مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۸/ شماره ۲/ صفحه ۱۰۹-۱۲۴

نشریه علمی مکانیک هوافضا

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.2.8.8

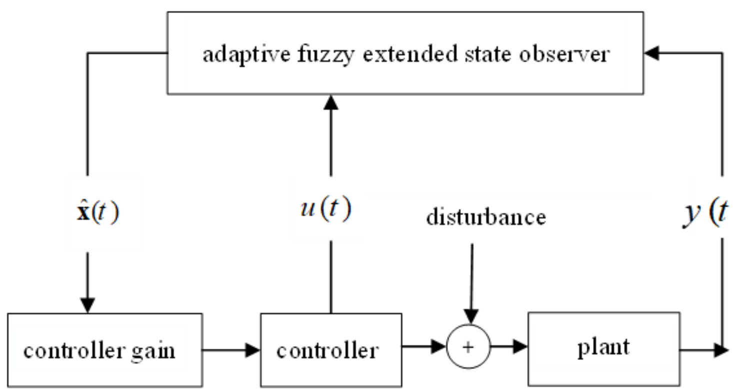
طراحی رویتگر حالت تعمیم‌یافته فازی- تطبیقی برای سیستم‌های غیرخطی اَفاین با اغتشاش خارجی

مهتاب دل‌پسند[۱]، **محمد فرخی**[۲*]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

[۲] استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- بهره‌های رویتگر به‌صورت متغیر با زمان در نظر گرفته شده و با استفاده از قانون تطبیق، تنظیم شده است.
- مدل‌سازی سیستم نیز توسط سیستم فازی تاکاگی-سوگنو انجام شده است که برخلاف روش ممدانی، تحلیل دقیق‌تر و جامع‌تری را در اختیار قرار می‌دهد.
- ضمن تضمین پایداری روش پیشنهادی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف، همگرایی خطای تخمین نیز مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفته است.

چکیده

در این مقاله، هدف طراحی رویتگر تعمیم‌یافته فازی-تطبیقی برای تخمین هم‌زمان حالت‌ها و اغتشاش خارجی در سیستم‌های غیرخطی افاینِ تک‌ورودی-تک‌خروجی است. در این رابطه، بهره‌های رویتگر به‌صورت متغیر با زمان در نظر گرفته شده و با استفاده از قانون تطبیق، تنظیم شده است. مدل‌سازی سیستم نیز توسط سیستم فازی تاکاگی-سوگنو انجام شده است که برخلاف روش ممدانی، تحلیل دقیق‌تر و جامع‌تری را در اختیار قرار می‌دهد. رویتگر فازی- تطبیقی پیشنهادی که تابعی از خطای تخمین است، به‌منظور کاهش محدودیت‌ها از جمله وابستگی به پهنای باند رویتگر و بهبود عملکرد سیستم نسبت به روش‌های کلاسیک، در حضور اغتشاش خارجی متغیر با زمان طراحی شده است. همچنین، ضمن تضمین پایداری روش پیشنهادی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف، همگرایی خطای تخمین نیز مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفته است. عملکرد روش پیشنهادی در کنترل آونگ وارون شبیه‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی در مقایسه با رویتگر فازی، نشان از عملکرد بسیار بهتر آن در پاسخ‌های گذرا و حالت ماندگار و همچنین دامنه سیگنال ورودی و مقاوم بودن روش پیشنهادی در حضور اغتشاش خارجی، نویز اندازه‌گیری، و تغییر ناگهانی پارامترهای سیستم دارد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶

بازنگری: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۷

ارائه برخط: ۱۴۰۰/۱۲/۰۱

*نویسنده مسئول:

farrokhi@iust.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

رویتگر فازی-تطبیقی

خطای تخمین رویتگر،

پایداری لیاپانوف

آونگ وارون

۱- مقدمه

کنترل سیستم‌های غیرخطی دارای اغتشاش و عدم قطعیت، از جمله مسائل پیچیده در مهندسی کنترل است که در دهه‌های گذشته بسیار موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است. به دلیل حضور اجتناب‌ناپذیر نامعینی‌ها و تغییر پارامترها، کنترل این سیستم‌ها کماکان یکی از موضوعات چالش‌برانگیز در علم کنترل می‌باشد. به‌طورکلی، در بسیاری از سیستم‌های کنترلی همانند ربات‌های با بازوی انعطاف‌پذیر، سیستم تعلیق خودرو و سیستم‌های ناوبری که از مرتبه بالا بوده و دارای عدم قطعیت و یا اغتشاش خارجی است، طراحی کنترل‌کننده‌ای که عملکرد مقاوم داشته باشد، دشوار است. به‌منظور تضعیف اثر اغتشاش، مقاوم‌سازی و بهبود عملکرد سیستم‌های مرتبه بالا در حضور نامعینی، از تکنیک‌های مختلفی از جمله کنترل‌کننده‌های تطبیقی، هوشمند و مقاوم استفاده می‌شود که همگی زیرمجموعه‌ای از روش‌های کنترل ضداغتشاش (ADRC) به شمار می‌رود [۱-۴]، کنترل بر مبنای رویتگر اغتشاش [۵-۸]، مشتق‌گیر ردیابی (TD) [۹ و ۱۰]، و رویتگر حالت تعمیم‌یافته (ESO) [۱۱ و ۱۲] از جمله روش‌های مؤثر برای ADRC است.

رویتگرهای ESO از رویتگرهای کارآمد در مهندسی کنترل به شمار می‌رود که در یک دهه گذشته بسیار موردتوجه قرار گرفته است. اولین بار ESO توسط هان [۱۳] برای سیستم‌های تک‌متغیره مطرح گردید. یکی از مزایای ESO، قابلیت اعمال به سیستم‌های مرتبه بالا با اغتشاش خارجی است زیرا می‌تواند به‌خوبی اثر آن را تضعیف کند [۱۴]. از دیگر مزیت‌های ESO نسبت به سایر روش‌های کنترلی این است که در این روش، سیستم به فرم زنجیره انتگرالی یا نرمال در نظر گرفته می‌شود و این امر موجب می‌شود اطلاعات کمتری در طراحی موردنیاز بوده و تنها مشخص بودن درجه نسبی سیستم ضروری باشد [۱۵]. ولی باید در نظر داشت که ESO در حضور نامعینی و اغتشاش متغیر با زمان دارای محدودیت‌هایی است. اگر تغییرات پارامتر شدید باشد و یا اغتشاشِ متغیر با زمان با دامنه تغییرات زیاد به سیستم اعمال گردد، ESO به‌تنهایی قادر به حذف اثر اغتشاش نخواهد بود. در مرجع [۱۶] برای مقابله با این محدودیت و حذف اثر اغتشاش متغیر با زمان، از مشتقات مرتبه بالاتر اغتشاش در طراحی سیستم تعمیم‌یافته استفاده شده که این کار منجر به پیچیدگی و افزایش حجم محاسبات می‌شود. همچنین یکی دیگر از مشکلات این روش، تعدد پارامترهای طراحی است که در مرجع [۱۷] با خطی در نظر گرفتن بهره‌های آن، تعداد پارامترهای قابل تنظیم، به دو پارامتر کاهش‌یافته است.

به‌طورکلی، یکی از عوامل مؤثر در عملکرد رویتگرها از جمله ESO، تابع و بهره رویتگر است. در مرجع [۱۸] با طراحی رویتگر به‌صورت خطی و با محدود کردن بهره رویتگر، ESO از عملکرد مطلوب خود فاصله گرفته است. روش‌های مختلفی برای تنظیم بهره رویتگر در ESO مورداستفاده پژوهشگران قرار گرفته است که از جمله آن‌ها می‌توان به پهنای باند رویتگر و جایابی قطب اشاره کرد. در مراجع [۱۹ و ۲۰] ، از ضرایب کنترل‌کننده تناسبی-مشتق‌گیر (PD) و تناسبی-انتگرال‌گیر-مشتق‌گیر (PID) برای تنظیم پهنای باند رویتگر استفاده شده است. لیکن، استفاده از پهنای باند رویتگر منجر به افزایش محافظه‌کاری و کاهش درجه آزادی می‌شود. در مرجع [۲۱]، به‌منظور افزایش انعطاف‌پذیری در طراحی بهره رویتگر، از سیستم فازی برای تنظیم پهنای باند رویتگر استفاده شده است. در این مرجع، تابع رویتگر به‌صورت خطی و بهره رویتگر به‌صورت ثابت در نظر گرفته شده که منجر به فاصله گرفتن سیستم از عملکرد مطلوب خود شده است. در واقع، ESO از جمله روش‌های بهره بالا به شمار می‌رود که به‌منظور عملکرد مطلوب، به پهنای باند بزرگ نیاز دارد. هنگامی‌که بهره ESO به‌صورت خطی در نظر گرفته شود، پهنای باند رویتگر محدود شده که منجر به فاصله گرفتن سیستم از عملکرد بهینه خود می‌شود. در مرجع [۲۲]، به این نکته اشاره می‌شود که انتخاب بهره رویتگر با هر توانی امکان‌پذیر نخواهد بود؛ زیرا افزایش پهنای باند منجر به نویزپذیر شدن سیستم کنترلی می‌شود. یکی دیگر از روش‌های حل مشکل محدود بودن پهنای باند، استفاده از رویتگر حالت تعمیم‌یافته تطبیقی است. به‌طورکلی، کنترل تطبیقی در کنار ESO به دو صورت مطرح می‌شود: ۱) در سیستم‌های خطی ناوردای زمانی (LTI) با هدف تنظیم بهره کنترل‌کننده و ۲) در

سیستم‌های خطی وردای زمانی (TV)، به‌منظور تنظیم بهره‌های متغیر با زمان رویتگر، قانون تطبیق طراحی می‌شود. در مراجع [۲۵-۲۳]، روش ضد اغتشاش تطبیقی برای حل مشکل وابستگی ESO به پهنای باند رویتگر مطرح شده است که با ارائه قانون تطبیق برای تنظیم بهره‌های کنترلی، وابستگی به پهنای باند کاهش می‌یابد. لیکن طراحی کنترل‌کننده و رویتگر پیچیدگی زیادی دارد. مرجع [۲۶]، نیز یکی دیگر از مراجعی است که با طراحی قانون تطبیق برای بهره‌های کن‌ترل‌کننده، عملکرد سیستم را بهبود می‌بخشد؛ اما از قبل فرض شده است که حالت‌های سیستم کران‌دار هستند. علاوه بر آن، اغتشاش ثابت در نظر گرفته شده است.

