V_1 + Fr_1 \\ \vdots \\ \zeta'_{N(t)} = \bar{A}\zeta'_{N(t)} + \bar{B}V_{N(t)} + Fr_{N(t)} \end{cases}, \quad (35)$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \zeta' = \begin{pmatrix} q \\ \zeta \end{pmatrix}$$

اگر (۳۵) براساس ضرب کرونگر^۱ بازنویسی گردد (۳۶) حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} \zeta'_L = \bar{A}\zeta'_L + \bar{B}V_L + Fr_L \\ \zeta'_F = (I_{N(t)} \otimes \bar{A})\zeta'_F + (I_{N(t)} \otimes \bar{B})V_F \\ + (I_{N(t)} \otimes F)r_F \end{cases} \quad (36)$$

$$\zeta_F = [\zeta_1 \ \dots \ \zeta_{N(t)}]V_F = [V_1 \ \dots \ V_{N(t)}],$$

$$r_F = [r_1 \ \dots \ r_{N(t)}],$$

ماتریس لاپلاسین برای ساختار رهبر پیرو برای یک رهبر و $N(t)$ پیرو به فرم (۳۷) در نظر گرفته می‌شود.

$$L = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times N(t)} \\ L^f_{N(t) \times 1} & L^f_{N(t) \times N(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times N(t)} \\ [w_{iL}] & [w_{ij}] \end{bmatrix}, \quad (37)$$

حال قسمت دوم (۳۶) را براساس ماتریس لاپلاسین (۳۷) و قانون کنترل (۳۴) مجدد بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{aligned} \zeta'_F &= (I_{N(t)} \otimes \bar{A})\zeta'_F + (L^f_{N(t) \times N(t)} \otimes \bar{B}K)(\zeta'_F - \zeta'_{dF}) - \\ &L^f_{N(t) \times 1} \otimes \bar{B}K\zeta'_L + (I_{N(t)} \otimes \bar{B})[\dot{v}_{x_F} + \dot{v}_{x_{dF}}] + (I_{N(t)} \otimes F)r_F, \end{aligned} \quad (38)$$

که $v_{x_{dF}} = [v_{x_{d1}}, \dots, v_{x_{dN(t)}}]$ و $v_{x_F} = [v_{x_1}, \dots, v_{x_{N(t)}}]$ می‌باشد. لذا می‌توان برای سهولت در نگارش معادلات (۳۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$\zeta'_{d_{new}} = \zeta'_{d_i} + w_{iL}\zeta'_L, \quad (39)$$

حال $(\psi = \zeta'_F + \zeta'_{d_{new}})$ در نظر گرفته می‌شود

$$\zeta'_{d_{new}} = [\zeta'_{d_{1new}} \ \dots \ \zeta'_{d_{N(t)new}}]^T$$

در ادامه به محاسبه $\dot{\psi}$ پرداخته شده است.

ماتریس ۲۲ رتبه کامل می‌باشد. با افزودن حالت انتگرالی به مدل خاصیت ردیابی برای مدل ایجاد شده است. دنبال کردن رهبر بدون اطلاع از مسیر حرکت با افزودن حالت انتگرالی به سیستم ایجاد می‌گردد. حال باید ورودی مرجع (۳) براساس سیستم چند عاملی تعریف گردد. ورودی مرجع باید به گونه‌ای باشد که هم سبب آرایش گردد و هم دنبال کردن رهبر را به همراه داشته باشد. با توجه به این موضوع سیگنال مرجع برای عامل نام به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$r_i = x_{i_d} + \frac{w_{iL}x_L + \sum_{j=1}^{j=N} w_{ij}(x_j - x_{j_d})}{\deg v_i} \quad (33)$$

ورودی مرجع برای حالت انتگرالی در (۳۳) بیان گردید. حال باید ورودی مطلوب به دینامیک مدل اعمال گردد. ورودی مطلوب باید براساس تعاملات میان عوامل ساخته می‌شود. لذا قانون کنترل آرایش (۳۴) در این مقاله پیشنهاد می‌گردد.

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= k_{1_i} \sum_{j=1}^{N_i} w_{ij} \int ((x_i(t) - x_{i_d}(t)) - (x_j(t) - x_{j_d}(t))) dt + \\ &k_{1_x} w_{iL} \int ((x_i(t) - x_{i_d}(t)) - x_L(t)) dt + \\ &k_{2_x} \sum_{j=1}^{N_i} w_{ij} ((x_i(t) - x_{i_d}(t)) - (x_j(t) - x_{j_d}(t))) + \\ &k_{2_x} w_{iL} ((x_i(t) - x_{i_d}(t)) - x_L(t)) + \\ &k_{3_x} \sum_{j=1}^{N_i} w_{ij} ((v_{x_i}(t) - v_{x_{i_d}}(t)) - (v_{x_j}(t) - v_{x_{j_d}}(t))) + \\ &k_{3_x} w_{iL} (v_{x_i}(t) - v_{x_{i_d}}(t)) + (\dot{v}_{x_i}(t) + \dot{v}_{x_{i_d}}(t)), \end{aligned} \quad (34)$$

اندیس i و j برای بیان حالت‌های مربوط به پیروها و اندیس L برای بیان حالت‌های مربوط به رهبر می‌باشد. $k_{1_x}, k_{2_x}, k_{3_x}, k_{1_y}, k_{2_y}, k_{3_y}$ ضرایب کنترلی می‌باشند.

۳-۱- پایداری کنترل آرایش ردیابی متغیر با زمان پیشنهادی

مدل حرکت کلی سیستم چندعاملی با توجه به (۲۵) برای یک رهبر و $N(t)$ پیرو به صورت (۳۵) بیان می‌گردد. لازم به ذکر است که ورودی رهبر در این مقاله ناشناخته است.

¹ Kronecker

کوچک‌ترین مقدار ویژه غیر صفر ۹ ضلعی منتظم را λ_{\min}^{lij} می‌نامیم.

