



## مطالعه پدیده‌های پرش و آشوب در تیر غیرخطی یکسرگردار با جرم متمرکز تحت اثرات جریان آب

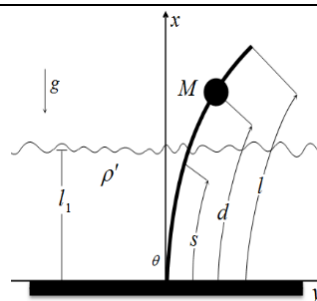
پویا سروی<sup>۱</sup>، علیرضا نداف اسکویی<sup>۲\*</sup>، امیرحسین امیدی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

<sup>۳</sup> کارشناس ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

### چکیده گرافیکی



### برجسته‌ها

- ارتعاشات تیر یک‌سرگردار تحت اثرات جریان آب
- رفتار پدیده پرش در چهار مود اول
- تحلیل کامل پدیده‌های غیرخطی شامل پرش، دوشاخگی و آشوب
- مقایسه روش حل تحلیلی با مدل‌سازی عددی

### چکیده

در تحلیل بسیاری از سازه‌های دریایی نظیر ستون‌ها و سازه‌های نفتی، تکیه‌گاه‌های دکل‌های نفتی و برج‌های احاطه‌شده توسط آب، معمولاً از مدل تیر یکسرگردار استفاده می‌گردد. این مدل‌ها معمولاً وزن یک جرم متمرکز را تحمل می‌کنند که دامنه پاسخ این سازه‌ها در حین طراحی از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. در این مقاله تیر غیرخطی یکسرگردار مغروق در سیال، با یک جرم متمرکز تحت اثرات جریان هارمونیک آب مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از روش بالانس هارمونیک، پاسخ تیر غیرخطی یکسرگردار با سه جمله غیرخطی در چهار مود اول تعیین می‌شود. بررسی پاسخ فرکانسی حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد پدیده پرش در ناحیه پاسخ سه‌گانه بین نقاط دوشاخگی رخ می‌دهد. پدیده پرش در مود اول از نوع سخت شونده و در مودهای دو تا چهار از نوع نرم‌شونده است. هر یک از جمله‌های غیرخطی اثرات متفاوتی بر روی رفتار ارتعاشی سیستم و پدیده پرش دارد. رفتار تیر در فضای حالت در کنار پاسخ زمانی و نگاشت پوانکاره نشان می‌دهد مسیر منحنی فاز دارای نقاط پایداری مختلفی است. در انتها پدیده آشوب در تیر غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفت، در نقاط دوشاخگی رفتار سیستم آشوبناک است و جمله غیرخطی هندسی مؤثرترین اثر را در بی‌نظمی پاسخ دارد. بررسی پدیده پرش با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی و مقایسه دو روش با یکدیگر به منظور صحت‌گذاری نتایج، مطالعه پدیده پرش در چهار مود اول، بررسی جامع پدیده‌های غیرخطی از جمله دوشاخگی و آشوب در منحنی‌های فاز، پاسخ زمانی، پوانکاره و نگاشت، از نوآوری‌های تحقیق در

### مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۱۵

بازنگری: ۱۴۰۰/۱۱/۰۶

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۰۸

ارائه برخط: ۱۴۰۰/۱۲/۰۹

\*نویسنده مسئول: anadaf@ihu.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

تیر غیرخطی

ارتعاشات غیرخطی

پدیده پرش

پدیده آشوب

زمینه تیر غیرخطی مغروق است.

## ۱- مقدمه

در تحلیل متداول ارتعاشات، معادلات حاکم بر سیستم را به صورت خطی تحت تحریک معین در نظر می‌گیرند؛ اما در واقعیت، رفتار دینامیکی و ارتعاشی بیشتر سیستم‌ها به صورت غیرخطی می‌باشد. پدیده‌هایی در سیستم‌های غیرخطی رخ می‌دهد که در سیستم‌های خطی قابل مشاهده نیست. یکی از سیستم‌های غیرخطی رایج که به دلیل کاربردهای فراوان مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است تیر یکسرگردار می‌باشد. تیر یکسرگردار تحت تحریک گسترده مانند نیروهای باد و موج در مدل‌سازی ساختمان‌های بلند، برج‌ها، اجزای ماشین‌آلات، پایه‌های بارگیری نفت، پایه‌های پل‌ها، هواپیما، فضاپیما و... کاربرد زیادی دارد.