با طراحی بهره رویتگر به‌صورت تطبیقی، علاوه بر کاهش محافظه‌کاری، عملکرد سیستم نیز بهبود می‌یابد. در مرجع [۲۷]، با در نظر گرفتن بهره رویتگر به‌صورت متغیر بازمان و استفاده از نظریه طیفی جبری دیفرانسیلی (DAST)، بهره رویتگر تنظیم می‌شود که به دلیل پیچیدگی روش، مرتبه سیستم محدود در نظر گرفته شده است. همچنین در مرجع [۲۸]، بهره رویتگرِ متغیر بازمان با استفاده از قانون تطبیق، تنظیم می‌شود. در این مرجع علاوه بر در نظر گرفتن اغتشاش به‌صورت ثابت و یا با تغییرات آهسته، با قرار دادن کران بالا و پایین برای بهره، منجر به ایجاد محافظه‌کاری در طراحی می‌شود. به‌منظور کاهش محدودیت‌های ذکر شده در بالا، در این مقاله، رویتگر حالت تعمیم یافته فازی- تطبیقی پیشنهاد می‌شود. در روش پیشنهادی، بهره رویتگر از نوع تطبیقی طراحی می‌شود که منجر به کاهش محافظه‌کاری، بهبود عملکردگذاری سیستم، کاهش دامنه ورودی کنترلی، و افزایش سرعت همگرایی نسبت به سایر رویتگرها (همانند ESO فازی-غیرتطبیقی) می‌شود. همچنین در روش پیشنهادی، برخلاف بسیاری از مراجع همانند [۲۶، ۲۹ و ۳۰]، نیازی به کراندار بودن حالت‌های سیستم و یا قرار گرفتن حالت‌ها در مجموعه محدود و بسته نمی‌باشد و تنها کافی است که شرط کرانداری اغتشاش و مشتق‌های آن برقرار باشد که شرط قابل قبولی در عمل است.

در روش پیشنهادی، سیستم غیرخطی به‌صورت افاین و تک‌ورودی-تک‌خروجی در نظر گرفته شده است. همچنین، عبارت‌های غیرخطی با استفاده از سیستم فازی تقریب‌زده می‌شود. در مراجع [۱۴، ۱۷، ۲۱ و ۳۱]، به‌منظور سهولت و جلوگیری از پیچیدگی، تابع غیرخطی رویتگر به فرم خطی در نظر گرفته می‌شود. باید به این نکته توجه داشت که یکی از عوامل مؤثر در عملکرد رویتگرها از جمله ESO، تابع رویتگر است که با انتخاب آن به‌صورت خطی و ثابت، کاهش انعطاف‌پذیری و درجه آزادی را به دنبال خواهد داشت. ازاین‌رو در این مقاله، رویتگر به‌صورت خطی در نظر گرفته شده اما به‌منظور بهبود عملکرد آن، بهره رویتگر به‌صورت تطبیقی محاسبه می‌شود تا اغتشاش با دقت بالاتری تخمین زده شده و اثر آن به‌طور کامل از خروجی حذف گردد؛ بنابراین، هدف از رویتگر فازی-تطبیقی پیشنهادی، ضمن کاهش محدودیت‌های رویتگر حالتِ تعمیم‌یافته و بهبود عملکرد سیستم در حضور اغتشاش متغیر بازمان، کاهش خطای ردیابی و دامنه سیگنال کنترلی است. به‌عبارت‌دیگر، قانون تطبیقِ بهره‌های رویتگر به نحوی طراحی شده است که اثر اغتشاش خارجی و تغییرات ناگهانی پارامترهای سیستم به‌خوبی حذف شود. البته استفاده از رویتگر فازی-تطبیقی ایده نوینی نیست. لیکن برخلاف سایر رویتگرهای فازی-تطبیقی [۳۴-۳۲]، که در آن‌ها برای تقریب مدل از روش ممدانی استفاده می‌شود، در این پژوهش به‌منظور افزایش درجه آزادی در مدل‌سازی و تحلیل دقیق‌تر و جامع‌تر، سیستم فازی تاکاگی-سوگنو مورداستفاده قرار می‌گیرد. در واقع، در روش تاکاگی-سوگنو [۳۵ و ۳۶] از سیستم فازی به‌منظور تقریب سیستم‌های غیرخطی استفاده شده است. درحالی‌که در روش ممدانی برای مدل‌سازی عدم قطعیت، سیستم فازی مورداستفاده قرار می‌گیرد. همچنین در روش پیشنهادی، با حذف شرط مشتق‌پذیری توابع غیرخطی و قرار دادن شرط لیپشیتز، محافظه‌کاری کاهش می‌یابد. در واقع با استفاده از شرط لیپشیتز، دقت در تخمین حالت‌های سیستم و اغتشاش خارجی افزایش می‌یابد. همچنین شرط لیپشیتز، کلاس وسیع‌تری از سیستم‌های با توابع غیرخطی را شامل می‌شود. به‌طورکلی، مهم‌ترین نوآوری‌های رویتگر فازی-تطبیقی پیشنهادی، به شرح زیر است:

۱) تنظیم بهره رویتگر فازی با استفاده از قانون تطبیق برای نخستین بار
۲) حذف اثر اغتشاش متغیر بازمان با استفاده از ESO
۳) کاهش محافظه‌کاری در طراحی رویتگر
۴) حذف فرض‌های محدودکننده همانند کرانداری حالت‌های سیستم، مشتق‌پذیری و کرانداری بهره رویتگر

در ادامه این مقاله، ابتدا در بخش دوم، مقدمات و روابط ریاضی رویتگر تعمیم‌یافته فازی مطرح می‌شود. سپس در بخش سوم، ضمن تحلیل پایداری، قانون بهره تطبیقی رویتگر ارائه خواهد شد. در بخش چهارم، الگوریتم طراحی برای رویتگر فازی-تطبیقی پیشنهادی مطرح می‌شود. در بخش پنجم، نتایج شبیه‌سازی و مقایسه آن با یکی از مراجع جدید نشان داده می‌شود. در بخش آخر، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی ارائه می‌شود.

۲- بیان مسئله

فرم کلی سیستم غیرخطی با درجه نسبی n به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right)+\mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t)\right)u(t)+\mathbf{b}_d d(t) \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{x}=[x_1\cdots x_n]^T\in \mathrm{R}^{n\times 1}$ بردار حالت‌های سیستم، $u\in \mathrm{R}$ ورودی کنترلی، $\mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t)\right)$ بردار توابع غیرخطی، $d(t)\in \mathrm{R}$ اغتشاش خارجی و $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right)$ بردار توابع غیرخطی و هموار است که باید شرط لیپشیتز برای آن برقرار باشد. بدون از دست دادن کلیت قضیه، مرتبه سیستم به‌صورت $n=۲$، در نظر گرفته شده که با استفاده از تبدیلات ماتریسی می‌توان سیستم را به فرم نرمال زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=f\left(\mathbf{x}(t)\right)+g\left(\mathbf{x}(t)\right)u(t)+d(t)\\ y(t)=x_1(t)\end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $\mathbf{x}(t)=[x_1(t),x_2(t)]^T$ بردار حالت‌های سیستم، $f\left(\mathbf{x}(t)\right)$ تابع غیرخطی و هموار که شرط لیپشیتز برای آن برقرار است، و $g\left(\mathbf{x}(t)\right)$ تابع غیرخطی است. به‌منظور طراحی رویتگر فازی، سیستم غیرخطی (۲) با استفاده از مدل تاکاگی- سوگنو به‌صورت زیرسیستم‌های خطی زیر نوشته می‌شود:

$$\mathrm{R}^i:\ \text{IF } x_1 \text{ is } G_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } G_2^i$$
$$\text{THEN}\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}_i u(t)+\mathbf{b}_d d(t) \quad i=1,\dots,r\\ y(t)=\mathbf{c}_i\mathbf{x}(t)\end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن

$$\mathbf{A}_i=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{1_i} & a_{2_i}\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_i=\begin{bmatrix}0\\ b_i\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_d=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{c}_i=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

که در آن $a_{1_i},a_{2_i}\in(-\infty,+\infty)$ ضرایب خطی معلومِ حالت‌های x_1 و x_2 در قانون iام هستند که از خطی‌سازی $f\left(\mathbf{x}(t)\right)$ محاسبه می‌شود. با توجه به فرض عدم دسترسی به متغیرهای حالت، نیاز به طراحی رویتگر می‌باشد. با توجه به طراحی رویتگر به‌صورت خطی، بهترین راه‌حل در مواجهه با اغتشاش متغیر با زمان و تغییرات پارامتری، استفاده از روش‌های تطبیقی است. بر اساس ویژگی روش‌های تطبیقی که رفتار خود را در پاسخ به تغییرات دینامیکی و اغتشاش تغییر می‌دهد، بهره رویتگر به‌صورت متغیر با زمان در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از رویتگر تطبیقی، بهره آن تنظیم می‌شود؛ بنابراین، به‌منظور طراحی رویتگر، سیستم (۳) به فرم تعمیم‌یافته زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathrm{R}^i:\ \text{IF } x_1 \text{ is } G_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } G_2^i$$
$$\text{THEN}\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=\bar{\mathbf{A}}_i\bar{\mathbf{x}}(t)+\bar{\mathbf{b}}_i u(t)+\mathbf{E}h(t) \quad i=1,\dots,r\\ \bar{y}(t)=\bar{\mathbf{c}}_i\bar{\mathbf{x}}(t)\end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن

$$\bar{\mathbf{A}}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{i_{(2\times2)}} & \mathbf{b}_{d_{(2\times1)}}\\ \mathbf{0}_{(1\times2)} & \mathbf{0}_{(1\times1)}\end{bmatrix}_{(3\times3)},\quad \bar{\mathbf{b}}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{i_{(2\times1)}}\\ \mathbf{0}_{(1\times1)}\end{bmatrix}_{(3\times1)}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(2\times1)}\\ 1_{(1\times1)}\end{bmatrix}_{3\times1},\quad \bar{\mathbf{c}}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_{i_{(1\times2)}} & \mathbf{0}_{(1\times1)}\end{bmatrix}_{1\times3}$$

که در آن $\bar{\mathbf{x}}=[x_1\cdots x_3]^T\in \mathrm{R}^{3\times1}$ بردار حالت‌های سیستم، $u(\mathrm{t})\in \mathrm{R}$ ورودی کنترلی، و $h(t)$ مشتق تابع اغتشاش است. به‌منظور طراحی رویتگر، فرض‌های زیر برقرار است.

