

علمی - پژوهشی

مطالعه پدیده پرش تصادفی در تیر غیرخطی یکسر گیردار مغروق

در آب تحت تحریک تصادفی باند باریک

محمد رضا الهامی^۲دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۶)

یویا سروی^۱دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه جامع امام حسین (ع)

چکیده

برای بسیاری از سازه‌های دریایی نظیر ستون‌ها و سازه‌های نفتی، پایانه و تکیه‌گاه دکل‌های نفتی و برج‌های احاطه‌شده توسط آب معمولاً از مدل یک تیر یا ستون یکسر گیردار استفاده می‌گردد. این مدل‌ها معمولاً تحت تحریک تصادفی قرار گرفته و دامنه پاسخ این سازه‌ها در حین طراحی از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. در این مقاله تیر غیرخطی یکسر گیردار مغروق در سیال، با یک جرم متمرکز تحت تحریک تصادفی باند باریک مورد مطالعه قرار گرفته است و پاسخ آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. با توسعه روش بالانس هارمونیک، واریانس پاسخ سیستم تصادفی تعیین و پدیده پرش و پرش تصادفی بررسی شده است. حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد، تحریک تصادفی باعث افزایش دامنه پاسخ تصادفی تیر نسبت به پاسخ معین در بین نقاط دوشاخگی می‌شود. با افزایش شدت تحریک تصادفی، پاسخ پایا از حالت چرخه‌ای مدور به حالت چرخه‌ای کشیده شده تغییر می‌یابد. همچنین نتایج نشان می‌دهند پدیده پرش تصادفی در ناحیه‌ای که سه جواب برای سیستم است، رخ می‌دهد. در پایان، نتایج تحلیلی و مدل‌سازی عددی بیانگر این است که تطابق بسیار خوبی بین داده‌ها و نتایج این دو روش وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: تیر غیرخطی، ارتعاشات غیرخطی، ارتعاشات تصادفی، تحریک تصادفی، پدیده پرش

The Study of the Stochastic Jump Phenomenon in a Nonlinear Cantilever Beam Immersed in Water Under Narrow-Band Random Excitation

P. Sarvi²Faculty of Engineering, Imam Hossein
Comprehensive UniversityM. R. Elhami¹Faculty of Engineering, Imam Hossein
Comprehensive University

(Received: 24/April/2021; Accepted: 17/July/2021)

ABSTRACT

For the modelling of marine structures, such as the oil columns and structures, the terminal and base of oil platforms and the towers surrounded by water usually a cantilever beam or rod is used. These models are subjected to random excitation and the response amplitude of these structures is of particular importance during design. In this paper, a nonlinear cantilever beam immersed in a fluid with a concentrated mass under a narrow band random excitation has been studied and its response has been analyzed. With the development of the harmonic balance method, the variance of the random system response has been determined and the phenomenon of jumping and random jumping has been investigated. The analytical solution and the numerical simulations show that in comparison with the deterministic response, the random excitation increases the amplitude of the random response between the bifurcation points of the beam. As the intensity of the random excitation increases, the steady response changes from a circular to a cyclic state. The results also show that the random jump phenomenon occurs in the area where there are three states for the system. Finally, the results of analytical and numerical modeling indicate that there is a very good agreement between the data and the results of these two methods.

Keywords: Nonlinear Beam, Nonlinear Vibrations, Random Vibrations, Random Excitation, Jump Phenomenon

۱- کارشناس ارشد: p.sarvi.ihu@gmail.cpm

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): melhami@ihu.ac.ir

۱- مقدمه

در تحلیل متداول ارتعاشات معادلات حاکم بر سیستم را به صورت خطی تحت تحریک معین در نظر می‌گیرند؛ اما در واقعیت، رفتار دینامیکی و ارتعاشی بیشتر سیستم‌ها به صورت غیرخطی تحت تحریک تصادفی می‌باشد. پدیده‌هایی در سیستم‌های غیرخطی تحت تحریک تصادفی رخ می‌دهد که در سیستم‌های خطی با تحریک هارمونیک قابل مشاهده نیست. یکی از سیستم‌های غیرخطی رایج که به دلیل کاربردهای فراوان مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است، تیر یکسر گیردار می‌باشد. تیر یکسر گیردار تحت تحریک تصادفی گسترده مانند نیروهای باد و موج در مدل‌سازی ساختمان‌های بلند، برج‌ها، اجزاء ماشین‌آلات، پایه‌های بارگیری نفت، پایه‌های پل‌ها، هواپیما، فضاپیما و غیره، کاربرد زیادی دارد.

بسیاری از محققین به بررسی پاسخ تیر غیرخطی تحت تحریک معین پرداخته‌اند. داسیلوا^۱ و گلین^۲ [۱ و ۲] رابطه دیفرانسیلی جزئی تیر غیرخطی یکسر گیردار سه بعدی تحت تحریک گسترده را با روش اصل همیلتون استخراج کردند. همچنین آن‌ها تأثیر ترم‌های غیرخطی بر رفتار تیر یکسر گیردار را تحت بار گسترده سینوسی تعیین نمودند. زاودنی^۳ و نایفه^۴ [۳] رابطه دیفرانسیلی جزئی تیر غیرخطی یکسر گیردار با جرم متمرکز را به تئوری اویلر-برنولی^۵ به دست آوردند. همچنین آن‌ها پاسخ رابطه حاکم بر تیر تحت تحریک پارامتری (تحریک محوری) را با روش تحلیلی تعیین و با روش آزمایشگاهی مقایسه کردند. نتایج به دست آمده تطابق خوبی داشتند. علت فرض تحریک محوری محدودیت در انجام آزمون تجربی می‌باشد. نایفه و پی^۶ [۴] پاسخ غیرخطی تیر یکسر گیردار را تحت تحریک پارامتری با استفاده از روش مقیاس زمانی^۷ و روش گلرکین^۸ مطالعه نمودند. آن‌ها نشان دادند جمله غیرخطی هندسی تأثیر سخت‌شوندگی و جمله غیرخطی اینرسی تأثیر نرم

شوندگی در رفتار تیر دارد. الکاسیا^۹ و همکاران [۵] پاسخ حالت پایای تیر باریک مغروق با جرم متمرکز تحت تحریک معین را مطالعه کردند. پاسخ فرکانسی حالت پایا را در دو مود اول اصلی با استفاده از روش بالانس هارمونیک^{۱۰} تعیین نمودند. همچنین الکاسیا و هم‌دان^{۱۱} [۶] علاوه بر کارهای انجام شده در مرجع [۵] به پدیده‌های پرش^{۱۲} و دوشاخگی^{۱۳} پرداختند. دلگادو^{۱۴} [۷] یک تیر یکسر گیردار بسیار منعطف را با استفاده از روش باقیمانده وزنی، فرآیند گلرکین همراه با روش نیومارک^{۱۵} و یک فرایند تکرار موردبررسی قرارداد. مطلبی و همکاران [۸] با استفاده از روش بالانس هارمونیک به تجزیه و تحلیل پدیده‌های پرش و دوشاخگی بر روی یک تیر غیرخطی هندسی یکسر گیردار پرداختند.