بسیاری از محققین به بررسی پاسخ تیر غیرخطی تحت تحریک معین پرداخته‌اند. داسیلوا و گلین [۱ و ۲] معادله دیفرانسیلی جزئی تیر غیرخطی یکسرگردار سه‌بعدی تحت تحریک گسترده را با روش اصل همیلتون استخراج کردند. همچنین آن‌ها تأثیر جمله‌های غیرخطی بر رفتار تیر یکسرگردار را تحت بار گسترده سینوسی تعیین نمودند. زاودنی و نایفه [۳] معادله دیفرانسیلی جزئی تیر غیرخطی یکسرگردار با جرم متمرکز را به تئوری اویلر-برنولی به دست آوردند. همچنین آن‌ها پاسخ معادله حاکم بر تیر تحت تحریک پارامتری (تحریک محوری) را با روش تحلیلی

تعیین و با روش آزمایشگاهی مقایسه کردند. نتایج به دست آمده تطابق خوبی داشتند. علت فرض تحریک محوری محدودیت در انجام تست تجربی می‌باشد. نایفه و پی [۴] پاسخ غیرخطی تیر یکسرگردار را تحت تحریک پارامتری با استفاده از روش مقیاس زمانی و فرآیند گلرکین مطالعه نمودند. آن‌ها نشان دادند جمله غیرخطی هندسی تأثیر سخت‌شوندگی و جمله غیرخطی اینرسی تأثیر نرم‌شوندگی در رفتار تیر دارد. الکاسیا و همکاران [۵] پاسخ حالت پایای تیر باریک مغروق با جرم متمرکز تحت تحریک معین را مطالعه کردند. پاسخ فرکانسی حالت پایا را در دو مود اول اصلی با استفاده از روش بالانس هارمونیکی تعیین نمودند. همچنین الکاسیا و هم‌دان [۶] علاوه بر کارهای انجام شده در مرجع [۵] به پدیده‌های پرش و دوشاخگی پرداختند. دلگادو [۷] یک تیر یکسرگردار بسیار منعطف را با استفاده از روش باقیمانده وزنی، فرآیند گلرکین همراه با تکنیک نیومارک و یک فرایند تکرار مورد بررسی قرارداد. مطلبی و همکاران [۸] با استفاده از روش بالانس هارمونیکی به تجزیه و تحلیل پدیده‌های پرش و دوشاخگی بر روی یک تیر غیرخطی هندسی یکسرگردار پرداختند. گو-ژو وانگ و همکاران [۹] ارتعاشات تیر غیرخطی یکسرگردار هندسی معلق تحت تأثیر نیروی گرانشی را بررسی نمودند. از روش گلرکین و شکل مود خطی برای استخراج معادله غیرخطی حاکم بر ارتعاشات تیر غیرخطی استفاده شد. برای حل

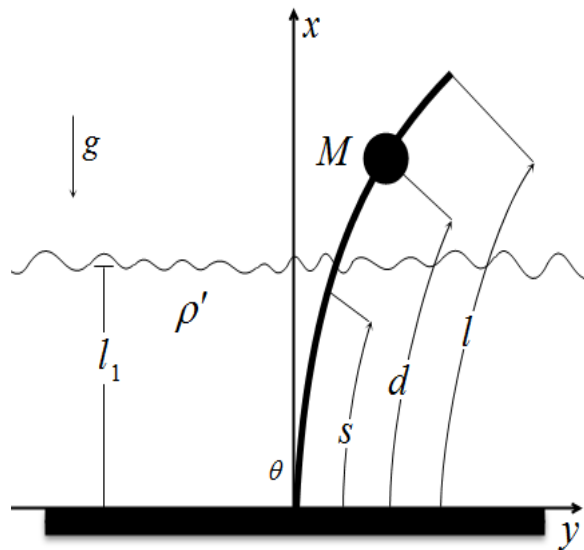
پیشنهادی می‌تواند برای طراحی و بهبود عملکرد جاذب‌های ارتعاش غیرخطی برای سازه‌های زیردریایی مورد استفاده قرار گیرد.