فرض ۱: اغتشاش و مشتقات آن، موجود و کراندار است؛ یعنی:

$$\frac{d^{(j)}}{dt^{(j)}}\left(d(t)\right) \neq 0 \;\; , \;\; \left|d^{(j)}(t)\right| \leq \Delta_j \quad j = 1,2 \qquad (۵)$$

که در آن Δ_j کران اغتشاش است.

فرض ۲: به ازای هر متغیر برنامه‌ریزی‌شده، حداقل یک قانون در پایگاه قواعد فازی وجود دارد که مقدار درستی آن بیشتر از صفر باشد، ($\sum_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right) \neq 0$) که در آن $\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)$ مقدار تابع عضویت نرمال شده و r تعداد قوانین فازی است که به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right) = \frac{\mu_i\left(\mathbf{x}(t)\right)}{\sum_{j=1}^{r}\mu_j\left(\mathbf{x}(t)\right)} \qquad \{i = 1,...,r\} \qquad (۶)$$
$$\sum_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right) = 1, \;\; \omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right) \geq 0 \;\; \forall \mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^{n\times 1}$$

که در آن $\mu_i\left(\mathbf{x}(t)\right)$ درجه آتش قانون iام است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_i\left(\mathbf{x}(t)\right) = \prod_{j=1}^{r}\mu_j^i\left(\mathbf{x}(t)\right) \qquad (۷)$$

فرض ۳: به‌منظور طراحی رویتگر، سیستم فازی باید رویت‌پذیر باشد. سیستم تاکاگی-سوگنو، یک سیستم غیرخطی است که باید شرط رویت‌پذیری سیستم‌های غیرخطی برای آن برقرار باشد؛ بنابراین، در روند طراحی رویتگر، باید هر زیرمجموعه فازی (و نه کل سیستم فازی- سوگنو)، رویت‌پذیر باشد. به‌عبارتی، باید شرط رویت‌پذیری زوج $\left(\mathbf{A}_i, \mathbf{c}_i\right)$ $i = 1,...,r$ برقرار باشد [۳۷].

فرض ۴: زوج $\left(\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i\right)$ $i = 1,...,r$ کنترل‌پذیر و زوج $\left(\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\mathbf{c}}_i\right)$ $i = 1,...,r$ رویت‌پذیر است. لازم به یادآوری است که شرط لازم برای رویت‌پذیری $\left(\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\mathbf{c}}_i\right)$، رویت‌پذیر بودن زوج $\left(\mathbf{A}_i, \mathbf{c}_i\right)$ است [۳۸].

برای سیستم (۴)، رویتگری به‌صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\mathrm{R}^i: \text{IF } \hat{x}_1 \text{ is } G_1^i \text{ and } \hat{x}_2 \text{ is } G_2^i$$
$$\text{THEN}\begin{cases}\dot{\hat{\bar{\mathbf{x}}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_i\hat{\bar{\mathbf{x}}}(t) + \bar{\mathbf{b}}_i u(t) + \mathbf{l}_i(t)\left(\bar{y}(t) - \hat{\bar{y}}(t)\right) & i = 1,...,r \\ \hat{\bar{y}}(t) = \bar{\mathbf{c}}_i\hat{\bar{\mathbf{x}}}(t)\end{cases} \qquad (۸)$$

که در آن $\hat{\bar{\mathbf{x}}} = [\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_3]^T \in \mathrm{R}^{3\times 1}$ تخمین حالت‌های سیستم تعمیم‌یافته و $\mathbf{l}_i = [l_1 \cdots l_3]^T$ بهره رویتگر متغیر با زمان است که برای آن قانون تطبیق طراحی می‌شود.

همچنین به‌منظور پایدارسازی و حذف اثر اغتشاش در حالت پایدار، قانون کنترلی که به‌صورت فیدبک حالت در نظر گرفته شده است، برای زیرسیستم iام به‌صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\begin{aligned} u_i &= \mathbf{k}_{x_i}\mathbf{x}(t) + k_{d_i}d(t) \\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{k}_{x_i} & k_{d_i}\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}\,\bar{\mathbf{x}}(t)\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن $k_{d_i} \in \mathrm{R}$ بهره جبران‌کننده اغتشاش و $\mathbf{k}_{x_i} = [k_{x_1}, k_{x_2}] \in \mathrm{R}^{1\times 2}$ بردار بهره فیدبک کنترلی است و به‌نحوی طراحی می‌شود که $\mathbf{A}_{f_i} = \mathbf{A}_i - \mathbf{b}_i\mathbf{k}_{x_i}$ هرویتز باشد. همچنین، بهره جبران‌کننده اغتشاش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۳۸]:

$$k_{d_i} = -\left[\mathbf{c}_i\left(\mathbf{A}_i + \mathbf{b}_i\mathbf{k}_{x_i}\right)^{-1}\mathbf{b}_i\right]^{-1}\mathbf{c}_i\left(\mathbf{A}_i + \mathbf{b}_i\mathbf{k}_{x_i}\right)^{-1}\mathbf{b}_d \qquad (۱۰)$$

۳- تحلیل پایداری

در این بخش، علاوه بر اثبات همگرایی دینامیک خطای تخمین، قانون تطبیق برای بهره‌های رویتگر با استفاده از تابع لیاپانوف طراحی می‌شود. برای این منظور، دو قضیه مطرح و اثبات می‌شود. در قضیه اول، شرط‌های همگرایی دینامیک خطای تخمین نشان داده می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که در سیستم فازی اگر تک‌تک زیرسیستم‌های فازی پایدار باشد، پایداری کل سیستم حلقه‌بسته، تضمین نمی‌شود؛ بنابراین در قضیه دوم، شرط کافی برای پایداری کل سیستم حلقه‌بسته، ارائه می‌شود.

قضیه ۱: با در نظر گرفتن فرض‌های بخش قبل، دینامیک خطای تخمین رویتگر، پایدار مجانبی است اگر شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&p_{11} := -\gamma_1 l_1(1 + a_{1_i}) + (a_{1_i} - l_2)^2(a_{2_i} - l_1) + l_1 l_2^2 \\
&\qquad - a_{1_i}(l_3 + \dot{l}_2) + 0.5\gamma_3 l_3^2(l_1^2 + \frac{l_3^2}{l_3^2} + 1) < 0 \\
&p_{22} := a_{2_i}(\gamma_1 + a_{2_i}^2) + a_{2_i}(\gamma_2 + a_{1_i}) + 0.5\gamma_3 l_3^2 - l_2 a_{2_i} < 0 \\
&p := p_{11}p_{22}(\frac{1}{2} + a_{2_i}\alpha_2^2) - p_{31}p_{23}\left(-l_2 a_{2_i}^2(a_{1_i} + a_{2_i}^2)\right. \\
&\qquad \left. + l_2\alpha_2^2(a_{2_i}^2 - a_{1_i}) + p_{31} - l_2 + a_{1_i}p_{23}\right) < 0 \\
&\lambda_{\min}(\tilde{\xi}) > \delta
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در آن $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in \mathrm{R}^{3\times3}$ ماتریس مربعی و δ، α_i، و γ_i ($i=1, 2, 3$) پارامترهای ثابت و مثبت است و p_{23} و p_{31} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_{23} := -1-\alpha_2^2(a_{1_i}+2a_{2_i}^2)-\alpha_1^2$$

$$p_{31} := \alpha_2^2\left((a_{1_i}-l_2)(l_1-2a_{2_i})+l_3+\dot{l}_2\right)-\alpha_1^2$$

اثبات: با تعریف خطای تخمین به‌صورت $e(t) := \bar{y}(t)-\hat{\bar{y}}(t)$، دینامیک خطای تخمین برای زیرسیستم iام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{\mathbf{e}}(t)=\tilde{\mathbf{A}}_i(t)\mathbf{e}(t)+\tilde{\mathbf{b}}_i h(t) \quad i=1,\dots,r \tag{۱۲}$$

که در آن

$$\tilde{\mathbf{A}}_i=\begin{bmatrix} -l_1(t) & 1 & 0 \\ a_{1_i}-l_2(t) & a_{2_i} & a_{3_i} \\ -l_3(t) & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{b}}_i=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که در آن $\mathbf{e}=[e_1\cdots e_3]^T \in \mathrm{R}^{3\times1}$ بردار خطای تخمین است. با توجه به معادله (۱۲) می‌توان مشاهده کرد که دینامیک خطای تخمین به سیستم متغیر با زمان با ورودی نامعلوم $h(t)$ تبدیل شده که با استفاده از قانون تطبیق، بهره رویتگر تنظیم و همگرایی دینامیک خطای تخمین تضمین می‌شود. با توجه به این‌که هدف، طراحی رویتگر حالت تعمیم‌یافته فازی-تطبیقی برای سیستم غیرخطی است، بنابراین قانون تطبیق برای بهره رویتگر به‌نحوی طراحی می‌شود تا در حضور اغتشاش متغیر با زمان، سیستم عملکرد مطلوبی داشته باشد. بدین منظور، تابع لیاپانوف زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v=\frac{1}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{e}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{e}}+\frac{1}{2}\mathbf{l}^T\mathbf{l} \tag{۱۳}$$

که در آن $\dot{\mathbf{e}}=[\dot{e}_1\cdots\dot{e}_3]^T \in \mathrm{R}^{3\times1}$ بردار مشتق خطای تخمین، $\mathbf{l}=[l_1\cdots l_3]^T$ بردار بهره‌های رویتگر، و $\boldsymbol{\Psi} := \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ ماتریس مثبت معین که در آن $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1 \dots \alpha_3]^T$ بردار پارامترهای مقیاس‌گذاری است و شامل پارامترهای ثابت و مثبت می‌باشد. تنظیم بهینه‌ی بهره‌های رویتگر ($l_1\cdots l_3$) می‌تواند نقش مؤثری در بهبود عملکرد سیستم حلقه‌بسته ایفا کند. به‌منظور ساده‌سازی در نوشتن معادلات، متغیر زمان از تعدادی از معادلات حذف شده؛ لیکن این امر نباید در دنبال کردن روند اثبات مشکلی ایجاد کند.