قضیه ۲: سیستم چند عاملی (۲۸) در صورتی که پیروها از ورودی رهبر اطلاعی ندارند با قانون کنترل (۳۴)، ردیابی آرایش متغیر بازمان محقق می‌گردد که در آن $K = -\delta \frac{1}{\lambda_{\min}^{lij}} R^{-1} B^T P$ می‌باشد. ماتریس مثبت معین P از حل معادله ریکاتی ($PA + A^T P + Q + PBR^{-1}B^T P = 0$) و به صورت غیر برخط به دست می‌آید. همچنین ماتریس وزنی R و δ ثابت به صورت ($R = R^T > 0$) و ($\delta > 0.5$) می‌باشند. زوج A و C آشکار پذیر می‌باشند. $Q \geq 0$ ماتریس وزنی است.

اثبات قضیه ۲: برای اثبات پایداری سیستم چند عاملی تابع کاندیدای لیاپانوف به صورت (۴۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \psi^T (I_{N(t)} \otimes P) \psi, \quad (45)$$

در این صورت مشتق تابع لیاپانوف به فرم (۴۵) می‌باشد.

اگر $(K = -\delta \frac{1}{\lambda_{\min}^{lij}} R^{-1} B^T P)$ و $(P\bar{A} + \bar{A}^T P = -Q - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T P)$ رابطه (۴۶) جایگذاری گردد، به دست می‌آید.

$$\dot{V} = \psi^T [(I_{N(t)} - 2 \frac{\delta}{\lambda_{\min}^{lij}} L^j) \otimes (P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T P)] \psi - \psi^T Q \psi, \quad (47)$$

حال باید نشان داد که $(I_N - 2 \frac{\delta}{\lambda_{\min}^{lij}} L^{ij}) \otimes (P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T P) < 0$ است.

قضیه ۳ (Courant-Weyl theorem) [۴۲]: اگر X و Y ماتریس‌های متقارن $m \times m$ باشند. آنگاه:

$$\lambda_{j+k-1}(X+Y) \leq \lambda_j(X) + \lambda_k(Y), \quad (48)$$

$$1 \leq j, k \leq m, j+k \leq m+1$$

$$\lambda_j(X+Y) \leq \lambda_j(X) + \lambda_j(Y), \quad (49)$$

$$\lambda_j(X+Y) \leq \lambda_j(X) + \lambda_j(Y), \quad (50)$$

که $(0 = \lambda_1(X) \leq \lambda_2(X) \leq \dots \leq \lambda_m(X))$ مقادیر ویژه ماتریس (X) می‌باشد.

$$\dot{\psi} = \zeta'_F + \zeta'_{d_{Fnew}}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (I_{N(t)} \otimes \bar{A} + L_{N(t) \times N(t)}^{ff} \otimes \bar{B}K) \psi - \zeta'_{d_F} \\ &+ (I_{N(t)} \otimes \bar{A}) \zeta'_{d_F} - (I_{N(t)} \otimes \bar{B}) V_L \\ &+ (I_{N(t)} \otimes \bar{B}) [\dot{x}_F + \dot{x}_{dF}], \end{aligned} \quad (41)$$

واضح است که:

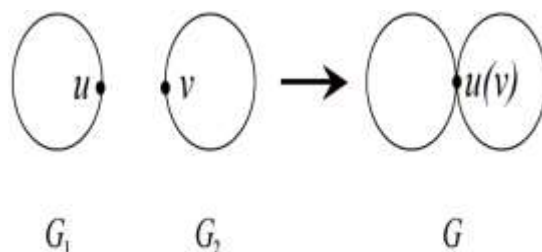
$$\dot{x}_{xL} = \lim_{t \rightarrow +\infty} V_L, \quad (42)$$

$$(I_{N(t)} \otimes \bar{A}) \zeta'_{d_F} - \zeta'_{d_F} + (I_{N(t)} \otimes \bar{B}) \dot{x}_{x_{dF}} = 0 \quad (43)$$

آرایش در صورتی تحقق می‌یابد که شتاب تمام عوامل یکسان باشند. لذا شرط لازم برای اجماع ($V_{LN(t)} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}_F = 0$) می‌باشد. لذا $\dot{\psi}$ به صورت (۴۴) محاسبه می‌شود.

$$\dot{\psi} = (I_{N(t)} \otimes \bar{A} + L_{N(t) \times N(t)}^{ff} \otimes \bar{B}K) \psi, \quad (44)$$

قضیه ۱ [۴۱]: فرض کنیم G_1 و G_2 گراف‌های متصل به ترتیب دارای مرتبه m و n می‌باشند. همچنین $u \in V(G_1)$ و $v \in V(G_2)$. گراف G از یکی کردن u و v حاصل می‌گردد. که در این صورت $\lambda_2(G) \leq \lambda_2(G_1)$ برقرار می‌باشد (شکل ۳).



شکل (۳): اتصال دو گراف متصل [۴۱].

براساس قضیه ۱، با توجه به فرضیات مسئله در این مقاله اگر یک عامل به سیستم چند عاملی افزوده شود، عامل جدید را می‌توان با G_2 و گراف قبلی G_1 متناظر نمود. که در این صورت می‌توان گفت اگر تعداد عوامل افزایش یابد، اولین مقادیر ویژه غیر صفر ماتریس لاپلاسین، کاهش می‌یابد. با توجه به این که در این مقاله فرض شده تعداد پیروها از تعداد مشخصی مثلا ۹ بیشتر نمی‌گردد، لذا کوچک‌ترین مقدار ویژه غیر صفر ۹ ضلعی منتظم کوچک‌ترین مقدار ویژه در همه حالت‌های مسئله می‌باشد. لذا