تعداد محدودی از کارهای انجام گرفته در چند دهه اخیر به ارتعاشات غیرخطی تحت تحریک تصادفی باند باریک پرداخته‌اند. نیروهای دینامیکی از قبیل باد، آب و ... اگر شامل طیف محدودی از فرکانس‌ها باشند، می‌توان تحریک تصادفی ایجاد شده را، باند باریک فرض نمود. مطالعات انجام گرفته در این زمینه توسط محققین به تجزیه و تحلیل معادلات نوسانی کلاسیک مانند معادلات دافینگ^{۱۶}، دافینگ-ریلی^{۱۷} و وندرپول-دافینگ^{۱۸} تحت ترکیب تحریک معین و تصادفی با استفاده از روش‌های تقریبی پرداخته‌اند [۹-۱۴]. هوو^{۱۹} و همکاران [۱۵] و ژو^{۲۰} و گو^{۲۱} [۱۶] با بسط مبتکرانه روش بالانس هارمونیک توانستند پاسخ رابطه کلاسیک دافینگ را تحت تحریک تصادفی باند باریک تعیین کنند. مقالات کمی به مطالعه تیر غیرخطی تحت تحریک تصادفی باند باریک^{۲۲} با فرض تمامی ترم‌های غیرخطی

⁹ Al-Qaisia¹⁰ Harmonic balance¹¹ Hamdan¹² Jump¹³ Bifurcation¹⁴ Delgado¹⁵ Newmark technique¹⁶ Duffing¹⁷ Duffing-Rayleigh¹⁸ Van der Pol-Duffing¹⁹ HAIWU²⁰ Zhu²¹ Guo¹ Da Silva² Glynn³ Zavodney⁴ Nayfeh⁵ Euler-Bernoulli⁶ Pai⁷ Multiple scales⁸ Galerkin procedure

سختی را تحلیل نماید. مسئله مهم این روش بالانس ورودی و استهلاک انرژی همیلتونی نوسانگر می‌باشد.

تاکنون تأثیر ترکیب تحریک تصادفی با تحریک معین بر روی تیر غیرخطی یکسرگیردار مغروق در آب با جرم متمرکز بررسی نشده است و یک خلأ پژوهشی بزرگ در این زمینه وجود دارد که این مقاله در تلاش برای پژوهش در این زمینه می‌باشد. اساس مدل مورد مطالعه که تیر غیرخطی مغروق در آب با جرم متمرکز است، در مرجع [۵] با فرض تحریک معین (گسترده) ارائه گردیده. در این مقاله، با اضافه کردن تحریک تصادفی (گسترده) و ترکیب با تحریک معین (گسترده) به بررسی پدیده‌های غیرخطی تصادفی پرداخته می‌شود. مقالات بررسی شده نشان می‌دهد محور اصلی تحریک تصادفی در تیر غیرخطی مطالعه شده، تحریک تصادفی محوری (پارامتری) باند باریک بوده است. همچنین در پژوهش‌های منتشرشده در دو دهه اخیر، از روش تقریبی مقیاس زمانی برای تعیین پاسخ تیر غیرخطی تحت تحریک تصادفی استفاده شده است. در این تحقیق برای اولین بار با توسعه روش بالانس هارمونیک، پاسخ تیر غیرخطی تحت ترکیب تحریک معین و تحریک تصادفی تعیین می‌گردد.

برخلاف کارهای انجام گرفته بر روی تیر غیرخطی تحت تحریک تصادفی در دهه‌های گذشته که فقط توانسته‌اند پدیده پرش تصادفی به بالا را بررسی کنند، در این پژوهش پدیده پرش تصادفی که شامل پرش‌های تصادفی به بالا و پایین می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم بر حرکت و حل تحلیلی آن

تیر یکسر گیردار مورد مطالعه که غیرخطی بودن آن ناشی از هندسه تیر است در شکل ۱ به نمایش درآمده است. عمق سیال با l_1 و جرم متمرکز با M که در فاصله d از انتهای تیر قرار دارد، نشان داده شده‌اند. هدف از طراحی و ساخت ستون‌ها، دکل‌ها و سازه‌های مغروق در آب تحمل بار ناشی از جرم متمرکز است بنابراین، به منظور انطباق مدل مورد مطالعه با واقعیت تیر مغروق با در نظر گرفتن جرم متمرکز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ضخامت تیر در مقایسه با طول آن بسیار نازک فرض شده، بنابراین، از تغییرشکل

پرداخته‌اند. فنگ و همکاران [۱۷ و ۱۸] با استفاده از رابطه دیفرانسیلی-انتگرالی به دست آمده از مرجع [۱] تحریک تصادفی پارامتری باند باریک را مورد بررسی قرار دادند. همچنین فنگ و همکاران [۱۹] رابطه غیرخطی حرکت تیر یکسر گیردار با یک جرم متمرکز تحت تحریک تصادفی پارامتری باند باریک که شبیه مدل مرجع [۳] است را با استفاده از حل تقریبی و شبیه‌سازی عددی تجزیه و تحلیل کردند. نتایج به دست آمده از مجموع سری مقالات آن‌ها نشان داد پدیده‌های پرش و دوشاخگی تصادفی در موده‌های نوسانی اصلی اول و دوم اساساً در ناحیه‌ای که دارای پاسخ سه‌گانه است، رخ می‌دهد. گن جی و زه پنگ لی ۲۰۱۶ [۲۰] یک روش میانگین‌گیری تصادفی اصلاح شده برای یک نوسانگر یک درجه آزادی تحت تحریک نویز سفید با ترم غیرخطی قوی پیشنهاد داده‌اند. روش اصلاح شده می‌تواند بیان تقریبی مختصرتری ضرایب رانش و انتشار را بدون تضعیف دقت پیش‌بینی پاسخ‌های سیستم‌ها با دادن یک فرکانس متوسط از قبل ارائه دهد. گن جی و وانگ کای ین ۲۰۱۸ [۲۱] یک مدل تیر یکسر گیردار کششی باریک تحریک شده با ممان پایه‌ای عرضی در شکل نویز سفید گوسی مورد مطالعه قرار دادند. هدف این مقاله تحقیق درباره تأثیر غیرخطی بودن هندسه بر پاسخ‌های مدل تحریک شده توسط نویز سفید گوسی می‌باشد. مباحث غیرخطی بودن انحنا و اینرسی نیز در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. گن جی و جه بو ۲۰۱۸ [۲۲] یک تیر یکسر گیردار با ترک سطح باز با تحریک حرکت پایه با نویز سفید گوسی را مدل‌سازی کرده‌اند. ترک باز با یک لولای الاستیک ساده‌سازی شده و توابع مودال یک تیر ترک‌دار به دست آمده است؛ و برای تجزیه و تحلیل نظری پاسخ‌های تیر یکسر گیردار، از هر دو روش میانگین سازی تصادفی شبه پایستار و روش میانگین سازی تصادفی با پوشه بهبود یافته انرژی، که برای تحلیل غیرخطی مؤثر است، استفاده شده است. گن جی و جیه لیو [۲۳] در این مقاله، به طور مفصل یک روش میانگین‌گیری تصادفی جدید را ارائه نمودند که با روش‌های معمول میانگین سازی تصادفی که معمولاً با نوسانگرهای برانگیخته تصادفی بدون جرم وابسته به مختصات هستند، متفاوت بوده و می‌تواند نوسانگرهای غیرخطی را با دو نوع جرم غیرخطی وابسته به مختصات و ترم‌های غیرخطی