مشتق تابع لیاپانوف برابر است با

$$\dot{v}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T\left(\mathbf{e}+\boldsymbol{\Psi}\ddot{\mathbf{e}}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^T+\ddot{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{\Psi}\right)\dot{\mathbf{e}}+\mathbf{l}^T\dot{\mathbf{l}} \tag{۱۴}$$

که در آن $\ddot{\mathbf{e}}=[\ddot{e}_1\cdots\ddot{e}_3]^T \in \mathrm{R}^{3\times1}$ بردار مشتق دوم خطای تخمین است. با جایگزین کردن خطای تخمین و ساده‌سازی، رابطه (۱۴) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{v}=-\mathbf{e}^T\left(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3\right)\mathbf{e}+(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)\mathbf{e}+\mathbf{l}^T\dot{\mathbf{l}}+D \tag{۱۵}$$

که در آن $D=\alpha_3^2\dot{d}\ddot{d}$ شامل ترم‌های مشتقات اغتشاش است. همچنین، $\mathbf{P}_i \in \mathrm{R}^{3\times3}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathrm{R}^{1\times3}$ و به ترتیب ماتریس و بردار شامل پارامترهای سیستم، رویتگر، و ضرایب مقیاس‌گذاری به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} l_1(1+a_{1_i}\alpha_1^2) & 0 & 0 \\ \alpha_1^2(l_2+\dot{l}_1+l_1a_{2_i}-a_{2_i})-1 & -a_{2_i}\alpha_1^2 & -\alpha_1^2 \\ -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} -\left((a_{1_i}-l_2)^2(a_{2_i}-l_1)+l_1l_2^2-a_{1_i}(l_3+\dot{l}_2)\right)\alpha_2^2 & 0 & 0 \\ l_2\left(1+a_{2_i}^2(a_{1_i}+a_{2_i}^2)+\alpha_2^2(a_{2_i}^2-a_{1_i})\right)-p_{31}-a_{1_i}p_{23} & a_{2_i}^2\left(\alpha_{2_i}^2(l_2-a_{2_i}^2-a_{1_i})-1\right) & p_{23}+\alpha_1^2 \\ p_{23}+\alpha_1^2 & 0 & -a_{2_i}\alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_3^4\left((l_1^2+1)l_3^2+\dot{l}_3^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha_3^4l_3^2 & 0 \\ \dot{l}_3-l_1l_3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\alpha_2^2\dot{d}\begin{bmatrix} a_{1_i}-l_2 & a_{2_i} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\alpha_3^2\begin{bmatrix} \dot{d}l_1l_3-\dot{l}_3(d+\ddot{d}) & -\dot{d}l_3 & \dfrac{\ddot{d}}{\alpha_3^2} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$p_{23} := -1-\alpha_2^2(a_{1_i}+2a_{2_i}^2)-\alpha_1^2$$

$$p_{31} := \alpha_2^2\left((a_{1_i}-l_2)(l_1-2a_{2_i})+l_3+\dot{l}_2\right)-\alpha_1^2$$

با جدا کردن عبارت‌های شامل $l_i(\mathrm{t})$، قانون تطبیق برای بهره رویتگر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{l}_i=\frac{\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2e_1^2}\left[e_1^2\left(l_1l_i-l_{i+1}\right)-l_ie_1e_2+e_2e_{i+1}\right] \quad i=1,2,3 \tag{۱۶}$$

باید توجه داشت که به ازای $i>3$ خطای تخمین و بهره رویتگر صفر خواهد بود ($e_i=0, l_i=0$). با توجه به

ناتساوی یانگ $\left(2ab \le a^2 + b^2\right)$، عبارت $(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2)\mathbf{e}$ به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \mathrm{I}: \left(\alpha_2^2 (a_{1_i} - l_2) e_1\right)\left(\dot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_2^4 \left(a_{1_i}^2 + l_2^2\right) e_1^2 + \dot{d}^2 \\ \mathrm{II}: \left(\alpha_2^2 a_{2_i} e_2\right)\left(\dot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_2^4 a_{2_i}^2 e_2^2 + \frac{1}{2}\dot{d}^2 \\ \mathrm{III}: \left(\alpha_2^2 e_3\right)\left(\dot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_2^4 e_3^2 + \frac{1}{2}\dot{d}^2 \end{cases} \quad (۱۷)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{e} \le \frac{1}{2}\alpha_2^4 \left(\left(a_{1_i}^2 + l_2^2\right) e_1^2 + a_{2_i}^2 e_2^2 + e_3^2\right) + 2\dot{d}^2$$

$$\begin{cases} \mathrm{I}: \left(\alpha_3^2 (l_1 l_3 - \dot{l}_3) e_1\right)\left(\dot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_3^4 \left(l_1^2 l_3^2 + \dot{l}_3^2\right) e_1^2 + \dot{d}^2 \\ \mathrm{II}: \left(\alpha_3^2 l_3 e_2\right)\left(\dot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_3^4 l_3^2 e_2^2 + \frac{1}{2}\dot{d}^2 \\ \mathrm{III}: \left(\alpha_3^2 e_3\right)\left(\ddot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_3^4 e_3^2 + \frac{1}{2}\ddot{d}^2 \\ \mathrm{IV}: \left(\alpha_3^2 \dot{d}\right)\left(\ddot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_3^4 \dot{d}^2 + \frac{1}{2}\ddot{d}^2 \\ \mathrm{V}: \left(-\alpha_3^2 l_3 e_1\right)\left(\ddot{d}\right) \le \frac{1}{2}\alpha_3^4 l_3^2 e_1^2 + \frac{1}{2}\ddot{d}^2 \end{cases} \quad (۱۸)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_2 \mathbf{e} \le \frac{1}{2}\alpha_3^4 \left(\left(l_1^2 l_3^2 + \dot{l}_3^2 + l_3^2\right) e_1^2 + l_3^2 e_2^2 + e_3^2\right) + 2\dot{d}^2 + \frac{3}{2}\ddot{d}^2$$

با فرض کرانداری مشتقات اغتشاش $\left(|d^{(n)}|^2 \le \Delta_n{}^2\right)$، روابط (۱۸) و (۱۷) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2)\mathbf{e} \le \frac{1}{2}\alpha_2^4 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\xi} \mathbf{e} + 4\Delta_1^2 + \frac{3}{2}\Delta_2^2 \quad (۱۹)$$

که در آن ماتریس $\boldsymbol{\xi}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\xi} := \begin{bmatrix} a_{1_i}^2 + l_2^2 + \frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4}\left(l_1^2 l_3^2 + \dot{l}_3^2 + l_3^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & a_{2_i}^2 + \frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4} l_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\alpha_3^4}{\alpha_2^4} \end{bmatrix}$$

با تعریف $\delta := 4\Delta_1^2 + \frac{3}{2}\Delta_2^2$، معادله (۱۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{v} \le -\mathbf{e}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{e} + \delta \quad (۲۰)$$

که در آن $\tilde{\boldsymbol{\xi}} := \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 - \boldsymbol{\xi}$ است.

به‌منظور پایداری دینامیک خطای تخمین، باید مشتق تابع لیاپانوف منفی‌معین باشد. برای این منظور، علاوه‌بر مثبت‌معین بودن ماتریس $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ در هر لحظه، شرط $\lambda_{\min}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) > \delta$ نیز باید برآورده شود. در نتیجه، کافی است شرط‌های زیر همواره برقرار باشد:

$$\begin{aligned} & p_{11} := -\gamma_1 l_1 (1 + a_{1_i}) + (a_{1_i} - l_2)^2 (a_{2_i} - l_1) + l_1 l_2^2 \\ & \quad - a_{1_i}(l_3 + \dot{l}_2) + 0.5\gamma_3 l_3^2 (l_1^2 + \frac{\dot{l}_3^2}{l_3^2} + 1) < 0 \\ & p_{22} := a_{2_i}(\gamma_1 + a_{2_i}^2) + a_{2_i}(\gamma_2 + a_{1_i}) + 0.5\gamma_3 l_3^2 - l_2 a_{2_i} < 0 \\ & p := p_{11} p_{22} (\frac{1}{2} + a_{2_i}\alpha_2^2) - p_{31} p_{23} \left(-l_2 a_{2_i}^2 (a_{1_i} + a_{2_i}^2)\right. \\ & \quad \left. + l_2 \alpha_2^2 (a_{2_i}^2 - a_{1_i}) + p_{31} - l_2 + a_{1_i} p_{23}\right) < 0 \\ & \lambda_{\min}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) > \delta \end{aligned} \quad (۲۱)$$

که در آن p_{23} و p_{31} همانند قبل است؛ $\gamma_1 := \alpha_1^2/\alpha_2^2$، $\gamma_2 := 1/\alpha_2^2$، و $\gamma_3 := \alpha_3^2/\alpha_2^2$ پارامترهای ثابت و مثبت است. با توجه به شرط‌های (۲۱)، می‌توان نتیجه گرفت که مشتق تابع لیاپانوف همواره منفی‌معین خواهد بود، در نتیجه پایداری دینامیک خطای تخمین ثابت می‌شود.

همچنین با توجه به قانون تطبیق (۱۶)، همگرایی پارامترهای تطبیق‌پذیر به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\lim_{t\to\infty} e_i(t) = 0 \;\rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \dot{l}_i(t) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} l_i(t) = l_{i_0} \quad (۲۲)$$

که در آن l_{i_0} مقدار بهینه پارامترها است.

■ **توجه ۱:** شرط‌های (۲۱)، شروط محدودکننده‌ای نیستند و با تنظیم مناسب شرایط اولیه، بهره رویتگر و پارامترهای مقیاس‌گذاری همواره برقرار خواهند بود.

قضیه ۲: سیستم (۲) با در نظر گرفتن فرض‌های مسئله و با طراحی کنترل‌کننده (۹)، پایدار مجانبی است و اثر اغتشاشِ متغیر با زمان در خروجی به‌طور کامل حذف می‌شود، اگر ماتریس $\bar{\mathbf{Q}}$ که شامل ماتریس‌های سیستم و ماتریس لیاپانوف است، مثبت معین باشد و به‌نحوی طراحی شود که شرط $\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{Q}}) > \Delta_1^2$ برقرار باشد.