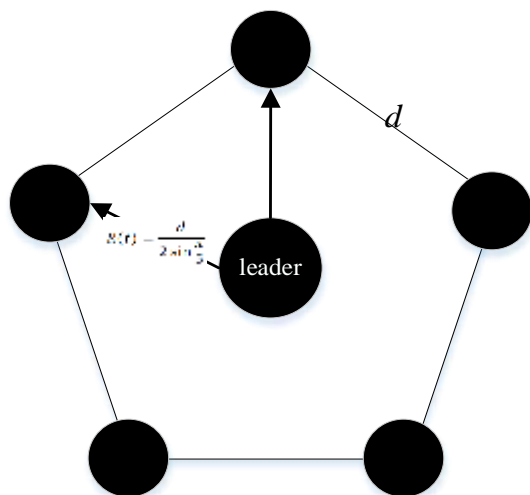
¹ symmetric

۴- شبیه‌سازی‌ها و نتایج

به‌منظور نمایش عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، برای مدل معرفی‌شده در بخش ۲ شبیه‌سازی انجام شده است. قانون کنترل ۳۴ با $(K = -[0.16 \quad 1/53 \quad 6/45])$ در نظر گرفته می‌شود. مقادیر ماتریس‌های وزنی که ضرایب کنترلی براساس آن تعیین می‌گردد، به‌صورت معادله ۵۵ انتخاب شده است.

$$\begin{cases} Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \\ R = 100 \end{cases} \quad (55)$$

بر اساس بردار سرعت مطلوب که از قانون کنترل ۳۴ حاصل شده به کمک ۱۰-۱۲ حالت‌های مطلوب مدل v_c, γ_c و χ_c حاصل می‌گردد. همچنین با قرار دادن v_c, γ_c و χ_c در ۱۶-۲۰ مقادیر مطلوب T_c, n_c و μ_c حاصل می‌گردد. برای بیان عملکرد کنترل پیشنهادی دو سناریو حرکتی مجزا برای سیستم چندعاملی در نظر گرفته شده است.



شکل (۴): آرایش مطلوب عامل‌ها به صورت پنج‌ضلعی منتظم.

۴-۱- سناریو ۱

در این سناریو، در ابتدای حرکت شش پیرو و یک رهبر در حرکت جمعی شرکت می‌کنند. آرایش مطلوب شکل ۵ می‌باشد. موقعیت اولیه عوامل در شکل ۷ تا رسیدن به آرایش مطلوب

طبق نامساوی‌های قضیه ۳ با فرض متقارن بودن ماتریس X و Y و دارای ابعاد $m \times m$ باشد در این صورت:

$$\lambda_1(I_N) = 1, \quad (51)$$

$$\lambda_1(I_N - 2 \frac{1}{\lambda_{\min}^{L_j}} L_j^{ij}) \leq \lambda_1(I_N) - 2 \frac{\delta}{\lambda_{\min}^{L_j}} \lambda_1(L_j^{ij}), \quad (52)$$

$$-2 \frac{\delta}{\lambda_{\min}^{L_j}} \lambda_1(L_j^{ij}) > 1, \quad (53)$$

$$1 - 2 \frac{\delta}{\lambda_{\min}^{L_j}} \lambda_1(L_j^{ij}) < -1, \quad (54)$$

به ازای تمام $Q > 0$ از (۵۰) می‌توان نتیجه گرفت که $(\dot{V} < 0)$ برقرار است.

باید توجه داشت که با توجه به قضیه ۲، ضرایب کنترل‌کننده با توجه به ماتریس‌های وزنی R و δ قابل تنظیم هستند. با توجه به اینکه ضرایب وزنی، از حل معادله ریکاتی و به‌صورت غیر برخط محاسبه می‌شوند، می‌توان از روش‌های تنظیم این ضرایب در مراجع مرتبط مانند [۴۳] و [۴۴] و یا روش‌های تنظیم خودکار و بهینه ضرایب مانند [۴۵] و [۴۶] بهره برد که در این حالت هدف، بهینه‌سازی انتگرال وزن دهی شده تابع فرم مرتبه دو خطای کنترل آرایش و نیز تلاش کنترلی خواهد بود. لذا، مراحل تعیین ضرایب کنترل‌کننده به‌صورت مختصر به شرح ذیل است.

۱- انتخاب ماتریس‌های وزنی Q و R .

۲- حل معادله ریکاتی و به‌دست آوردن ماتریس P .

۳- تعیین ضرایب کنترلی $(K = -\delta \frac{1}{\lambda_{\min}^{L_j}} R^{-1} B^T P)$.

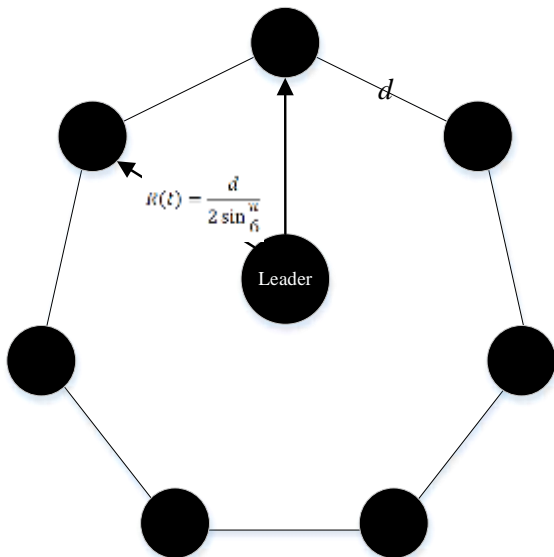
۴- به‌دست آوردن ورودی کنترلی $(u = K \zeta')$.

۵- شبیه‌سازی و به‌دست آوردن نتایج.

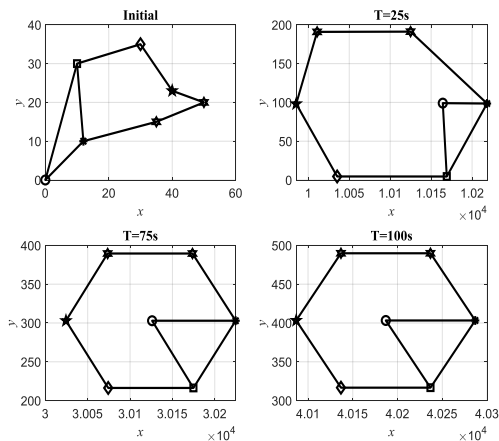
۶- در صورت عدم رضایت تغییر و تنظیم ماتریس‌های وزنی Q و R بر طبق الگوریتم تنظیم مناسب و بازگشت به مرحله ۲.