$$w = w' = 0 \text{ at } s = 0 \tag{۲}$$

$$w = w' = 0 \text{ at } s = l$$

بر اساس روش گلرکین رابطه دیفرانسیلی معمولی که فقط وابسته به زمان است با استفاده از شکل مود اول خطی تیر یکسرگیردار به دست آورده می‌شود. در واقعیت شکل مود تیر غیرخطی است اما به دلیل آنکه ترم‌های غیرخطی رابطه حاکم بر ارتعاشات تیر ضعیف فرض شده است می‌توان از شکل مود خطی برای استخراج رابطه دیفرانسیلی معمولی استفاده نمود.

$$w(\zeta, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i(\zeta) q_i(t) \tag{۳}$$

که $q_i(t)$ مختصات تعمیم یافته سیستم و $\phi_i(\zeta)$ شکل مود- i ام تیر یکسر گیردار است که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\phi_i(\zeta) = \cos \beta_i \zeta - \cosh \beta_i \zeta$$

$$-\left(\frac{\cos \zeta_i l + \cosh \beta_i l}{\sin \zeta_i l + \sinh \beta_i l} \right) (\sin \beta_i \zeta - \sinh \beta_i \zeta) \tag{۴}$$

β ریشه‌های رابطه فرکانسی $1 + \cos \beta \cdot \cos \beta = 0$ هستند که چهار ریشه اول رابطه در جدول ۱ آورده شده‌اند.

جدول (۱): ریشه‌های رابطه فرکانسی تیر یکسر گیردار

مود	۱	۲	۳	۴
β	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۴۱	۷/۸۵۴۸	۱۰/۹۹۵۴

روشن است که تابع تحریک $H(\zeta, t)$ نیز بر اساس شکل مود تیر بسط داده می‌شود:

$$H(\zeta, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i(\zeta) h(t) \tag{۵}$$

فرض شده است که تیر تحت ترکیب تحریک هارمونیک و تصادفی ایجاد تحریک تصادفی باند باریک ($h(t)$) می‌کند [۱۵].

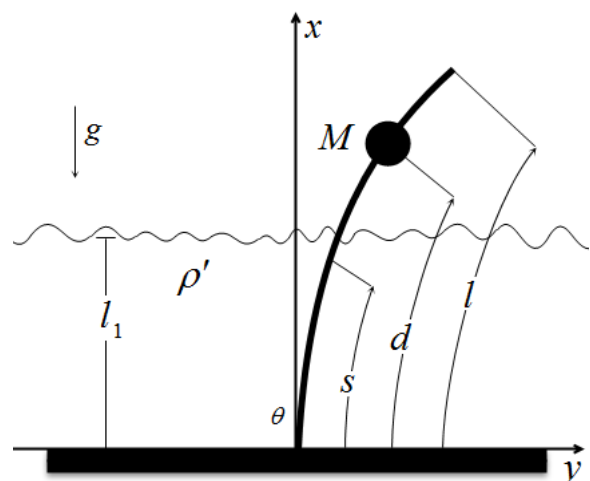
$$h(t) = F_0 \cos(\bar{\Omega}t) + \varepsilon_4 \xi(t) \tag{۶}$$

برشی و اینرسی پیچشی تیر می‌توان صرف نظر کرد. با فرضیات انجام شده، رابطه حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر غیرخطی یکسرگیردار با جرم متمرکز تحت تحریک گسترده به صورت رابطه (۱) قابل بازنویسی است [۱-۳ و ۵].

$$m \ddot{w} + M \delta(s-d) \ddot{w} + EI w'''' + c \dot{w} = H(\zeta, t) - EI \int_0^s \rho' \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} d\zeta - \frac{1}{2} m \int_0^s \rho' \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} d\zeta \tag{۱}$$

که $W(\zeta, t)$ نشان دهنده جابه‌جایی عرضی تیر، $\zeta = s/l$ طول قوس بی‌بعد تیر، m جرم تیر، M جرم متمرکز بر روی تیر در نقطه $\eta = d/l$ ، δ تابع تغییرات دیراک، EI سختی خمشی تیر و $H(\zeta, t)$ تحریک تصادفی خارجی است. c ضریب میرایی می‌باشد که باعث پایداری پاسخ خواهد شد. همچنین برای در نظر گرفتن اثرات بین سازه و آب با جرم مخصوص ρ' ، میرایی از نوع ویسکوزیته فرض شده است.

در رابطه (۱) نماد ($'$) مشتق نسب به مکان (ζ) و نماد ($\dot{}$) مشتق نسبت به زمان (t) می‌باشد. در شکل ۱ ρ' جرم مخصوص سیال را نشان می‌دهد [۵].



شکل (۱): تیر یکسر گیردار با جرم متمرکز تحت تحریک تصادفی باند باریک

شرایط مرزی تیر یکسرگیردار به صورت زیر می‌باشد:

$$\alpha_1 = \int_0^1 \phi^2 d\zeta \quad (9)$$

$$+ C_m k_m \int_0^{\zeta_1} \phi^2 d\zeta + \mu \phi^2$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 \phi''^2 d\zeta - g_0 \int_0^1 \left(\int_0^{\zeta} \phi'^2 d\chi \right) d\zeta \quad (10)$$

$$- g_0 \mu \int_0^{\eta} \phi'^2 d\zeta$$

$$\alpha_3 = \int_0^1 \left(\int_0^{\zeta} \phi'^2 d\chi \right)^2 d\zeta \quad (11)$$

$$+ C_m k_m \int_0^{\zeta_1} \left(\int_0^{\zeta} \phi'^2 d\chi \right)^2 d\zeta$$

$$+ \mu \left[\int_0^{\zeta} \phi'^2 d\chi \right]_{\zeta=\eta}$$

$$\alpha_4 = \int_0^1 \phi'^2 \phi''^2 d\zeta \quad (12)$$

$$\alpha_5 = \int_{\zeta_1}^1 \phi(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

که $\zeta_1 = l_1/l$ ، همچنین $C_m = 1$ ضریب اینرسی جرم در داخل سیال و $K_m = \rho' C_m$ ، $\mu = M/mAl$ در نظر گرفته شده است.