اثبات: به‌منظور اثبات پایداری کل سیستم تعمیم‌یافته، معادلات زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\bar{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{b}}_i u(t) + \mathbf{E}\dot{d}(t)\right) \\ \bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\bar{\mathbf{c}}_i \bar{\mathbf{x}}(t)\right) \end{cases} \quad (۲۳)$$

با جایگذاری کنترل‌کننده (۹) در سیستم (۲۳)، روابط به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\left(\bar{\mathbf{A}}_i + \bar{\mathbf{b}}_i \mathbf{K}\right)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E}\dot{d}(t)\right) \\ \bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\bar{\mathbf{c}}_i \bar{\mathbf{x}}(t)\right) \end{cases} \quad (۲۴)$$

به‌منظور اثبات پایداری، تابع لیاپانوف به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

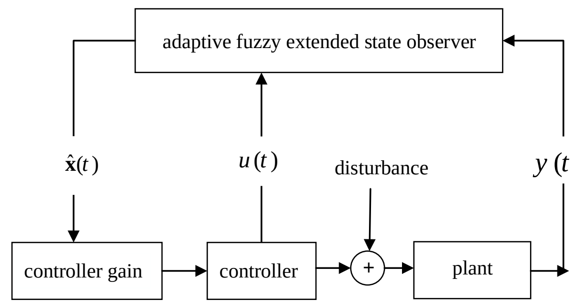
$$v_c\left(\mathbf{x}(t)\right)=\frac{1}{2}\bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (۲۵)$$

که در آن $\mathbf{Q}\in \mathrm{R}^{3\times3}$ ماتریس مثبت‌معین متقارن است. مشتق تابع لیاپانوف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

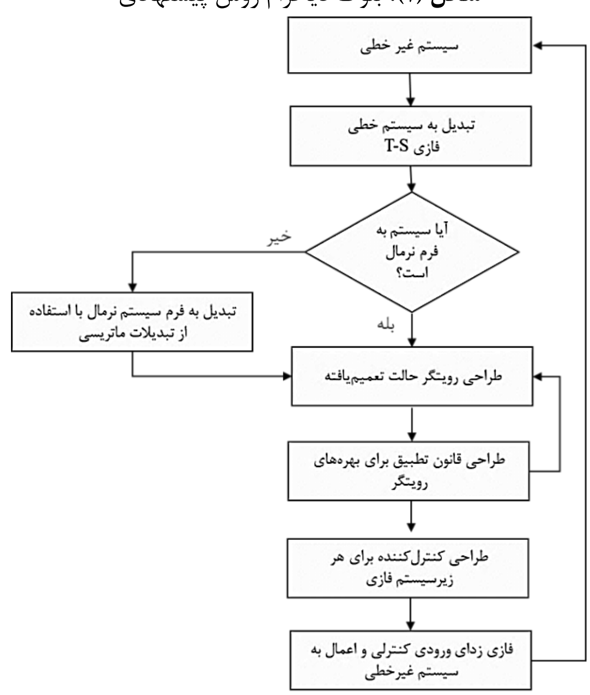
$$\begin{aligned}\dot{v}_c\left(\mathbf{x}(t)\right)&=\dot{\bar{\mathbf{x}}}^T(t)\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)+\bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Q}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)\\&=\left(\sum_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\left(\bar{\mathbf{A}}_i+\bar{\mathbf{b}}_i\mathbf{K}\right)\bar{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{E}\dot{d}(t)\right)\right)^T\mathbf{Q}\,\bar{\mathbf{x}}(t)\\&\quad+\bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Q}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\left(\bar{\mathbf{A}}_i+\bar{\mathbf{b}}_i\mathbf{K}\right)\bar{\mathbf{x}}(t)\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\mathbf{E}\dot{d}(t)\right)\right).\end{aligned} \quad (۲۶)$$

با تعریف $\mathbf{A}_{f_i}:=\bar{\mathbf{A}}_i+\bar{\mathbf{b}}_i\mathbf{K}$، رابطه (۲۶) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\dot{v}_c\left(\mathbf{x}(t)\right)=\sum_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)&\left[\bar{\mathbf{x}}^T(t)\left(\mathbf{A}_{f_i}{}^T\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\mathbf{A}_{f_i}\right)\bar{\mathbf{x}}(t)\right.\\&\left.+\bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{E}\dot{d}(t)+\left(\mathbf{E}\dot{d}(t)\right)^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)\right]\end{aligned} \quad (۲۷)$$



شکل (۱): بلوک دیاگرام روش پیشنهادی



شکل (۲): فلوچارت الگوریتم پیشنهادی

مشتق تابع لیاپانوف را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{v}_c\left(\mathbf{x}(t)\right)&=\sum_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(\bar{\mathbf{x}}^T(t)\left(\mathbf{A}_{\mathrm{f_i}}{}^T\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\mathbf{A}_{\mathrm{f_i}}\right)\bar{\mathbf{x}}(t)\right.\\&\quad\left.+\bar{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{E}\dot{d}(t)+\left(\mathbf{E}\dot{d}(t)\right)^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)\right)\\&=\sum\nolimits_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(-\bar{\mathbf{x}}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{x}}(t)+2\dot{d}(t)\mathbf{E}^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)\right)\\&\le\sum\nolimits_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(-\bar{\mathbf{x}}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{x}}(t)+\dot{d}^2(t)\right.\\&\quad\left.+\left(\mathbf{E}^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)\right)^T\left(\mathbf{E}^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)\right)\right)\\&\le\sum\nolimits_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(-\bar{\mathbf{x}}^T(t)\left(\tilde{\mathbf{Q}}-\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{Q}^T\right)\bar{\mathbf{x}}(t)\right.\\&\quad\left.+\dot{d}^2(t)\right)\end{aligned} \quad (۲۸)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{Q}}$ ماتریس مثبت‌معین است به‌طوری‌که بر طبق قضیه لیاپانوف [۳۹].

$$\mathbf{A}_{f_i}^T\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\mathbf{A}_{f_i}=-\tilde{\mathbf{Q}} \quad (۲۹)$$

با توجه به فرض کرانداری مشتقات اغتشاش $\left(|d^{(n)}|^2\le\Delta_n^2\right)$، رابطه (۲۸) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{v}_c\left(\mathbf{x}(t)\right)\le\sum\nolimits_{i=1}^{r}\omega_i\left(\mathbf{x}(t)\right)\left(-\bar{\mathbf{x}}^T(t)\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{x}}(t)+\Delta_1^2\right) \quad (۳۰)$$

که در آن $\bar{\mathbf{Q}}\in\mathrm{R}^{3\times3}$ به‌صورت $\bar{\mathbf{Q}}:=\tilde{\mathbf{Q}}-\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{Q}^T$ تعریف می‌شود. به‌منظور پایداری سیستم حلقه‌بسته، ماتریس $\bar{\mathbf{Q}}$ باید مثبت‌معین باشد و به‌نحوی طراحی شود که شرط $\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{Q}})>\Delta_1^2$ برقرار باشد.

■ **توجه ۲:** باید به این نکته توجه داشت که در رابطه (۲۹)، همواره یافتن ماتریس مثبت‌معین و یکتای $\mathbf{Q}$ به‌سادگی میسر نیست؛ بنابراین، در روند اثبات پایداری سیستم حلقه‌بسته، انتظار می‌رود مقداری محافظه‌کاری اعمال شده باشد.

نمودار بلوکی روش پیشنهادی در شکل **۱** نشان داده شده است.

الگوریتم روش پیشنهادی، با توجه به بخش تحلیل پایداری، به شرح زیر ارائه می‌شود:

۱) خطی‌سازی سیستم غیرخطی حول نقاط موردنظر (تعداد قوانین فازی برابر است با تعداد نقاط خطی‌سازی)

۲) سیستم خطی‌سازی شده به فرم سیستم تاکاگیسوگنو در (۳) بازنویسی شود.

۳) توابع عضویت و سایر بخش‌های سیستم فازی (فازی‌گر، موتور استنتاج فازی، و فازی‌زدا) مشخص شود

۴) گر سیستم به فرم زنجیره انتگرالی باشد یک حالت به حالت‌های سیستم اضافه شود (فرم تعمیم‌یافته در (۴)

۵) با استفاده از (۸) و (۹) برای هر زیرسیستم، رویتگر تعمیم‌یافته حالت و ورودی کنترلی طراحی شود

تعیین قانون تطبیق بهره‌های رویتگر با استفاده از (۱۶)

■ **توجه ۳**: شرایط اولیه بهره‌های رویتگر و پارامترهای مقیاس‌گذاری باید شرایط (۲۱) برآورده کند.

فلوچارت الگوریتم پیشنهادی در شکل **۲** نشان داده شده است.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، به‌منظور نشان دادن کارایی رویتگر فازی-تطبیقی پیشنهادی، سیستم آونگ وارون در نظر گرفته شده که یکی از سیستم‌های غیرخطی برای محک روش‌های کنترلی است. در شکل **۳**، نمایش آونگ وارون با جرم m با میله‌ای به طول l بر روی ارابه‌ای به جرم M که ارابه با نیروی u تحریک می‌شود، نشان داده شده.

معادلات فضای حالت آونگ وارون در حضور اغتشاش به‌صورت زیر تعریف می‌شود (پیوست ۱) [۴۰]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{g\sin x_1 - \dfrac{mlx_2^2\cos x_1 \sin x_1}{M+m}}{\dfrac{4l}{3} - mla\cos^2 x_1} + \dfrac{a\cos x_1}{\dfrac{4l}{3} - mla\cos^2 x_1}u(t) \\ \quad + b_d d(t) \end{cases} \tag{۳۱}$$

که در آن x_1 و x_2 به ترتیب موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای آونگ است. به‌منظور شبیه‌سازی، پارامترها با مقادیر زیر انتخاب شده‌اند:

$$m = 0.05\text{ kg}\ ,\ M = 0.95\text{ kg}\ ,\ l = 1\text{m}\ ,\ a = \frac{1}{M+m}$$

قوانین سیستم فازی در بازه $x_1 \in [-\pi/3, \pi/3]$ به‌صورت زیر در نظر گرفته شده:

IF x_1 is about $(\pi/3)$ and x_2 is about $(\pi/3)$,
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_9\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_9 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

IF x_1 is about $(-\pi/3)$ and x_2 is about $(-\pi/3)$,
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

IF x_1 is about $(-\pi/3)$ and x_2 is about $(\pi/3)$,
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_3\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_3 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

IF x_1 is about $(\pi/3)$ and x_2 is about $(-\pi/3)$,
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_7\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_7 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

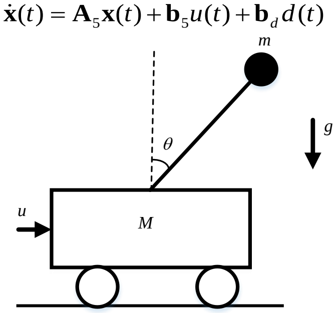
IF x_1 is about $(-\pi/3)$ and x_2 is about (0),
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

IF x_1 is about $(\pi/3)$ and x_2 is about (0),
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_8\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_8 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

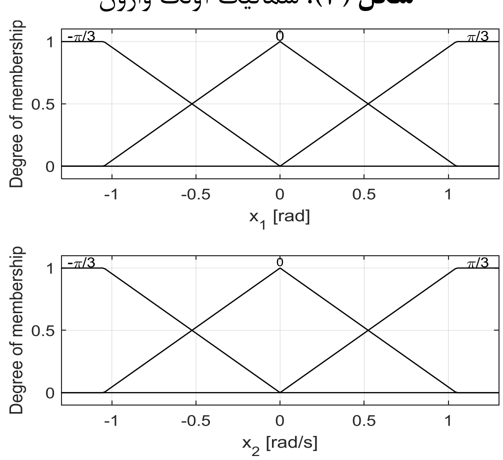
IF x_1 is about (0) and x_2 is about $(-\pi/3)$,
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_4\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_4 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