در این مقاله پدیده‌های غیرخطی تیر یکسرگیردار مغروق در سیال، با یک جرم متمرکز تحت اثرات جریان هارمونیک آب مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. معادله دیفرانسیلی حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن سه جمله غیرخطی و اثرات جریان سیال مدل‌سازی می‌شود. با استفاده از روش بالانس هارمونیکی پاسخ معادله غیرخطی تعیین و پاسخ فرکانسی و نیرویی رسم خواهد شد. پاسخ فرکانسی نشان می‌دهد پدیده پرش در بین نقاط دوشاخگی، ناحیه‌ای که سیستم دارای پاسخ سه‌گانه است رخ می‌دهد. همچنین در پاسخ نیرویی سیستم پدیده پرش رخ می‌دهد که نشان‌دهنده احتمال وجود آشوب در پاسخ تیر است. در هر دو منحنی پاسخ فرکانسی و نیرویی، حل تحلیلی با حل عددی مقایسه می‌گردد که نتایج تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارند. برای صحت‌سنجی مطالعه حاضر، نتایج با داده‌های مقاله [۵] مقایسه گردید که در بیشترین حالت اختلاف کمتر از پنج درصد مشاهده گردید.

هریک از جمله‌های غیرخطی اثرات مختلفی بر روی پاسخ فرکانسی دارند که برآیند این اثرات باعث خواهد شد پدیده پرش در مود اول از نوع سخت شونده باشد. همچنین پاسخ فرکانسی در مودهای بالاتر نشان داد پدیده پرش در مودهای دو تا چهار از نوع نرم‌شونده است.

پاسخ زمانی و منحنی فاز سیستم در نقطه دوشاخگی که پدیده پرش به سمت بالا رخ می‌دهد، بررسی شد. نتایج حاصل از منحنی پونکاره نشان می‌دهد پاسخ سیستم دارای نقاط پایداری بسیاری است؛ بنابراین قابل پیش‌بینی است که با افزایش دامنه تحریک در پاسخ تیر غیرخطی یکسرگیردار تحت جریان سیال، پدیده آشوب رخ دهد. از نوآوری‌های این مطالعه می‌توان به بررسی پدیده پرش به بالا و پایین با استفاده از روش‌های تحلیلی بالانس هارمونیکی و عددی رانگ-کوتای مرتبه چهار و مقایسه دو روش با یکدیگر به منظور صحت‌گذاری نتایج، مطالعه پدیده پرش در چهار مود اول، بررسی جامع پدیده‌های غیرخطی از جمله دوشاخگی و

معادلات حاکم بر سیستم از روش مقیاس زمانی استفاده نمودند. پدیده‌های غیرخطی از جمله پرش در دو مود اول، منحنی فاز و همچنین نگاشت پونکاره را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که منحنی پرش در مود اول از نوع سخت شونده و در مود دوم نرم‌شونده است. همچنین مطالعه منحنی فاز نشان داد سیستم از نوع چرخه حدی است؛ بنابراین فقط یک نقطه بر روی نگاشت پونکاره وجود خواهد داشت. ابراهیمی مقانی و همکاران [۱۰] به بررسی اثرات یک چاه انرژی غیرخطی به منظور کاهش ارتعاش یک لوله دوسرگیردار انتقال‌دهنده سیال تحت تحریک یک تحریک هارمونیک خارجی پرداختند. لوله با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی مدل‌سازی می‌شود و چاه انرژی غیرخطی اساساً سختی غیرخطی و میرایی خطی دارد. افزایش سرعت سیال، دامنه پاسخ حالت پایدار سیستم را کاهش می‌دهد و ناحیه ناپایدار پاسخ را گسترش می‌دهد. نتایج نشان داد که وسط لوله بهترین موقعیت برای اتصال چاه انرژی غیرخطی به یک لوله دوسرگیردار سیال انتقال‌دهنده تحت تحریک دوره‌ای خارجی است. پویا سروی و الهامی [۱۱] پدیده پرش تصادفی را در تیر غیرخطی یکسرگیردار مغروق در آب مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نشان دادند پدیده‌های پرش و پرش تصادفی در مود اول از نوع سخت‌شونده است. برای صحت‌سنجی نتایج تحلیلی از روش عددی رانگ کوتای مرتبه چهار استفاده نمودند. سرپرست و همکاران [۱۲] رفتار ارتعاشی و پایداری دینامیکی تیرهای متحرک محوری در مقیاس کوچک که بر روی پایه ویسکوالاستیک در یک محیط رطوبت-حرارتی، مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نتایج حاصل از تحقیق معیار مفیدی برای بهینه‌سازی نانوسیستم‌های متحرک در شرایط محیطی پیچیده می‌باشد. الیخ و همکاران [۱۳] پایداری دینامیکی میکرو لوله‌های تابعی که سیال را انتقال می‌دهند با استفاده از تئوری تنش زوج اصلاح‌شده بررسی نمودند. دو لوله میکرو به‌طور مداوم از طریق فنر الاستیک به یکدیگر متصل می‌شوند. معادلات ارتعاشی بر اساس اصل همیلتون استخراج و سپس با روش گالرکین حل شده است. نتایج نشان داد که سرعت‌های بحرانی و فرکانس‌های طبیعی با افزایش شاخص گرادیان افزایش می‌یابد. نتایج ارائه‌شده و رویکرد مدل‌سازی