جدول (۲): ضرایب عددی رابطه (۷)

ω_0^2	c	ε_1	ε_2	ε_3	p
۱	۰/۰۲	۰/۰۴۴۹۳	۰/۹۳۲۹۵	۰/۱	۰/۲

ابتدا پاسخ سیستم در حالتی که از تحریک تصادفی صرف نظر شده است تعیین می‌شود. برای حل رابطه غیرخطی حاکم بر سیستم، فرض می‌گردد اختلاف‌فازی در تحریک معین وجود دارد [۲۴]؛ بنابراین، می‌توان رابطه ارتعاشی برای یک سیستم میرا را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) + c \dot{q}(t) + \varepsilon_1 q^2(t) \ddot{q}(t) + \varepsilon_1 q(t) \dot{q}^2(t) + \varepsilon_2 q^3(t) = \varepsilon_3 P \cos(\Omega t + \gamma) = \varepsilon_3 (a_1 \cos \Omega t - a_2 \sin \Omega t) \quad (14)$$

a_1 و a_2 دامنه‌های تحریک معادل می‌باشند. فرض می‌شود دامنه تحریک به صورت $p = (a_1^2 - a_2^2)^{1/2}$ برقرار است

[۲۴]. به عنوان تقریب اول، پاسخ زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q_1 = a_0 \cos(\Omega t) \quad (15)$$

که ε_4 یک پارامتر کوچک ($\varepsilon_4 \ll 1$) فرض می‌گردد [۱۵]. با این فرض، $\varepsilon_4 \xi(t)$ یک نویز تصادفی خواهد بود که با ترکیب تحریک هارمونیک، ایجاد تحریک تصادفی با پهنای باند باریک می‌کند. در صورتی که ε_4 بزرگ‌تر از یک فرض گردد، $\varepsilon_4 \xi(t)$ تحریک تصادفی با پهنای باند عریض^۱ نتیجه خواهد شد. در رابطه فوق، $\xi(t)$ یک فرآیند تصادفی با میانگین صفر و تابع چگالی طیفی $s(\omega)$ و F_0 دامنه تحریک معین و $\bar{\Omega}$ فرکانس تحریک است.

برای بی‌بعد سازی زمان و دامنه پاسخ، فرضیات $\tau = \gamma(\alpha_2/\alpha_1)^{1/2}$ و $\Omega = \frac{\bar{\Omega}}{\gamma(\alpha_2/\alpha_1)^{1/2}}$ در نظر گرفته شده است. که $\gamma^2 = EI/\rho A l^3$ پارامتر فرکانس خطی^۲ و $g_0 = \rho A l^3 g/EI$ پارامتر گرانشی بی‌بعد^۳ است.

با جای‌گذاری معادلات (۳) و (۵) در رابطه (۱) و اعمال اصل تعامد مدها، رابطه حاکم بر سیستم به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) + c \dot{q}(t) + \varepsilon_1 q^2(t) \ddot{q}(t) + \varepsilon_1 q(t) \dot{q}^2(t) + \varepsilon_2 q^3(t) = \varepsilon_3 P \cos(\Omega t) + \varepsilon_4 \xi(t) \quad (7)$$

ضرایب رابطه (۷) از روابط رابطه (۸) قابل محاسبه است، جدول ۲ مقادیر عددی ضرایب رابطه (۷) را نشان می‌دهد [۵]. در این پژوهش با اضافه کردن تحریک تصادفی به رابطه معین تیر غیرخطی مغروق در آب آگاسیا [۵] اثرات تحریک تصادفی با تحریک معین مقایسه می‌شود.

$$\varepsilon_1 = \alpha_3/p^2 \alpha_1$$

$$\varepsilon_2 = 2\alpha_4/p^2 \alpha_2 \quad (8)$$

$$\varepsilon_3 = p\alpha_5/\alpha_2, P = \frac{F_0}{mAl^2 \gamma^2}$$

ضرایب α_1 تا α_5 در روابط (۹) تا (۱۳) تعریف می‌شوند.

¹ Wide-band excitation

² Linear frequency parameter

³ Dimensionless gravity parameter

ترم‌هایی می‌شود که تابعی از نیرو نیستند؛ بنابراین، این مرحله از حل، شبیه روش میانگین‌گیری برای سیستم‌های معین است. مرحله دوم از حل به صورت تقریبی است و شامل ترم‌هایی می‌شود که تابعی از نیرو با فرآیند پهنای باند پهن یا اغتشاش سفید می‌باشد. این به نوبه خود، نشان می‌دهد که رابطه دیفرانسیل تقریبی برای فرآیند پاسخ، یک رابطه دیفرانسیل تصادفی از نوع آیتو است [۲۵]. رابطه خطی شده (۱۹) تحت تحریک تصادفی را با به کارگیری روش میانگین‌گیری تصادفی می‌توان تحلیل نمود. برای این منظور تبدیل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} Y &= A(t)\cos\Phi \\ \dot{Y} &= \dot{A}(t)\cos\Phi - A(t)\omega_0\sin\Phi \\ &\quad - A(t)\dot{\varphi}(t)\sin\Phi \\ \Phi &= \omega_0 t + \varphi(t) \end{aligned} \quad (20)$$

که $A(t)$ و $\varphi(t)$ به ترتیب دامنه تصادفی و فاز تصادفی می‌باشند. می‌توان رابطه (۱۹) را به صورت زیر بازنویسی کرد [۱۵]:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{\omega_0} \left(-c A \omega_0 \sin\Phi + 3a_0^2 \varepsilon_2 \cos^2(\Omega t) A \cos\Phi \right) \sin\Phi \\ &\quad - \frac{\varepsilon_4}{\omega_0} \sin\Phi \xi(t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{A\omega_0} \left(-c A \omega_0 \sin\Phi + 3a_0^2 \varepsilon_2 \cos^2(\Omega t) A \cos\Phi \right) \cos\Phi \\ &\quad - \frac{\varepsilon_4}{A\omega_0} \cos\Phi \xi(t) \end{aligned}$$

با اعمال روش میانگین‌گیری تصادفی بر روی رابطه (۲۱) رابطه آیتو^۱ به صورت رابطه (۲۲) نتیجه می‌شود [۲۶]:

$$\begin{aligned} dA &= \left[-\frac{cA}{2} + \frac{\pi s(\omega_0)}{2A\omega_0^2} \right] dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi s(\omega_0)}}{\omega_0} \varepsilon_4 dw_1(t) \\ d\varphi &= \frac{3a_0^2}{4\omega_0} \varepsilon_2 dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi s(\omega_0)}}{A\omega_0} \varepsilon_4 dw_2(t) \end{aligned} \quad (22)$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۵) در داخل رابطه (۱۴) و صرف‌نظر از جملات شامل $\cos(3\Omega t)$ ، پاسخ فرکانسی تیر یکسر گیردار به صورت رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2) a_0 + \left(\frac{3}{4} \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \Omega^2 \right) a_0^3 \right]^2 \\ + (a_0 c \Omega)^2 = \varepsilon_3^2 P^2 \end{aligned} \quad (16)$$

رابطه (۱۶) پاسخ فرکانسی حاصل از حل تحلیلی روش بالانس هارمونیک می‌باشد که در آن پارامتر زمان (t) از پاسخ تحلیلی حذف شده است. این رابطه مطالعه پدیده پرش را میسر می‌سازد در صورتی که برای بررسی پاسخ زمانی و منحنی فاز محدودیت داشته و قابل استفاده نمی‌باشد.