IF x_1 is about (0) and x_2 is about $(\pi/3)$,
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_6\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_6 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$

IF x_1 is about (0) and x_2 is about (0),
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_5\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_5 u(t) + \mathbf{b}_d d(t)$



شکل (۳): شماتیک آونگ وارون



شکل (۴): تابع عضویت متغیرهای حالت x_1 و x_2

توابع عضویت در این قواعد، در شکل **۴** نشان داده شده‌اند. ماتریس‌ها و بردارهای سیستم، از خطی‌سازی توابع غیرخطی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4.0027 & -0.0345\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3.9871 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4.0027 & 0.0345\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7.7532 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7.7922 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_6=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7.7532 & 0.0345\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_7=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4.0031 & 0.0345\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_8=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7.7532 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_9=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4.0031 & -0.0345\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_d=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_3=\mathbf{b}_7=\mathbf{b}_8=\mathbf{b}_9=\begin{bmatrix}0\\ 0.4097\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_4=\mathbf{b}_5=\mathbf{b}_6=\begin{bmatrix}0\\ 0.7792\end{bmatrix}$$

فرض می‌شود در لحظه ۱۰ ثانیه، اغتشاش به‌صورت $d(t)=1-e^{-0.5t}$ به سیستم اعمال می‌شود. حال با استفاده از پارامترهای طراحی، رویتگر (۸)، و قانون کنترل (۹)، نتایج شبیه‌سازی با مرجع [۲۱] مقایسه می‌شود. در شکل **۵**، مقایسه کلی بین حالت‌ها و تخمین آن با استفاده از رویتگر تعمیم‌یافته فازی-تطبیقی و رویتگر فازی نشان داده می‌شود. همان‌طور که در شکل **۵** مشاهده می‌شود، در رویتگر حالت تعمیم‌یافته فازی-تطبیقی سرعت همگرایی افزایش، خطای تخمین و دامنه فراجهش کاهش یافته است. با فرض شرایط اولیه یکسان، روش پیشنهادی در مدت‌زمان کوتاهی به حالت تعادل می‌رسد و این در حالی است که در رویتگر فازی در [۲۱] مدت‌زمان بیشتری طول می‌کشد تا سیستم به حالت پایدار خود برسد. همچنین ملاحظه می‌شود که همگرایی مقدار تخمین حالت دوم به مقدار واقعی، در رویتگر فازی-تطبیقی سریع‌تر انجام شده و حالت‌ها با دقت بیشتری تخمین زده شده است. درصورتی‌که در روش [۲۱]، اختلاف مقدار واقعی حالت با میزان تخمین زده شده، بسیار زیاد است. در واقع رویتگر فازی-تطبیقی، به‌خوبی توانسته حالت‌های سیستم را با خطا بسیار کمتر تخمین بزند و میزان فراجهش کمتری نسبت به رویتگر فازی در [۲۱] داشته باشد. در شکل **۶** سیگنال‌های کنترلی را نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در رویتگر فازی- تطبیقی، دامنه ورودی کنترلی در حالت گذرا و حالت ماندگار بسیار کمتر از کنترل‌کننده فازی غیرتطبیقی است.

بیشینه دامنه سیگنال کنترلی رویتگر فازی-تطبیقی و رویتگر فازی به ترتیب ۱۴/۶۲ و ۳۰/۳۸ نیوتن است.

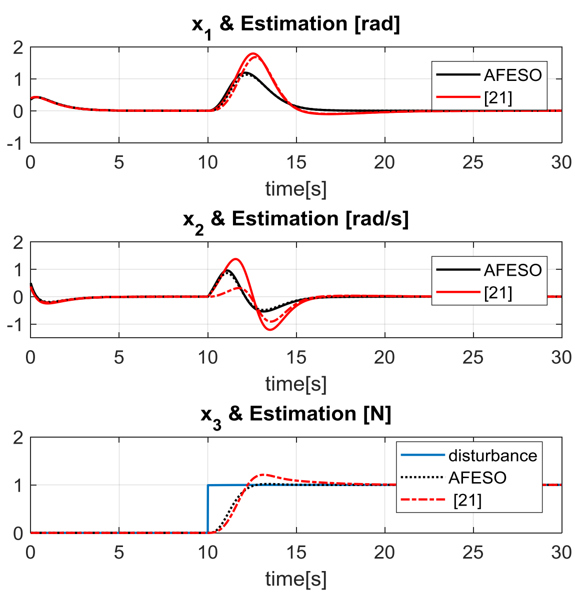
به‌منظور ارزیابی بهتر عملکرد رویتگر فازی-تطبیقی پیشنهادی، از معیار مجذور میانگین مربعات خطا (RMSE) استفاده می‌شود.

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_k(i)-\hat{x}_k(i)\right)^2}{n}}\qquad k=1,2,3 \tag{۳۲}$$

که در آن n تعداد داده‌ها، x_k حالت سیستم، و $\hat{x}_k$ تخمین آن است. در جدول **۱**، مقایسه کمی میان رویتگر فازی-تطبیقی و رویتگر فازی انجام شده است.

جدول (۱): مقایسه رویتگر پیشنهادی و رویتگر فازی به ازای معیارهای ارزیابی

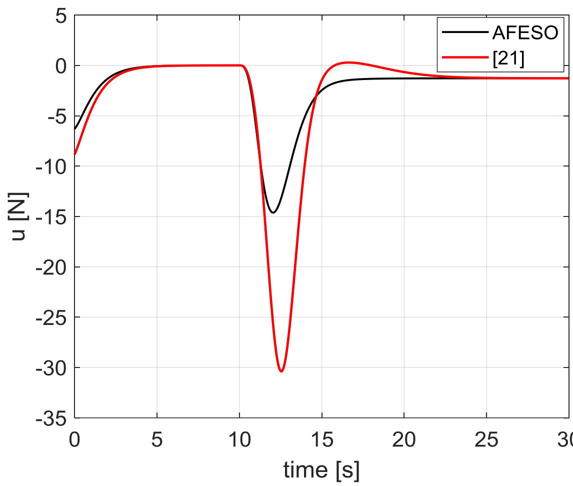
	RSME x_1	RSME x_2	RSME x_3	بیشینه خطا x_1	بیشینه خطا x_2	بیشینه خطا x_3
AFESO	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۹	۰/۰۲
[۲۱]	۰/۰۸	۰/۱۸	۰/۲	۰/۴	۰/۹	۰/۲



شکل (۵): حالت‌های سیستم افزوده و تخمین آن‌ها

با توجه به نتایج حاصل‌شده در جدول **۱**، روش پیشنهادی در مقایسه با رویتگر فازی، RMSE و بیشینه خطای کمتری دارد؛ به‌عبارت‌دیگر، حالت‌های سیستم و اغتشاش خارجی را با دقت بالاتری تخمین می‌زند. در رویتگر فازی، بهره رویتگر ثابت در نظر گرفته شده، اما در رویتگر پیشنهادی، بهره

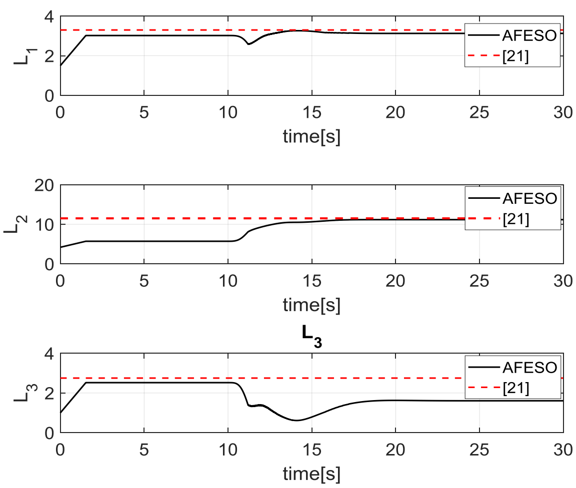
تطبیقی تابعی از خطای تخمین است و با توجه به میزان خطای تخمین، بهره رویتگر افزایش و یا کاهش می‌یابد که این امر موجب عملکرد بهتر سیستم در حضور اغتشاش خارجی می‌شود.



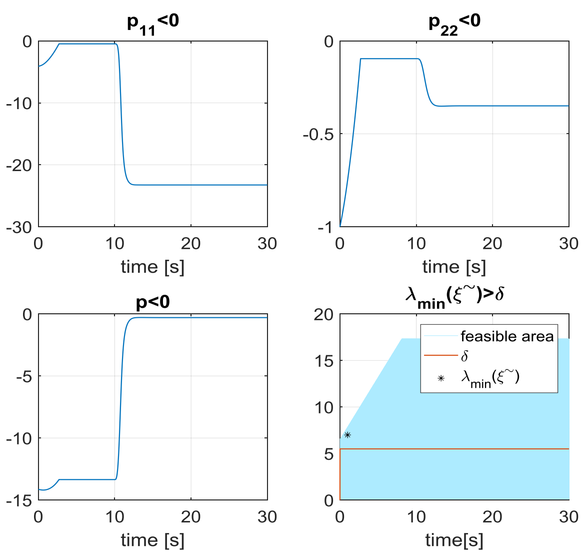
شکل (۶): سیگنال‌های کنترلی

در شکل **۷**، تغییرات بهره رویتگر تطبیقی نشان داده شده است. همان‌گونه که شکل **۷** نشان می‌دهد، رویتگر حالت با کمک بهره تطبیقی قبل از اعمال اغتشاش توانسته است به‌خوبی حالت‌های سیستم را تخمین زده و بعد از پایداری حالت‌های سیستم، به مقدار ثابتی همگرا شود. در لحظه اعمال اغتشاش، بهره رویتگر تغییر یافته تا ضمن تخمین آن، اثر آن در خروجی حذف شده و دوباره به مقدار ثابتی همگرا شود. یکی از دلایلی که ورودی کنترلی رویتگر فازی-تطبیقی نسبت به رویتگر فازی دامنه کمتری دارد این است که بهره رویتگر با توجه به میزان خطای تخمین، تغییر یافته است؛ اما در رویتگر فازی با توجه به ثابت بودن بهره رویتگر، ضمن این‌که منجر به تلاش کنترلی بیشتری می‌شود، ردیابی نیز به‌خوبی روش پیشنهادی صورت نگرفته است. خطوط خط‌چین در شکل **۷**، نشان‌دهنده‌ی مقدار بهره رویتگر در مرجع [۲۱] است. کاملاً واضح است که کمتر بودن ضرایب تطبیقی منجر به کاهش دامنه ورودی کنترلی می‌شود.