لازم به ذکر است که در این مقاله از الگوریتم ارائه شده در [۴۳]، جهت تنظیم ماتریس‌های وزنی استفاده شده است.

آرایش اولیه و کاهش تعداد عامل‌ها، پاسخ مشاهده شده دارای دینامیک مناسبی می‌باشد. در این حالت‌ها، با توجه به اینکه عامل‌ها همزمان رهبر و آرایش متغیر با زمان (با تغییر تعداد عامل‌ها) را ردیابی می‌کنند، وجود نوسانات اندک در پاسخ آن‌ها قابل قبول به نظر می‌رسد. همچنین با توجه به محل ورود عامل جدید در شکل ۸، در هنگام اضافه‌شدن عامل جدید، با توجه به دور بودن این عامل، در ابتدای زمان شکل‌گیری آرایش جدید و الزام قرار گرفتن این عامل بین عامل‌های ۱ و n نوسانات نسبتاً بیشتری در پاسخ این عامل دیده می‌شود که ناشی از الزامات مسئله است.

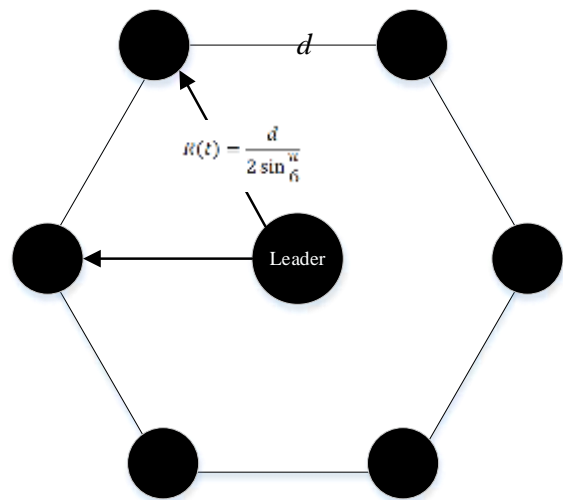


شکل (۶): آرایش مطلوب عامل‌ها به صورت هفت‌ضلعی منتظم.



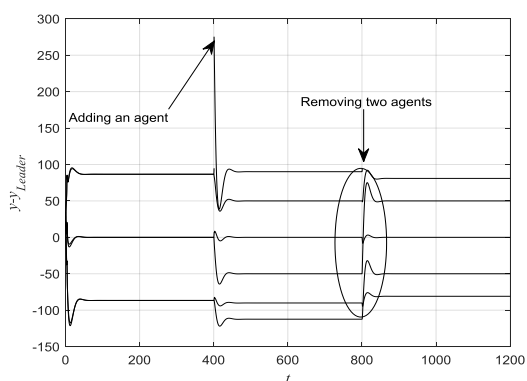
شکل (۷): ابتدای حرکت تا رسیدن به آرایش مطلوب اول در سناریو ۱.

نشان داده شده است. با حضور شش پیرو و یک رهبر، این حرکت در ۱۰۰ ثانیه به شش‌ضلعی منتظم می‌رسد که بر اساس خصوصیات در نظر گرفته شده از عوامل مطلوب است. در ادامه یک عامل در ($T = 400s$) به سیستم افزوده می‌شود و مطلوب آن است که آرایش به شکل ۶ برسد. شکل ۸ آرایش را بعد از افزوده شدن یک عامل را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود آرایش در ۱۰۰ ثانیه به شکل موردنظر خود می‌رسد.



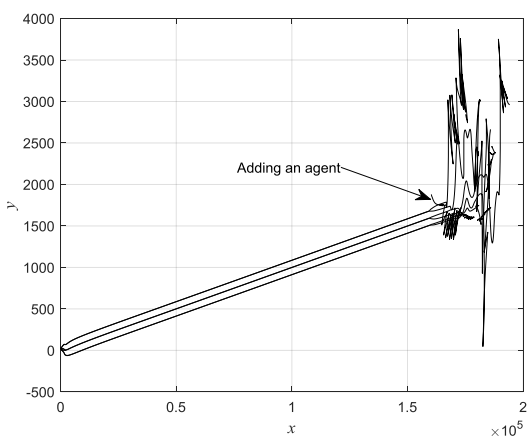
شکل (۵): آرایش مطلوب عامل‌ها به صورت شش‌ضلعی منتظم.

در نهایت دو عامل سیستم در زمان ($T = 800s$) ثانیه از سیستم جدا می‌شوند و آرایش موردنظر در شکل ۴ نشان داده شده است. شکل ۹ عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی را پس از کاهش دو عامل نشان می‌دهد. حرکت رهبر در صفحه (x, y) در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. برای بیان بهتر عملکرد کلی سیستم چندعاملی با توجه به تغییرات تعداد پیروها و دنبال کردن رهبر در طول حرکت بدون اطلاع از مسیر رهبر، از اختلاف موقعیت پیروها نسبت به رهبر در راستای محورهای x و y استفاده شده است. شکل ۱۱ و شکل ۱۲ اختلاف موقعیت رهبر با پیروها را در راستای محورهای x و y به ترتیب نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، در هنگام شکل‌گیری



شکل (۱۲): فاصله نسبی پیروها با رهبر در راستای محور y در سناریو ۱.

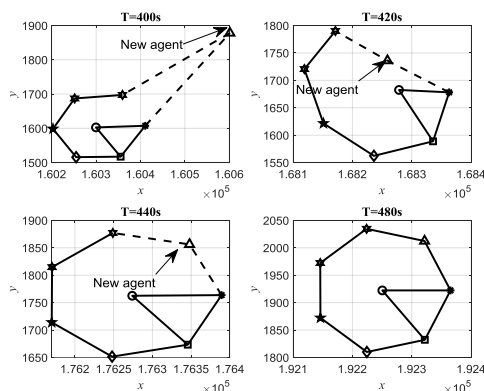
همچنین جهت مقایسه عملکرد کنترل کننده پیشنهادی با سایر مراجع، قانون کنترلی مرجع [۲۵] به این سناریو اعمال و نتایج آن در شکل ۱۳ آورده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، در این حالت، بعد از تغییر تعداد پیروها آرایش از بین می‌رود و سیستم واگرا می‌گردد.