در ادامه، پاسخ رابطه (۷) با در نظر گرفتن تأثیر تحریک تصادفی مطالعه می‌گردد. بدین منظور فرض رابطه (۱۷) در ادامه محاسبات در نظر گرفته می‌شود:

$$q = q_1 + Y = a_0 \cos(\Omega t) + Y \quad (17)$$

که Y یک ترم تصادفی است. با جای‌گذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۷) و صرف‌نظر از ترم‌های مربوط به تیر غیرخطی، رابطه زیر نتیجه می‌گردد:

$$\begin{aligned} -a_0 \Omega^2 \cos(\Omega t) + \ddot{Y} + \omega_0^2 (a_0 \cos(\Omega t) + Y) \\ + c \dot{Y} - c a_0 \Omega \sin(\Omega t) - \varepsilon_1 a_0^3 \Omega^2 \cos^3(\Omega t) \\ - 2\varepsilon_1 a_0^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) \\ - \varepsilon_1 a_0^3 \Omega^2 \cos(\Omega t) \sin^2(\Omega t) \\ - 2\varepsilon_1 a_0^2 \Omega \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \dot{Y} \\ - \varepsilon_1 a_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t) Y \\ + \varepsilon_2 a_0^3 \cos^3(\Omega t) + 3\varepsilon_2 a_0^2 \cos^2(\Omega t) Y \\ = \varepsilon_3 P \cos(\Omega t) + \varepsilon_4 \xi(t) \end{aligned} \quad (18)$$

با ضرب $P \cos(\Omega t)$ به رابطه (۱۸) و انتگرال‌گیری در بازه صفر تا یک، رابطه خطی شده تیر یکسرگیردار تحت تحریک تصادفی به صورت زیر نتیجه شده است:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + c \dot{Y} + (\omega_0^2 + 3\varepsilon_2 a_0^2 \cos^2(\Omega t)) Y \\ = \varepsilon_4 \xi(t) \end{aligned} \quad (19)$$

روش میانگین‌گیری تصادفی یک روش تقریبی برای حل معادلات یک درجه آزادی و چند درجه آزادی غیرخطی تحت تحریک تصادفی است. در حالت کلی این روش شامل دو مرحله است، در مرحله اول، میانگین‌گیری، شامل

¹ Ito

که σ انحراف معیار پاسخ و $E[\]$ میانگین داخل کروشه است. با جای‌گذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۲۸) نتیجه به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E \left[\dot{\xi}_0^2 \cos^2(\Omega t) + A(t)^2 \cos^2 \Phi \dot{\xi}_0 \right] \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \frac{\pi s(\omega_0)}{c \omega_0^2} \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۲۹) می‌توان دامنه پاسخ تحلیلی تحریک تصادفی نسبت به فرکانس تحریک را محاسبه نمود؛ که در آن، a_0 پاسخ رابطه غیرخطی تیر یکسر گیردار تحت تحریک معین است و از رابطه (۱۶) قابل محاسبه می‌باشد.

۳- شبیه‌سازی عددی

در این مقاله چگالی طیفی مربوط به $\xi(t)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$s(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} s_0, & 0 < \omega \leq 2\omega_0 \\ 0, & \omega > 2\omega_0 \end{cases} \quad (30)$$

برای مدل‌سازی عددی از یک سیگنال تصادفی استفاده می‌شود. این سیگنال در رابطه (۳۱) با $\xi(t)$ نمایش داده شده است [۱۹]:

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{4\omega_0 s_0}{N}} \sum_{k=1}^N \cos \left(\frac{\omega_0}{N} (2k-1)t + \lambda_k \right) \quad (31)$$

که λ_k توزیعی است غیر وابسته در بازه $[0, 2\pi)$. عدد صحیح N در مدل‌سازی عددی برابر با ۱۰۰۰ فرض شده است؛ زیرا سیگنال تصادفی مربوطه در این عدد با حل تحلیلی همگرا می‌گردد. در شکل ۲ پاسخ معین تیر غیرخطی تحت تحریک هارمونیک با استفاده از نرم‌افزار میپل^۴ نشان داده شده است. با رسم رابطه (۱۶) منحنی پرش شکل ۲ حاصل می‌شود. با توجه به اینکه رابطه (۱۶) یک رابطه ضمنی است در نتیجه برای رسم این رابطه به فرکانس تحریک عدد داده می‌شود و دامنه پاسخ محاسبه می‌گردد. به طوری که در نواحی (I) و (III) سیستم رابطه غیرخطی بر اساس رابطه (۱۶) دارای

$s(\omega_0)$ تابع چگالی طیفی تحریک تصادفی است.

در ادامه با انجام محاسبات به استخراج تابع چگالی طیفی پرداخته می‌شود. W_1 و W_2 دو واحد مستقل فرایند وینر^۱ هستند.

واضح است که $A(t)$ حالت پایای چگالی احتمال، یک فرآیند مارکوف^۲ است و در رابطه حاکم FPK [۲۶] مشتق تابع چگالی طیفی نسبت به زمان صفر خواهد شد، در نتیجه رابطه حاکم FPK به صورت زیر ساده می‌گردد [۲۶].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} \left[\left\{ \frac{A}{2} - \frac{\pi s(\omega_0)}{2A\omega_0^2} \right\} w \right] \\ + \frac{\pi s(\omega_0)}{2\omega_0^2} \frac{d^2 w}{dA^2} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

حاصل انتگرال‌گیری از رابطه (۲۳) نسبت به A به صورت رابطه (۲۴) است:

$$\left\{ \frac{A}{2} - \frac{\pi s(\omega_0)}{2A\omega_0^2} \right\} w + \frac{\pi s(\omega_0)}{2\omega_0^2} \frac{dw}{dA} = 0 \quad (24)$$

پاسخ رابطه (۲۴) را به راحتی می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:

$$w(A) = r_1 \exp \left[\frac{A}{\pi s(\omega_0)} + \frac{1}{A} \right] \quad (25)$$

که r_1 ثابت نرمال است. در نهایت تابع چگالی طیفی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_0^2} \exp \left[-\frac{A^2}{2\sigma_0^2} \right] \quad (26)$$

که

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi s(\omega_0)}{c \omega_0^2} \quad (27)$$

واریانس پاسخ σ^2 با رابطه زیر قابل محاسبه است [۲۷]:

$$\sigma^2 = E \left[\xi(t)^2 \right] - \left(E \left[\xi(t) \right] \right)^2 \quad (28)$$

¹ Winner

² Markov

⁴ Fokker-Planck-Kolmogorov equation

⁴ Maple

از رابطه (۲۴) از نرم‌افزار میپل کمک گرفته شده است. نرم‌افزار برای به‌دست آوردن واریانس پاسخ به فرکانس تحریک عدد می‌دهد. به‌نحوی که در ناحیه (I) و (III) رابطه (۲۹) دارای یک شاخه واریانس پاسخ و در ناحیه (II) دارای سه‌شاخه واریانس پاسخ است. حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهند در بین دونقطه دوشاخگی Ω_1 و Ω_2 در ناحیه (II) که سیستم (۷) دارای پاسخ سه‌گانه است، پدیده پرش تصادفی رخ می‌دهد.