همچنین در شکل **۸**، شرایط قضیه ۱ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شرایط قضیه همواره برقرار است. شروط p_{11} و p_{12} در ابتدا محافظه‌کاری کمی دارد اما با همگرا شدن بهره‌های تطبیقی رویتگر و حالت‌های سیستم، محافظه‌کاری افزایش می‌یابد. این در حالی است که در شرط $p<0$، با همگرایی بهره رویتگر، محافظه‌کاری کاهش می‌یابد. همچنین شرط $\lambda_{\min}(\tilde{\xi})>\delta$ و مثبت‌معین بودن ماتریس $\tilde{\xi}$ نیز همواره برقرار است. در شکل **۹**، شرط قضیه **۲** نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل **۹** ملاحظه می‌شود، ماتریس $\tilde{\mathbf{Q}}$ مثبت معین و شرط $\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{Q}})>\Delta_1^2$ نیز برقرار است.



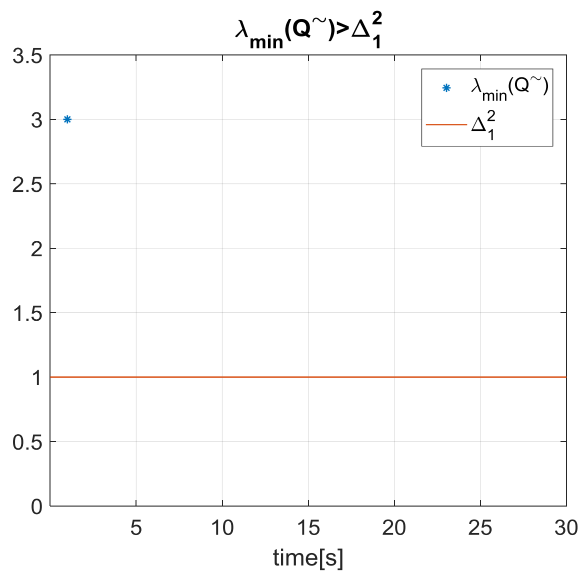
شکل (۷): بهره تطبیقی رویتگر پیشنهادی: خط پُر و مشکی، بهره ثابت مرجع [۲۱]: خط‌چین قرمز



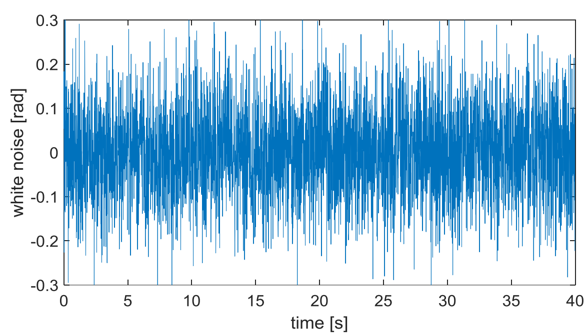
شکل (۸): برآورده شدن شرایط قضیه ۱

در روش پیشنهادی نسبت به رویتگر فازی، حجم محاسبات کمی افزایش یافته اما در عوض تعداد پارامترهای طراحی و

محافظه‌کاری کاهش یافته و عملکرد سیستم از نقطه نظر سرعت همگرایی، دامنه ورودی کنترلی، و مقاوم بودن در حضور اغتشاش متغیر با زمان بهبود چشمگیری داشته است. در رویتگر فازی، اگر دامنه اغتشاش افزایش یابد، منجر به نوسانات در حالت‌های سیستم و افزایش دامنه فراجهش می‌شود؛ اما با توجه به تطبیقی بودن بهره رویتگر در روش پیشنهادی، از نوسانات و فراجهش با دامنه زیاد جلوگیری می‌شود. در ادامه، به‌منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی در حضور نویز اندازه‌گیری، نویز سفید با دامنه ±۰/۳ رادیان به خروجی سیستم اعمال شد (شکل ۱۰).



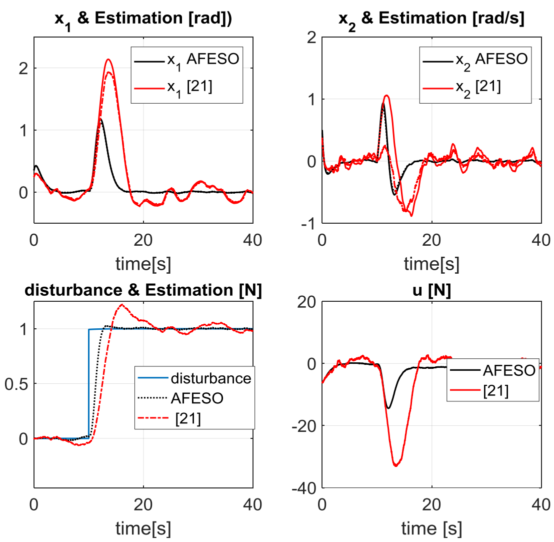
شکل (۹): شرط قضیه ۲



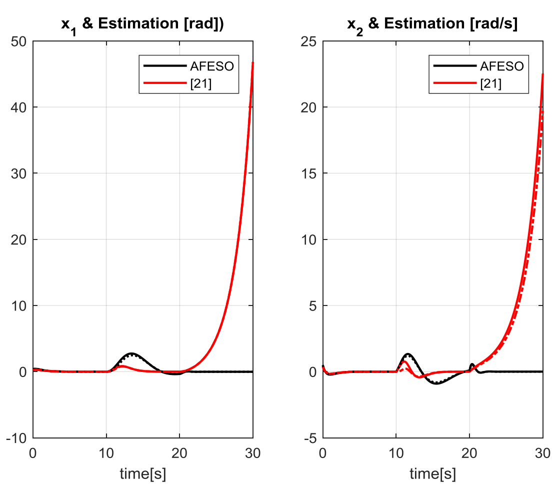
شکل (۱۰): نویز اندازه‌گیری در خروجی

شکل **۱۱** عملکرد دو روش را نشان می‌دهد. واضح است که روش پیشنهادی به علت تطبیقی بودن رویتگر و همچنین مقاوم بودن آن، به‌خوبی توانسته اثر نویز را تضعیف کرده و دامنه نوسانات را نسبت به رویتگر فازی به مقدار قابل‌توجهی کاهش دهد. نوسانات کمتر در روش پیشنهادی، منجر به کاهش دامنه ورودی کنترلی می‌شود. در واقع روش پیشنهادی در مقایسه با رویتگر فازی نسبت به اعمال نویز در خروجی مقاوم‌تر است. با افزایش دامنه نویز به مقدار ±۰/۴ رادیان، روش پیشنهادی همچنان پایدار خواهد بود اما منجر به ناپایداری رویتگر فازی می‌شود.

به‌منظور بررسی میزان مقاوم بودن رویتگر فازی-تطبیقی پیشنهادی در برابر تغییر پارامترهای سیستم، جرم آونگ در لحظه ۲۰ ثانیه به‌اندازه ۵۰ درصد مقدار اولیه‌اش افزایش می‌یابد. در شکل **۱۲**، نتایج شبیه‌سازی حاصل از تغییر پارامتر سیستم نشان داده شده است.



شکل (۱۱): مقایسه عملکرد دو روش در مقابل نویز اندازه‌گیری



شکل (۱۲): مقایسه عملکرد دو روش در مقابل تغییر جرم آونگ در لحظه ۲۰ ثانیه

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، روش پیشنهادی به علت تطبیقی بودن بهره، به‌خوبی توانسته خود را با تغییر ناگهانی پارامترهای سیستم وفق دهد، درحالی‌که رویتگر فازی به علت ثابت بودن بهره، قادر به جبران تغییرات پارامترهای سیستم نبوده و ناپایدار می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رویتگر حالت تعمیم‌یافته فازی-تطبیقی ارائه گردید تا محدودیت‌های روش کلاسیک از جمله وابستگی به پهنای باند رویتگر را برطرف کند. بهره رویتگر، تابعی از خطای تخمین است که با استفاده از قانون تطبیق تنظیم می‌شود. این کار منجر به کاهش محافظه‌کاری و بهبود عملکرد سیستم در حضور اغتشاش متغیر با زمان شده است. همچنین با استفاده از پارامترهای مقیاس‌گذاری می‌توان سرعت همگرایی حالت‌های سیستم را تنظیم کرد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در مقایسه با رویتگر فازی، روش پیشنهادی از نقطه نظر سرعت همگرایی، دقت در تخمین اغتشاش و حالت‌های سیستم، کاهش دامنه ورودی کنترلی و کاهش محافظه‌کاری، عملکرد بهتری داشته است. علاوه بر آن، رویتگر پیشنهادی در حضور نویز اندازه‌گیری، اغتشاش خارجی و تغییر ناگهانی پارامترهای سیستم بسیار مقاوم‌تر است. تحلیل پایداری و بررسی همگرایی خطای تخمین با استفاده از نظریه لیاپانوف ارائه شد. در ادامه این پژوهش، می‌توان علاوه بر در نظر گرفتن اغتشاش خارجی، روش پیشنهادی را در حضور سیگنال عیب نیز موردبررسی قرار داد. همچنین با تغییر نوع رویتگر، می‌توان روش پیشنهادی را به کلاس گسترده‌تری از سیستم‌ها همانند سیستم‌های چندمتغیره در حضور اغتشاش منطبق و غیرمنطبق نیز موردبررسی و مطالعه قرار داد.

۶- فهرست علائم و اختصارات

$\mathbf{x}$	بردار حالت‌های سیستم
$\hat{\mathbf{x}}$	بردار تخمین حالت‌های سیستم
$\lambda_{\min}$	کوچک‌ترین مقدار ویژه
$\boldsymbol{\alpha}$	پارامتر مقیاس‌گذاری
$\mathrm{R}^{n\times 1}$	فضای اقلیدسی با ابعاد $n\times 1$
RMSE	مجذور میانگین مربعات خطا
بالانویس‌ها	
T	ترانهاده ماتریس
-1	وارون ماتریس

۷- پیوست

با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات حرکت آونگ وارون، روابط آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود که در آن θ موقعیت آونگ از محور عمودی و $\dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای آونگ است. با در نظر گرفتن $\left[x_1\ \ x_2\right]^T=\left[\theta\ \ \dot{\theta}\right]^T$ معادلات فضای حالت به‌صورت معادله (۳۱) بازنویسی می‌شود.

$$\ddot{\theta}=\frac{\mathrm{g}\sin(\theta)-\dfrac{ml\dot{\theta}^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{M+m}+a\cos(\theta)u}{\dfrac{4l}{3}-mla\cos^2(\theta)}+d(t)$$

۸- مراجع

[1] Ahmad S, Ali A. Active disturbance rejection control of DC–DC boost converter: A review with modifications for improved performance. IET Power Electronics. 2019;12(8):2095-107.