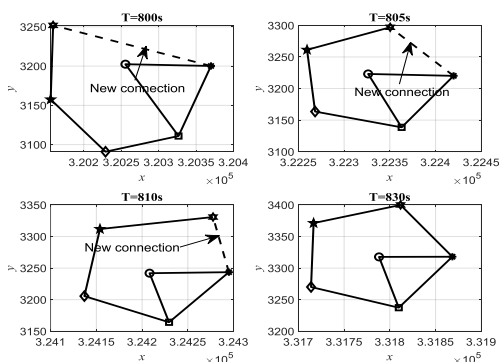
شکل (۱۳): مسیر حرکت رهبر در صفحه (x, y) در سناریو ۱ با قانون کنترل مرجع [۲۵].

۲-۴- سناریو ۲

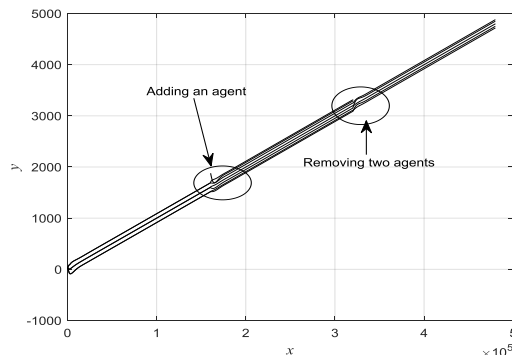
هدف این سناریو نشان دادن چگونگی قرارگیری عوامل جدید در آرایش موردنظر است. برای این منظور، در ابتدا پنج پیرو مانند (شکل ۴) در نظر گرفته می‌شوند که شرایط اولیه و تا رسیدن به آرایش پنج‌ضلعی منظم در شکل ۱۴ آمده است. سپس دو پیرو در $(T = 500 \text{ s})$ و $(T = 1000 \text{ s})$ به آرایش اضافه می‌شوند. آرایش بعد از افزوده شدن اولین پیرو تا رسیدن به آرایش مطلوب در شکل ۱۵ آمده است. در نهایت شکل ۱۶ تغییرات آرایش در اثر اضافه شدن دومین پیرو را نشان می‌دهد. حرکت رهبر در صفحه (x, y) در



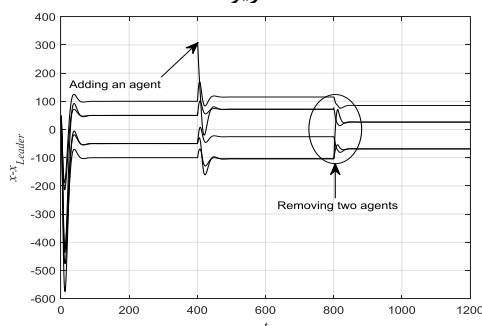
شکل (۸): آرایش بعد از اضافه شدن یک پیرو جدید تا رسیدن به آرایش مطلوب در سناریو ۱.



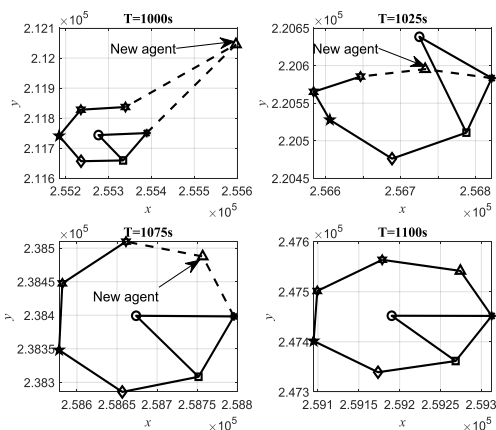
شکل (۹): آرایش بعد از کم شدن دو پیرو تا رسیدن به آرایش مطلوب در سناریو ۱.



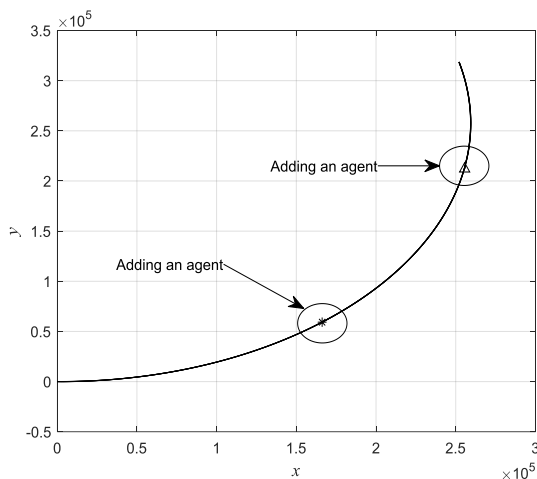
شکل (۱۰): مسیر حرکت رهبر در صفحه (x, y) برای در سناریو ۱.



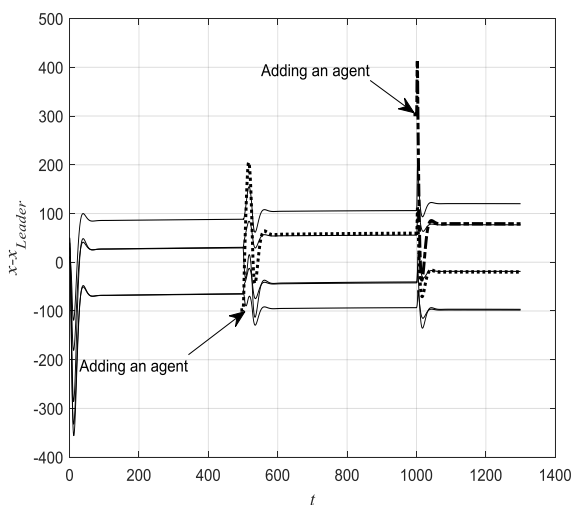
شکل (۱۱): فاصله نسبی پیروها با رهبر در راستای محور x در سناریو ۱.