در ناحیه (II) شکل ۳ که سیستم دارای سه‌شاخه پاسخ است، بیشترین و کمترین شاخه‌های پاسخ (شاخه‌هایی که با خط ممتد رسم شده‌اند)، پایدار و تحقق‌پذیر هستند. شاخه پاسخ میانی که با خط چین نمایش داده شده است، پاسخ ناپایدار سیستم (۷) را نشان می‌دهد [۱۵]. همچنین پدیده‌های پرش به پایین و بالا، بین دوشاخه پایدار ناحیه (II) با یکدیگر عوض می‌شوند. با مقایسه و مطالعه شکل‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود، تحریک تصادفی در نقاط دوشاخگی واریانس پاسخ تیر تأثیرگذار نیست. هر دو پدیده پرش و پرش تصادفی در بین دونقطه فرکانس تحریک $\Omega = 1/145$ و $\Omega = 1/114$ رخ می‌دهند.

برای صحت‌سنجی نتایج از شبیه‌سازی عددی رانگ کوتای مرتبه چهار به کمک نرم‌افزار میپل استفاده می‌شود. برای به‌دست آوردن واریانس پاسخ در هر نقطه از فرکانس تحریک مقدار N در رابطه (۳۱) برابر با ۱۰۰۰ فرض شده است؛ بنابراین، در شبیه‌سازی عددی برای هر فرکانس تحریک، ۱۰۰۰ دامنه پاسخ خواهد داشت. واریانس پاسخ‌ها به ازای فرکانس تحریک یک نقطه از حل عددی را در شکل (۳) نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۳) ملاحظه می‌گردد تطابق خوبی بین حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی وجود دارد. اگر $s(\omega_0) = 0/0025$ فرض شود نتایج عددی رابطه (۷) به صورت شکل‌های (۳-۵) خواهد بود.

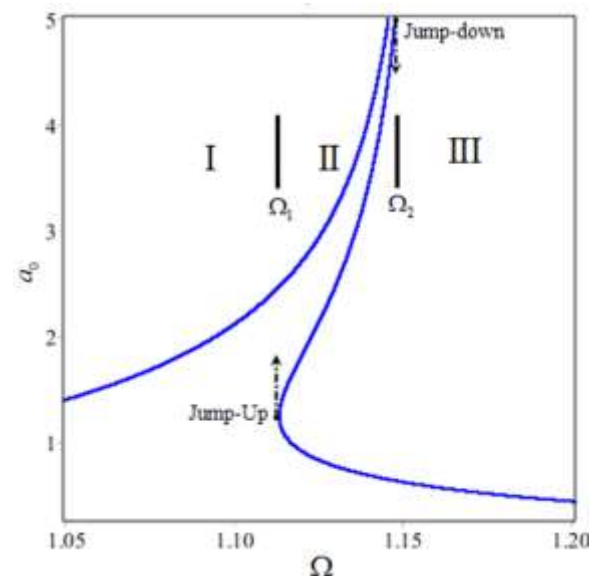
در شکل ۲ دامنه پاسخ معین در فرکانس تحریک Ω_2 که پدیده پرش به پایین رخ می‌دهد، برابر با ۵ و در شکل ۳ دامنه پاسخ تصادفی تیر در همان فرکانس تحریک Ω_2 برابر با ۵/۴۷ می‌باشد. به عبارتی، دامنه پاسخ در محدوده پاسخ

پاسخ یگانه و در ناحیه (II) دارای پاسخ سه‌گانه می‌باشد. پدیده پرش در ناحیه (II) که دارای پاسخ سه‌گانه برای تیر غیرخطی است، رخ می‌دهد. همان‌طور که مشخص است در سیستم‌های غیرخطی فرکانس طبیعی معنی ندارد و پدیده غیرخطی پرش رخ می‌دهد.

روش بالانس هارمونیک پهنای وسیعی از فرکانس‌های تحریک را پوشش می‌دهد؛ بنابراین با استفاده از این روش حل تحلیلی، پدیده‌های پرش به بالا و پرش به پایین در یک منحنی پاسخ فرکانسی، قابل مشاهده می‌باشند.

در منحنی شکل ۲، با افزایش فرکانس تحریک در نقطه Ω_2 پدیده پرش به سمت پایین و بالعکس، با کاهش فرکانس در نقطه Ω_1 پدیده پرش به سمت بالا رخ می‌دهد.

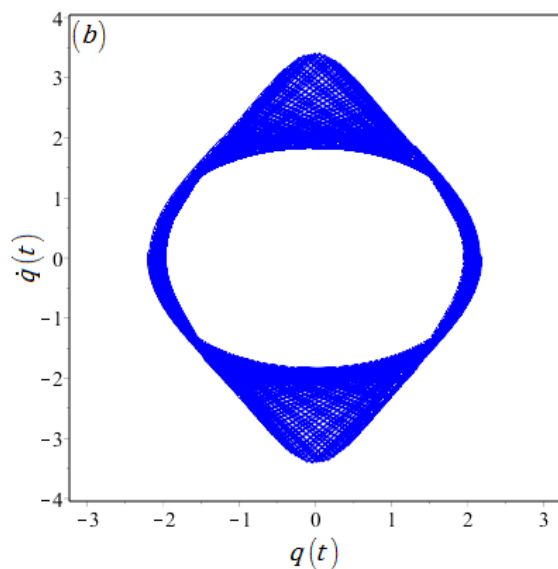
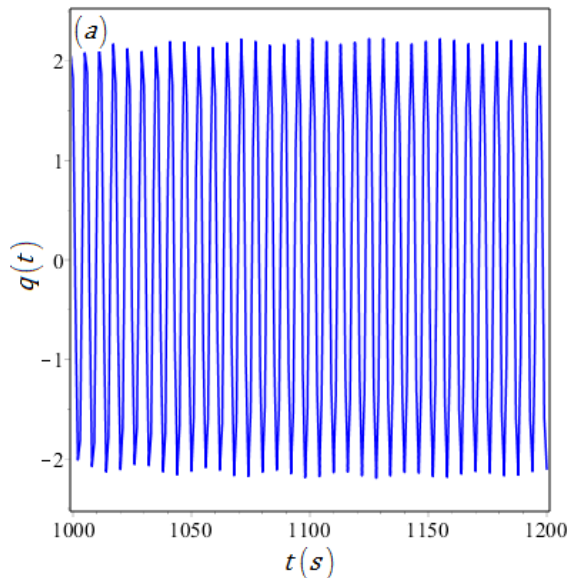
پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی یکسر گیردار در مود اول سخت شونده است [۴]. در شکل ۲، منحنی پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی در مود اول متمایل به سمت راست می‌باشد، بنابراین، نوع پرش از نوع سخت شونده خواهد بود.