شکل (۱): تیر یکسرگردار با جرم متمرکز تحت

تحریک جریان سیال

شرایط مرزی تیر یکسرگردار به صورت زیر می‌باشد:

$$w = w' = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \quad (2)$$

$$w'' = w''' = 0 \quad \text{at} \quad s = l$$

بر اساس روش گلرکین معادله دیفرانسیلی معمولی که فقط وابسته به زمان است با استفاده از شکل مود اول خطی تیر یکسرگردار به دست می‌آید. در واقعیت شکل مود تیر غیرخطی است اما به دلیل آنکه جمله‌های غیرخطی معادله حاکم بر ارتعاشات تیر ضعیف فرض شده است می‌توان از شکل مود خطی برای استخراج معادله دیفرانسیلی معمولی استفاده نمود.

$$w(\zeta, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i(\zeta) q_i(t) \quad (3)$$

که  $q_i(t)$  مختصات تعمیم‌یافته سیستم و  $\phi_i(\zeta)$  شکل مود- $i$  ام تیر یکسرگردار است که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\phi_i(x) = \cos \beta_i \zeta - \cosh \beta_i \zeta - \left( \frac{\cos \zeta_i l + \cosh \beta_i l}{\sin \zeta_i l + \sinh \beta_i l} \right) (\sin \beta_i \zeta - \sinh \beta_i \zeta) \quad (4)$$

$\beta$  ریشه‌های معادله فرکانسی  $1 + \cos \beta \cdot \cosh \beta = 0$  هستند که چهار ریشه اول معادله در جدول ۱ آورده شده‌اند.

جدول (۱): ریشه‌های معادله فرکانسی تیر یکسر گردار

مود	۱	۲	۳	۴
-----	---	---	---	---

آشوب در منحنی‌های فاز، پاسخ زمانی، پوانکاره و نگاشت اشاره نمود.

## ۲- معادلات حاکم بر حرکت و حل تحلیلی آن

تیر یکسرگردار مورد مطالعه که غیرخطی آن ناشی از هندسه تیر است در شکل ۱ به نمایش درآمده است. عمق سیال با  $l_1$  و جرم متمرکز با  $M$  که در فاصله  $d$  از انتهای تیر قرار دارد، نشان داده شده‌اند. هدف از طراحی و ساخت ستون‌ها، دکل‌ها و سازه‌های مغروق در آب تحمل بار ناشی از جرم متمرکز است؛ بنابراین به منظور انطباق مدل مورد مطالعه با واقعیت تیر مغروق با در نظر گرفتن جرم متمرکز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ضخامت تیر در مقایسه با طول آن بسیار نازک فرض شده، بنابراین از تغییر شکل برشی و اینرسی پیچشی تیر می‌توان صرف نظر کرد. با فرضیات انجام شده، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر غیرخطی یکسرگردار با جرم متمرکز تحت تحریک گسترده به صورت معادله (۱) قابل بازنویسی است [۱-۳ و ۵]:

$$\left[ m + M \delta(s-d) \right] \ddot{w} + EI w'''' + cw = H(\zeta, t) - EI \left[ w'(w' w'') \right]' \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} m \int_0^l \left[ w' \int_l^s \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s w^2 d\zeta \right) d\zeta \right]$$

که  $w(\zeta, t)$  نشان‌دهنده جابجایی عرضی تیر،  $\zeta = l/s$  طول قوس بی‌بعد تیر،  $m$  جرم تیر،  $M$  جرم متمرکز بر روی تیر در نقطه  $\eta = d/l$ ،  $\delta$  تابع تغییرات دیراک،  $EI$  سختی خمشی تیر و  $H(\zeta, t)$  تحریک خارجی است.  $c$  ضریب میرایی می‌باشد که باعث پایداری پاسخ خواهد شد. همچنین برای در نظر گرفتن اثرات بین سازه و آب با جرم مخصوص  $\rho'$ ، میرایی از نوع ویسکوزیته فرض شده است.