شکل (۱۶): آرایش بعد از اضافه شدن یکدیگر پیرو تا رسیدن به آرایش مطلوب در سناریو ۲.

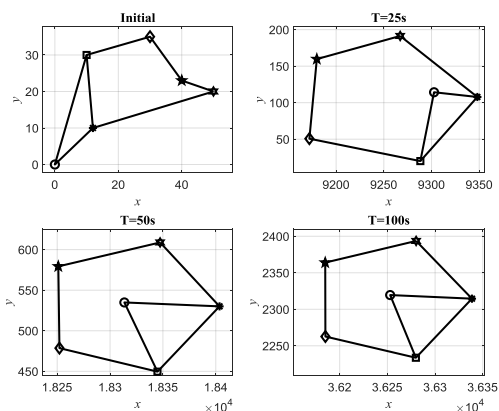


شکل (۱۷): مسیر حرکت رهبر در صفحه (x, y) برای در سناریو ۲.

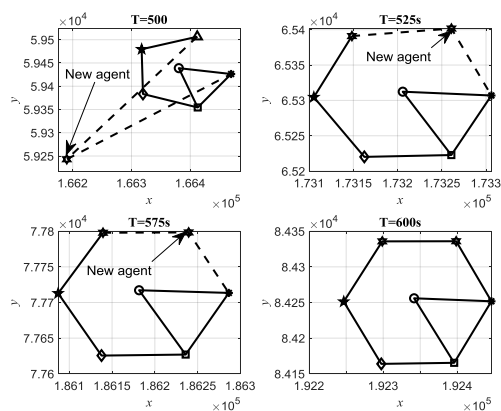


شکل (۱۸): فاصله نسبی پیروها با رهبر در راستای محور x در سناریو ۲

شکل ۱۷ نمایش داده شده است. برای بیان بهتر عملکرد کلی سیستم چندعاملی با توجه به تغییرات تعداد پیروها و دنبال کردن رهبر در طول حرکت بدون اطلاع از مسیر رهبر، از اختلاف موقعیت پیروها نسبت به رهبر در راستای محورهای x و y استفاده شده است. شکل ۱۸ و شکل ۱۹ اختلاف موقعیت رهبر با پیروها را در راستای محورهای x و y به ترتیب نشان داده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، مشاهده میشود که حتی با وجود پیچیدگی مسیر رهبر، ردیابی آرایش بخوبی انجام شده و عامل‌های جدید در محل مناسب قرار گرفته‌اند. در این حالت نیز با توجه به دور بودن محل اولیه عامل‌های جدید و الزام قرار گرفتن این عامل بین عامل‌های ۱ و n نوسانات نسبتاً بیشتری در پاسخ این عامل‌ها دیده می‌شود (منحنی‌های خط‌چین در شکل‌های ۱۸ و ۱۹).



شکل (۱۴): ابتدای حرکت تا رسیدن به آرایش مطلوب اول در سناریو ۲.



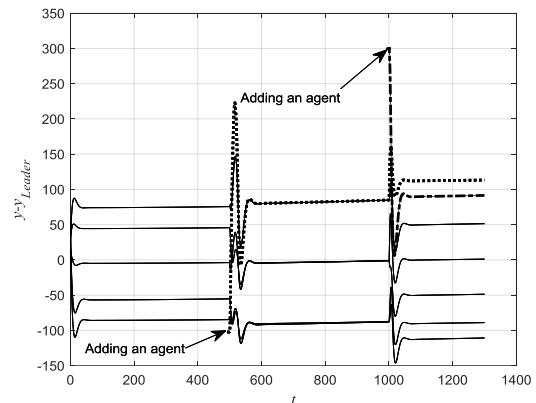
شکل (۱۵): آرایش بعد از اضافه شدن یک پیرو جدید تا رسیدن به آرایش مطلوب در سناریو ۲.

۵- نتیجه گیری

کنترل آرایش متغیر بازمان برای در حالتی که رهبر دارای حرکت است و پیروها از ورودی رهبر اطلاعی ندارند و تعداد پیروها نیز تغییر می کند مورد بررسی قرار گرفته است. قانون کنترل آرایش متغیر بازمان به دینامیک مدل هر عامل اعمال می شود. دینامیک فرمانها با توجه به معادلات بیان شده (۷- ۲۰) کنترل آرایش را دنبال می کند. ضرایب K قانون کنترل آرایش با توجه به تغییرات مدل به صورت از پیش تعیین شده به سیستم اعمال می گردد. قانون کنترل آرایش از یک انتگرال موقعیت نسبی عوامل بهره برده است که این انتگرال گیری سبب شده دنبال کردن رهبر بدون اطلاع از ورودی رهبر امکان پذیر گردد. شرایط امکان سنجی برای کنترل آرایش ارائه شد و تجزیه و تحلیل پایداری سیستم چند عاملی از طریق قضیه پایداری لیاپانوف مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه این پژوهش می توان وجود مانع را در مسیر حرکت در نظر گرفت.

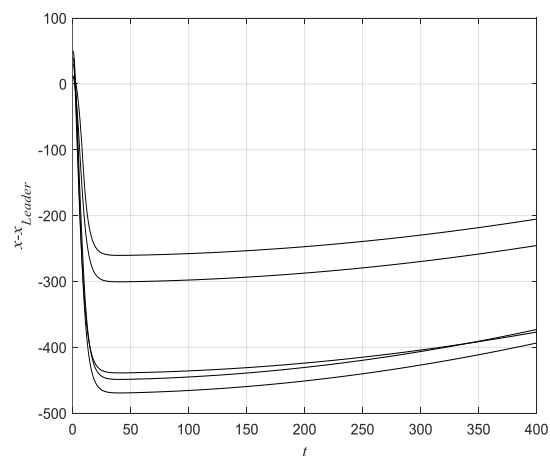
۶- مراجع

1. He, L., Peng B., Xiaolong L., Jiaqiang Z., and Weijia W. "Feedback formation control of UAV swarm with multiple implicit leaders." *Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 72, pp. 327-334, 2018.
2. Yang, A., Wasif, N., George, W. I., and Kang, L., "Stability analysis and implementation of a decentralized formation control strategy for unmanned vehicles." *IEEE Trans. Control. Syst. Technol.* Vol. 22, No. 2, pp. 706-720, 2013.
3. Ma, Ch., and Qingshuang, Z. "Distributed formation control of 6-DOF autonomous underwater vehicles networked by sampled-data information under directed topology." *Neurocomputing*, Vol. 154, pp. 33-40, 2015.
4. Bayezit, I., and Barış F., "Distributed cohesive motion control of flight vehicle formations." *IEEE Trans. Ind. Electron.* Vol. 60, No. 12, pp. 5763-5772, 2012.
5. Cao, Y., Wenwu Y., Wei R., and Guanrong, Ch. "An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination." *IEEE Trans. Industr. Inform.* Vol. 9, No. 1, pp. 427-438, 2012.