[2] Wei Y, Jia S, Liu K. A survey on anti-disturbance control of switched systems with input saturation. Systems Science & Control Engineering. 2020;8(1):241-8.

[3] Chen W-H, Yang J, Guo L, Li S. Disturbance-observer-based control and related methods—An overview. IEEE Transactions on industrial electronics. 2015;63(2):1083-95.

[4] Yuan Y, Cheng L, Wang Z, Sun C. Position tracking and attitude control for quadrotors via active disturbance rejection control method. Science China Information Sciences. 2019;62(1):1-10.

[5] Han T, Li J, Guan Z-H, Cai C-X, Zhang D-X, He D-X. Containment control of multi-agent systems via a disturbance observer-based approach. Journal of the Franklin Institute. 2019;356(5):2919-33.

[6] Sui S, Tong S, Chen CP. Finite-time filter decentralized control for nonstrict-feedback nonlinear large-scale systems. IEEE Transactions on Fuzzy systems. 2018;26(6):3289-300.

[7] Ren C-E. Adaptive Fuzzy Disturbance Observer-Based Control for Nonlinear Uncertain Systems with General Exogenous Disturbances.

[20] Zhang C, Zhu J, Gao Y. Order and parameter selections for active disturbance rejection controller. Control Theory & Applications. 2014;31(11):1480-5.

[21] Naghdi M, Sadrnia MA. A novel fuzzy extended state observer. ISA transactions. 2020;102:1-11.

[22] Herbst G. Transfer function analysis and implementation of active disturbance rejection control. Control Theory and Technology. 2021;19(1):19-34.

[23] Nie ZY, Zhang B, Wang QG, Liu RJ, Luo JL. Adaptive active disturbance rejection control guaranteeing uniformly ultimate boundedness and simplicity. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020;30(17):7278-94.

[24] Xue W, Bai W, Yang S, Song K, Huang Y, Xie H. ADRC with adaptive extended state observer and its application to air–fuel ratio control in gasoline engines. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2015;62(9):5847-57.

[25] Han L, Tang G, Cheng M, Huang H, Xie D. Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode tracking control for an underwater vehicle-manipulator system with extended state observer. Journal of Marine Science and Engineering. 2021;9(5):501.

[26] Kazemi A, Abjadi N. Fuzzy Adaptive Control Based on MRAS for SISO Nonlinear Systems with Uncertainty. Tabriz Journal of Electrical Engineering. 2018;47(4):1613-25.

[27] Pu Z, Yuan R, Yi J, Tan X. A class of adaptive extended state observers for nonlinear disturbed systems. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2015;62(9):5858-69.

[28] Li Y, Chen Y. The Research of Gain Adaptive Linear Extended State Observer (ALESO) Based Active Disturbance Rejection Speed Control For Permanent Magnet Synchronous Motor. Electrica. 2021;21(1):20-31.

[29] Zhao ZL, Ma P, Chen S. A new nonlinear extended state observer design for output tracking of uncertain nonlinear systems. Advanced Control for Applications: Engineering and Industrial Systems. 2021;3(2):e46.

[30] Yang Y, Tan J, Yue D. Prescribed performance tracking control of a class of uncertain pure-feedback nonlinear systems with input saturation. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2018;50(5):1733-45.

[31] Izadinasab A, Ghanbari M. Control of sensorless PMSM using state dependent model International Journal of Fuzzy Systems. 2021;23(5):1453-61.

[8] Khamar M, Edrisi M. Designing a nonlinear disturbance observer and LQR based fractional order backstepping controller for a wearable rehabilitation robot. Modares Mechanical Engineering. 2018;18(9):229-41.

[9] Hua C-C, Wang K, Chen J-N, You X. Tracking differentiator and extended state observer-based nonsingular fast terminal sliding mode attitude control for a quadrotor. Nonlinear Dynamics. 2018;94(1):343-54.

[10] Feng H, Guo B-Z. Active disturbance rejection control: Old and new results. Annual Reviews in Control. 2017;44:238-48.

[11] Hall CE, Shtessel YB. Sliding mode disturbance observer-based control for a reusable launch vehicle. Journal of guidance, control, and dynamics. 2006;29(6):1315-28.

[12] Tatsumi J, Gao Z, editors. On the enhanced ADRC design with a low observer bandwidth. Proceedings of the 32nd Chinese control conference; 2013: IEEE.

[13] Han J. A class of extended state observers for uncertain systems. Control and decision. 1995;10(1):85-8.

[14] Xue W, Madonski R, Lakomy K, Gao Z, Huang Y. Add-on module of active disturbance rejection for set-point tracking of motion control systems. IEEE Transactions on Industry Applications. 2017;53(4):4028-40.

[15] Zhang Y, Zhang J, Wang L, Su J. Composite disturbance rejection control based on generalized extended state observer. Isa Transactions. 2016;63:377-86.

[16] Castillo A, García P, Sanz R, Albertos P. Enhanced extended state observer-based control for systems with mismatched uncertainties and disturbances. ISA transactions. 2018;73:1-10.

[17] Yoo D, Yau S-T, Gao Z. Optimal fast tracking observer bandwidth of the linear extended state observer. International Journal of Control. 2007;80(1):102-11.

[18] Chen S, Bai W, Huang Y, editors. ADRC for systems with unobservable and unmatched uncertainty. 2016 35th Chinese Control Conference (CCC); 2016: IEEE.

[19] Fu C, Tan W. Tuning of linear ADRC with known plant information. ISA transactions. 2016;65:384-93.

reference adaptive system and adaptive augmented observer. Journal of Modeling in Engineering. 2021;18(63):85-95.

[32] Yao W, Hai Tao Y, Rong G, Dong Yang L, Ningjun F, Zheng X. Fuzzy adaptive sliding mode control of PMSM based on extended state observer. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. 2020;63(3):391-407.

[33] Fallah Ghavidel H, Akbarzadeh Kalat A. Observer-based hybrid adaptive fuzzy control for affine and nonaffine uncertain nonlinear systems. Neural Computing and Applications. 2018;30(4):1187-202.

[34] Fallah Ghavidel H, Akbarzadeh Kalat A, Ghorbani V. Observer-Based robust adaptive fuzzy approach for current control of robot manipulators by estimation of uncertainties. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(6):286-94.

[35] Zhao D, Lam HK, Li Y, Ding SX, Liu S. A novel approach to state and unknown input estimation for Takagi–Sugeno fuzzy models with applications to fault detection. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2020;67(6):2053-63.

[36] Hyun C-H, Park C-W, Kim S. Takagi–Sugeno fuzzy model based indirect adaptive fuzzy observer and controller design. Information Sciences. 2010;180(11):2314-27.

[37] Lendek Z, Guerra TM, Babuska R, De Schutter B. Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models: Springer; 2011.

[38] Li S, Yang J, Chen W-H, Chen X. Generalized extended state observer based control for systems with mismatched uncertainties. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2011;59(12):4792-802.

[39] Cui M, Liu H, Liu W. Extended state observer-based adaptive control for a class of nonlinear system with uncertainties. Control and Intelligent Systems. 2017;45(3):132-41.

[40] Bahrami V, Mansouri M, Teshnehlab M. Designing Model Reference Fuzzy Controller Based on State Feedback Integral Control for Nonlinear Systems. Journal of Control. 2015;9(3):1-18.

Journal of Aerospace Mechanics/ 2022/ Vol.18/ No.2/109-124

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.2.8.8

Designing an Adaptive Fuzzy Extended State Observer for Nonlinear Affine Systems with External Disturbance

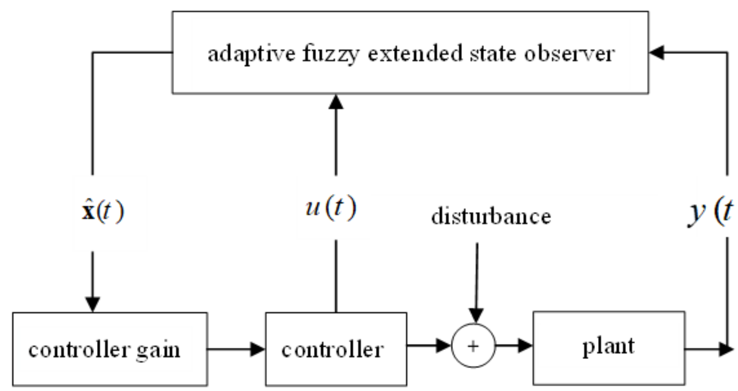
Mahtab Delpasand[1], Mohammad Farrokhi[2*]

[1] Ph.D. Student, Faculty of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
[2] Professor, Faculty of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- The observer gains are time-varying and adjusted using an adaptive law.
- The Takagi-Sugeno fuzzy system is used for modeling that, unlike Mamdani methods, provides a more precise and comprehensive analysis.
- The stability of the proposed method and the convergence of the estimation error are analyzed using the Lyapunov stability Theory.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 27 December 2021
Received in revised form: 15 January 2022
Accepted: 6 February 2022
Available online: 20 February 2022
*Correspondence: farrokhi@iust.ac.ir

How to cite this article:
M. Delpasand, M. Farrokhi. Designing an Adaptive Fuzzy Extended State Observer for Nonlinear Affine Systems with External Disturbance. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(2):109-124.

Keywords:
Adaptive fuzzy observer
Observer estimation error
Lyapunov stability
Inverted pendulum

ABSTRACT

In this paper, an adaptive fuzzy extended state observer is proposed to estimate the states and external disturbances simultaneously for Single-Input-Single-Output nonlinear affine systems. The observer gains are time-varying and adjusted using an adaptive law. The Takagi-Sugeno fuzzy system is used for modeling that, unlike Mamdani methods, provides a more precise and comprehensive analysis. The proposed adaptive fuzzy observer is designed to relax the limitations of the extended state observers and improve system performance as compared to the classical methods in presence of time-varying disturbances. Moreover, the stability of the proposed method and the convergence of the estimation error are analyzed using the Lyapunov stability Theory. The performance of the proposed method is shown in simulations of control of the inverted pendulum. The simulation results, as compared to the non-adaptive fuzzy observer, show better performance in terms of transient and steady-state responses, control input amplitude, and robustness in presence of measurement noise and external disturbances.