شکل (۲): نمودار پاسخ فرکانسی معین تیر غیرخطی تحت تحریک هارمونیک مربوط به رابطه (۱۶)

واریانس پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی یکسر گیردار تحت تحریک تصادفی باند باریک در شکل ۳ نشان داده شده است. در این شکل، پاسخ‌های پایدار حل تحلیلی با شبیه‌سازی عددی مقایسه شده است. برای به‌دست آوردن پاسخ تحلیلی

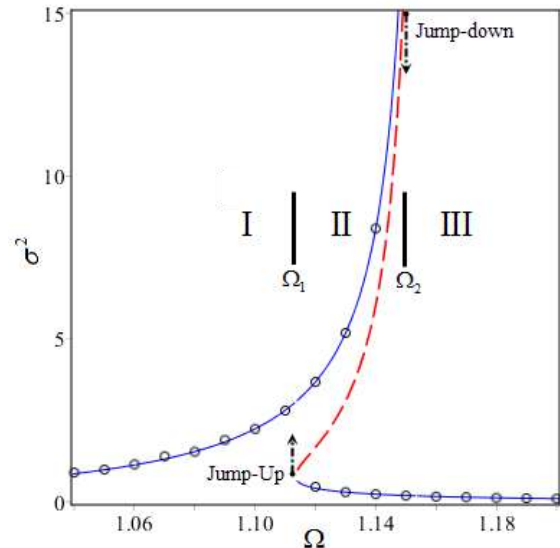
بنابراین، شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد افزایش تحریک تصادفی باعث تغییر پاسخ پایدار از حالت سیکل حدی^۱ به حالت چرخه‌ای کشیده شده^۲ می‌گردد. به بیان دیگر، پاسخ تیر با افزایش شدت تحریک تصادفی در عرض کشیده‌تر می‌شود و شکل ظاهری منحنی فاز از حالت دایره‌ای به حالت بیضوی تبدیل می‌شود.



شکل (۴): نتایج عددی حاصل از رابطه (۷)

(a) پاسخ زمانی، (b) منحنی فاز
 $q(0)=1, \dot{q}(0)=1/5, P=0.2$

سه‌گانه کشیده می‌شود؛ بنابراین، از حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی می‌توان نتیجه گرفت که تحریک تصادفی باند باریک باعث افزایش دامنه پاسخ تیر غیرخطی شده است.



شکل (۳): واریانس پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی یکسر گیردار تحت تحریک تصادفی باند باریک مربوط به رابطه (۲۹)
 پاسخ پایدار —، پاسخ ناپایدار - - -، حل عددی ۰۰۰

در شکل‌های ۴ و ۵ پاسخ زمانی و منحنی فاز مربوط به سیستم (۷) در فرکانس تحریک $\Omega=1/1$ با استفاده از شبیه‌سازی عددی نشان داده شده است.

تحریک سیستم باعث بروز بی‌نظمی در پاسخ زمانی و منحنی فاز در ثانیه‌های اولیه می‌گردد. بی‌نظمی حاصل از پاسخ ناپایدار مانع مطالعه و تحلیل رفتار سیستم ارتعاشی می‌گردد. با گذشت زمان بی‌نظمی ایجاد شده با میرایی تیر حذف شده و پاسخ پایدار تیر قابل مطالعه خواهد گردید؛ بنابراین، پاسخ زمانی و منحنی فاز از ثانیه ۱۰۰۰ بررسی شده است.

در شکل ۴ بیشینه دامنه پاسخ حاصل از نتایج عددی برابر با ۲/۱۸ است، با افزایش شدت تحریک تصادفی در فرکانس تحریک ثابت $\Omega=1/1$ ، بیشینه دامنه پاسخ به ۲/۵۱ در شکل ۵ می‌رسد.

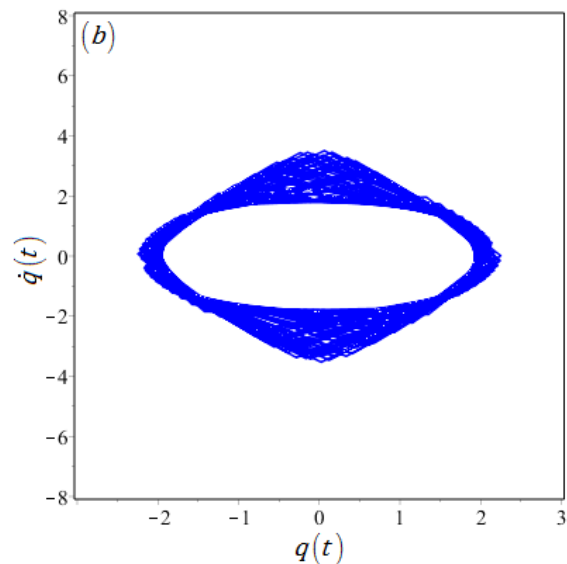
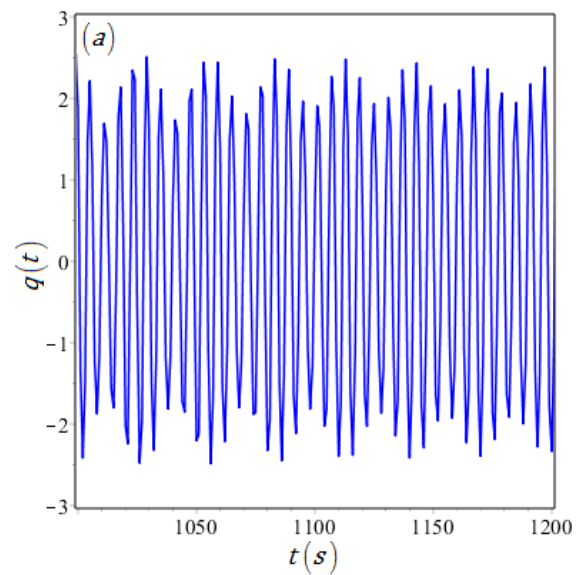
^۱ Limit cycle
^۲ Diffused limit cycle

دیگر از جمله [۱۷-۱۹، ۲۸]، برای مطالعه ارتعاشات غیرخطی تیر یکسر گیردار تحت تحریک تصادفی از روش تقریبی مقیاس زمانی استفاده نموده‌اند. در این مقاله، برای اولین بار با گسترش روش بالانس هارمونیک پاسخ تیر غیرخطی یکسر گیردار تحت ترکیب تحریک هارمونیک و تحریک تصادفی تجزیه و تحلیل گردیده است.

حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی نشان داد که پدیده پرش تصادفی در ناحیه‌ای که دارای پاسخ سه‌گانه است، رخ می‌دهد. هر دو پدیده پرش در منحنی‌های پاسخ فرکانسی و واریانس پاسخ فرکانسی در بین دونقطه دوشاخگی Ω_1 و Ω_2 رخ می‌دهد. همچنین با مطالعه پاسخ تصادفی می‌توان نتیجه گرفت که تحریک تصادفی باعث افزایش دامنه پاسخ خواهد شد. به عبارتی دیگر پدیده پرش تصادفی به پایین با دامنه پاسخ بیشتری اتفاق می‌افتد. حل عددی نشان می‌دهد با افزایش شدت تحریک تصادفی، پاسخ پایا از حالت چرخه‌ای مدور به حالت چرخه‌ای کشیده شده، تغییر می‌کند.

۵- مراجع

1. Crespo da Silva, M. and Glynn, C. "Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion," Journal of Structural Mechanics, Vol. 6, No. 4, pp. 437-448, 1978.
2. Crespo da Silva, M. and Glynn, C. "Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. II. Forced motions," Journal of Structural Mechanics, Vol. 6, No. 4, pp. 449-461, 1978.
3. Zavodney, L. D. and Nayfeh, A. "The non-linear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment," International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 24, No. 2, pp. 105-125, 1989.
4. Nayfeh, A. H. and Pai, P. F. "Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam," International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 24, No. 2, pp. 139-158, 1989.
5. Al-Qaisia, A., Hamdan, M. and Al-Bedoor, B. "On the steady state response of a cantilever beam partially immersed in a fluid and carrying an intermediate mass," Shock and Vibration, Vol. 7, No. 4, pp. 179-194, 2000.
6. Al-Qaisia, A. and Hamdan, M. "Bifurcations and chaos of an immersed cantilever beam in a fluid and carrying an intermediate mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 253, No. 4, pp. 859-888, 2002.



شکل (۵): نتایج عددی حاصل از رابطه (۷):

(a) پاسخ زمانی (b) منحنی فاز

$$q(0) = -4, \dot{q}(0) = -5/5, P = 1$$

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، به مطالعه تیر غیرخطی مغروق در آب با جرم متمرکز تحت ترکیب تحریک معین با تحریک تصادفی پرداخته شد. رابطه دیفرانسیلی معمولی تیر غیرخطی با استفاده از روش گلرکین و شکل مود خطی تیر استخراج گردید. برای تعیین پاسخ هارمونیک از روش بالانس هارمونیک و برای تحریک تصادفی از روش میانگین‌گیری تصادفی استفاده گردید. از آنجا که حل دقیق برای بازه محدودی از مسائل ارتعاشات تصادفی موجود است، محققین

18. Feng, Z., Lan, X. and Zhu, X. "Explanation on the importance of narrow-band random excitation characters in the response of a cantilever beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 325, No. 4, pp. 923-937, 2009.
19. Feng, Z., Zhu, X. and Lan, X. "Stochastic jump and bifurcation of a slender cantilever beam carrying a lumped mass under narrow-band principal parametric excitation," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 10, pp. 1330-1340, 2011.
20. Ge, G., Solitons, Z. J. C. Li, and Fractals, "A modified stochastic averaging method on single-degree-of-freedom strongly nonlinear stochastic vibrations," Vol. 91, pp. 469-477, 2016.
21. Ge, G. and Yan, W. J. J. o. V. "Cantilever model with curvature nonlinearity and longitudinal inertia excited by lateral basal moments being Gaussian white noise," Vol. 20, No. 1, pp. 677-690, 2018.
22. Ge, G., Bo, Z. J. C. and Applications, M. w. "Response of a cantilever model with a surface crack under basal white noise excitation," Vol. 76, No. 11-12, pp. 2728-2743, 2018.
23. Ge, G., Liu, J. J. C. Solitons, and Fractals, "Stochastic averaging on a nonlinear oscillator with coordinate-dependent mass excited by Gaussian white noises," Vol. 143, pp. 110609, 2021.
24. Rao, S. S. "Mechanical vibrations "Pearson Prentice Hall, Inc. NJ, 2004.
25. To, C. W. "Nonlinear random vibration: Analytical techniques and applications," CRC Press, 2011.
26. Roberts, J. and Spanos, P. "Stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 111-134, 1986.
27. Newland, D. E. "An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis," Courier Corporation, 2012.
28. Lan, X., Feng, Z. and Lv, F. "Stochastic Principal Parametric Resonances of Composite Laminated Beams," *Shock and Vibration*, Vol. 2014, 2014.
7. Delgado-Velázquez, I. "Nonlinear vibration of a cantilever beam," 2007.
8. Motallebi, A., Irani, S. and Sazesh, S. "Analysis on jump and bifurcation phenomena in the forced vibration of nonlinear cantilever beam using HBM," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 515-524, 2016.
9. Nayfeh, A. and Serhan, S. "Response statistics of non-linear systems to combined deterministic and random excitations," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 25, No. 5, pp. 493-509, 1990.
10. Rong, H.-w., Xu, W. and Fang, T. "Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow-band random parametric excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, No. 4, pp. 483-515, 1998.
11. Hai-wu, R., Wei, X., Xiang-dong, W., Guang, M. and Tong, F. "Principal response of van der pol-duffing oscillator under combined deterministic and random parametric excitation," *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 23, No. 3, pp. 299-310, 2002.
12. Zhu, W. and Wu, Y. "First-passage time of Duffing oscillator under combined harmonic and white-noise excitations," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 32, No. 3, pp. 291-305, 2003.
13. Chen, L. and Zhu, W. "Stochastic jump and bifurcation of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitations," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 10, pp. 1324-1329, 2011.
14. Anh, N. and Hieu, N. "The Duffing oscillator under combined periodic and random excitations," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 30, pp. 27-36, 2012.
15. Haiwu, R., Wei, X., Guang, M. and Tong, F. "Response of a Duffing oscillator to combined deterministic harmonic and random excitation," *Journal of sound and vibration*, Vol. 242, No. 2, pp. 362-368, 2001.
16. Zhu, H.-T. and Guo, S.-S. "Periodic Response of a Duffing Oscillator Under Combined Harmonic and Random Excitations," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 137, No. 4, pp. 041015, 2015.
17. Feng, Z., Lan, X. and Zhu, X. "Principal parametric resonances of a slender cantilever beam subject to axial narrow-band random excitation of its base," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 10, pp. 1170-1185, 2007.