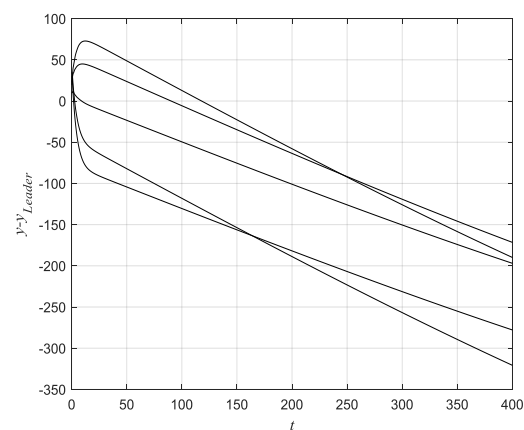


شکل (۱۹): فاصله نسبی پیروها با رهبر در راستای محور y در سناریو ۲.

در این سناریو نیز، اگر از قانون کنترل [۲۵] استفاده شود با توجه به پیچیدگی مسیر رهبر اصلا آرایش ایجاد نمی گردد. شکل های ۲۰ و شکل ۲۱ به این موضوع اشاره می کند.



شکل (۲۰): فاصله نسبی پیروها با رهبر در راستای محور x در سناریو ۲ برای قانون کنترل [۲۵].



شکل (۲۱): فاصله نسبی پیروها با رهبر در راستای محور y در سناریو ۲ برای قانون کنترل [۲۵].

- using virtual structures." *Auton. Robots*, Vol. 4, No. 4, pp. 387-403, 1997.
16. Balch, T., and Ronald, C. Arkin, "Behavior-based formation control for multirobot teams." *IEEE Trans Rob Autom*, Vol. 14, No. 6, pp. 926-939, 1998.
 17. Dong, X., Yan Zh., Zhang, R., and Yisheng, Zh., "Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying." *IEEE Trans. Ind. Electron.* Vol. 64, No. 6, pp. 5014-5024, 2016.
 18. Li, Zh., Guanghui, W., Zhisheng, D., and Wei, R., "Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs." *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 60, No. 4, pp. 1152-1157, 2014.
 19. Cheng, B., and Zhongkui, L., "Fully distributed event-triggered protocols for linear multiagent networks" *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 64, No. 4, pp. 1655-1662, 2018.
 20. Dong, X., Bocheng Y., Zongying, Sh., and Yisheng, Zh. "Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: Theories and applications." *IEEE Trans. Control. Syst. Technol.* Vol. 23, No. 1, pp. 340-348, 2014.
 21. Rezaee, H., and Abdollahi, F., "Pursuit formation of double-integrator dynamics using consensus control approach." *IEEE Trans. Ind. Electron.* Vol. 62, No. 7, pp. 4249-4256, 2014.
 22. Deng, X., Xiuxia, S., Ri, L., and Shuguang, L., "Consensus control of leader-following nonlinear multi-agent systems with distributed adaptive iterative learning control." *Int. J. Syst. Sci.* Vol. 49, No. 16, pp. 3247-3260, 2018.
 23. Chen, Liangming, Yanning Guo, Chuanjiang Li, and Jing Huang. "Satellite formation-containment flying control with collision avoidance." *J. Aerosp. Inform. Syst.* Vol. 15, No. 5, pp. 253-270, 2018.
 24. Ai, Xiaolin, and Jianqiao Yu. "Flatness-based finite-time leader-follower formation control of multiple quadrotors with external disturbances." *Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 92, pp. 20-33, 2019.
 6. Wang, Y., Lei, H., and Changqiang, H., "Adaptive time-varying formation tracking control of unmanned aerial vehicles with quantized input." *ISA Trans.* Vol. 85, pp. 76-83, 2019.
 7. Yang, S., Yaoguang, C., Zhaoxia P., Guoguang, W., and Konghui, G. "Distributed formation control of nonholonomic autonomous vehicle via RBF neural network." *Mech. Syst. Signal Process.* Vol. 87, pp. 81-95, 2017.
 8. Dong, X., Jianxiang, X., Geng, L., and Yisheng, Zh. "Formation control for high-order linear time-invariant multiagent systems with time delays." *IEEE Trans Control Netw Syst.* Vol. 1, No. 3, pp. 232-240, 2014.
 9. Guo, M., Michael, M. Zavlanos, and Dimos V. Dimarogonas, "Controlling the relative agent motion in multi-agent formation stabilization." *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 59, No. 3, pp. 820-826, 2013.
 10. Ge, X., and Qing-Long, H. "Distributed formation control of networked multi-agent systems using a dynamic event-triggered communication mechanism." *IEEE Trans. Ind. Electron.* 64, No. 10, pp. 8118-8127, 2017.
 11. Miklic, D., Stjepan B., Rafael F., and Yang S. "A grid-based approach to formation reconfiguration for a class of robots with non-holonomic constraints." *Eur. J. Control* Vol. 18, No. 2, pp. 162-181, 2012.
 12. Keshmiri, S., and Payandeh, Sh., "A centralized framework to multi-robots formation control: Theory and application." In *Collaborative Agents-Research and Development*, pp. 85-98, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
 13. Brandão, A. S., and Sarcinelli-Filho, M., "On the guidance of multiple uav using a centralized formation control scheme and delaunay triangulation." *J. Intell. Robot. Syst.* Vol. 84, No. 1-4, pp. 397-413, 2016.
 14. Sayyaadi, H., and Mostafavi, E., "Formation Control of Unmanned Helicopters by Leader-Follower Method." *Sci J. Aerosp. Mech.* Vol. 13, No. 4, pp. 59-69, 1396, In Persian.
 15. Lewis, M. A., and Kar-Han, T., "High precision formation control of mobile robots

- transition rates." *J. Franklin Inst.* Vol. 356, No. 11, pp. 5706-5728, 2019.
34. Ning, Boda, Qing-Long Han, Zongyu Zuo, Jiong Jin, and Jinchuan Zheng. "Collective behaviors of mobile robots beyond the nearest neighbor rules with switching topology." *IEEE Trans. Cybern.* Vol. 48, No. 5, pp. 1577-1590, 2017.
 35. Wen, Guoxing, CL Philip Chen, and Yan-Jun Liu. "Formation control with obstacle avoidance for a class of stochastic multiagent systems." *IEEE Trans. Ind. Electron.* Vol. 65, No. 7, pp. 5847-5855, 2017.
 36. Zhou, Dingjiang, Zijian Wang, and Mac Schwager. "Agile coordination and assistive collision avoidance for quadrotor swarms using virtual structures." *IEEE Trans. Robot.* Vol. 34, No. 4, pp. 916-923, 2018.
 37. Yu, Jianglong, Xiwang Dong, Qingdong Li, and Zhang Ren. "Time-varying formation tracking for high-order multi-agent systems with switching topologies and a leader of bounded unknown input." *J. Franklin Inst.* Vol. 355, No. 5, pp. 2808-2825, 2018.
 38. Olfati-Saber, Reza, J. Alex Fax, and Richard M. Murray. "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems." *Proc. IEEE.* Vol. 95, No. 1, pp. 215-233, 2007.
 39. Anderson, Mark, and Andrew Robbins. "Formation flight as a cooperative game." In *Guidance, navigation, and control conference and exhibit*, p. 4124, 1998.
 40. Skyrda, Ihor. "Decentralized Autonomous Unmanned Aerial Vehicle Swarm Formation and Flight Control." In *Int. Conf. Inform. Comm. Tech. Edu. Res. Indu. App.* pp. 197-219. Springer, Cham, 2018.
 41. Tian, Xiaoguo, Ligong Wang, and Yong Lu. "On the second smallest and the largest normalized Laplacian eigenvalues of a graph." *arXiv preprint arXiv:1603.04301*, 2016.
 42. Das, Saptarshi, Indranil Pan, Kaushik Halder, Shantanu Das, and Amitava Gupta. "LQR based improved discrete PID controller design via optimum selection of weighting matrices using fractional order integral performance index." *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 6, pp. 4253-4268, 2013.
 25. Hua, Yongzhao, Xiwang Dong, Junbo Wang, Qingdong Li, and Zhang Ren. "Time-varying output formation tracking of heterogeneous linear multi-agent systems with multiple leaders and switching topologies." *J. Franklin Inst.* Vol. 356, No. 1, pp. 539-560 2019.
 26. Seo, Joongbo, Youdan Kim, Seungkeun Kim, and Antonios Tsourdos. "Consensus-based reconfigurable controller design for unmanned aerial vehicle formation flight." *Proc. Inst. Mech. Eng. Part G*, Vol. 226, No. 7, pp. 817-829, 2012.
 27. Dong, Xiwang, and Guoqiang Hu. "Time-varying formation control for general linear multi-agent systems with switching directed topologies." *Automatica*, Vol. 73, pp. 47-55, 2016.
 28. Brinón-Arranz, Lara, Alexandre Seuret, and Carlos Canudas-de-Wit. "Cooperative control design for time-varying formations of multi-agent systems." *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 59, No. 8, pp. 2283-2288, 2014.
 29. Dong, Xiwang, Qingke Tan, Qingdong Li, and Zhang Ren. "Necessary and sufficient conditions for average formation tracking of second-order multi-agent systems with multiple leaders." *J. Franklin Inst.* Vol. 354, No. 2, pp. 611-626, 2017.
 30. Porfiri, Maurizio, D. Gray Roberson, and Daniel J. Stilwell. "Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach." *Automatica*, Vol. 43, No. 8, pp. 1318-1328, 2007.
 31. Sun, Fei, and Kamran Turkoglu. "Nonlinear consensus strategies for multi-agent networks under switching topologies: Real-time receding horizon approach." *Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 87, pp. 323-330, 2019.
 32. Jia, Zhenyue, Linlin Wang, Jianqiao Yu, and Xiaolin Ai. "Distributed adaptive neural networks leader-following formation control for quadrotors with directed switching topologies." *ISA Trans.* Vol. 93, pp. 93-107, 2019.
 33. Zhou, Zhen, Hongbin Wang, Yueling Wang, Xiaojun Xue, and Mingquan Zhang. "Distributed formation control for multiple quadrotor UAVs under Markovian switching topologies with partially unknown

45. Trimpe, Sebastian, Millane, Alexander, Doessegger, Simon., D'Andrea, Raffaello. "A self-tuning LQR approach demonstrated on an inverted pendulum", IFAC Proc. Vol, Vol. Vol. 47, No. 3, pp. 11281-11287, 2014.
46. Ashraf, F., Omid, Gh. and Tayfeh-Rezaie, B., "On the sum of signless Laplacian eigenvalues of a graph." Lin. Algebra. Appl. Vol. 438, No. 11, pp. 4539-4546, 2013.
43. Saif, M. "Optimal linear regulator pole-placement by weight selection." Int. J. Control, Vol. 50, No. 1, pp. 399-414, 1989.
44. Rahimi, M. R., Saeide Hajighasemi, and Davoud Sanaei. "Designing and simulation for vertical moving control of UAV system using PID, LQR and Fuzzy Logic." Int. J. Electr. Comput. Eng. Vol. 3, No. 5, pp. 651, 2013.