در معادله (۱) نماد ( ) مشتق نسب به مکان ( $\zeta$ ) و نماد ( ) مشتق نسبت به زمان ( $t$ ) می‌باشد. در شکل ۱  $\rho'$  جرم مخصوص سیال را نشان می‌دهد [۵].

$$\alpha_3 = \int_0^1 \left( \int_0^\zeta \phi'^2 d\chi \right)^2 d\zeta + C_m k_m \int_0^{\zeta_1} \left( \int_0^\zeta \phi'^2 d\chi \right)^2 d\zeta \quad (10)$$

$$+ \mu \left[ \int_0^\zeta \phi'^2 d\chi \right]_{\zeta=\eta} \quad (11)$$

$$\alpha_3 = \int_{\zeta_1}^1 \phi(\zeta) d\zeta \quad (12)$$

که  $C_m$  ضریب اینرسی جرم در داخل سیال  $C_m = \rho' C_m$ ،  $\mu = M/mAl$  در نظر گرفته شده است.

جدول (۲): ضرایب عددی معادله (۷)

مود	$c$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$p$
۱	۰/۰۲	۱/۰۴۴۹۳	۰/۹۳۲۹۵	۰/۱	۰/۲
۲	۰/۰۲	۷/۷۸۸۲۸۵	۱/۲۵۴۶۹۲	۰/۱	۰/۲
۳	۰/۰۲	۱۰/۹۵۸۷۵	۱/۲۵۴۶۹۲	۰/۱	۰/۲
۴	۰/۰۲	۲۱/۷۹۱۶۸	۱/۰۹۱۰۹۶	۰/۱	۰/۲

برای حل معادله غیرخطی حاکم بر سیستم، فرض می‌گردد اختلاف‌فازی در تحریک معین وجود دارد [۱۴]؛ بنابراین می‌توان معادله ارتعاشی برای یک سیستم میرا را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{q}(t) + q(t) + c\dot{q}(t) + \varepsilon_1 q^2(t) \ddot{q}(t) + \varepsilon_1 q(t) \dot{q}^2(t) + \varepsilon_2 q^3(t) = P \cos(\Omega t + \gamma) = a_1 \cos \Omega t - a_2 \sin \Omega t \quad (13)$$

$a_1$  و  $a_2$  دامنه‌های تحریک معادل می‌باشند. فرض می‌شود دامنه تحریک به صورت  $P = (a_1^2 - a_2^2)^{1/2}$  برقرار است [۱۴]. به‌عنوان تقریب اول، پاسخ زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q_1 = a_0 \cos(\Omega t) \quad (14)$$

با جایگذاری معادله (۱۴) در داخل معادله (۱۳) و صرف‌نظر از جملات شامل  $\cos(3\Omega t)$ ، پاسخ فرکانسی تیر یکسرگیردار به صورت معادله (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\left[ (1 - \Omega^2) a_0 + \left( \frac{3}{4} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \Omega^2 \right) a_0^3 \right]^2 + (a_0 c \Omega)^2 = P^2 \quad (15)$$

### ۳- نتایج و بحث

$\beta$	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۴۱	۷/۸۵۴۸	۱۰/۹۹۵۴
---------	--------	--------	--------	---------

روشن است که تابع تحریک  $(H(\zeta, t))$  نیز بر اساس شکل مود تیر بسط داده می‌شود:

$$H(\zeta, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i(\zeta) h(t) \quad (5)$$

فرض شده است که تیر تحت تحریک هارمونیک  $(h(t))$  می‌باشد.

$$h(t) = F_0 \cos(\bar{\Omega} t) \quad (6)$$

در معادله فوق،  $F_0$  دامنه تحریک معین و  $\bar{\Omega}$  فرکانس تحریک است.

برای بی‌بعدسازی زمان و دامنه پاسخ، فرضیات

$$\tau = \gamma (\alpha_2 / \alpha_1)^{1/2} \quad \text{و} \quad \Omega = \frac{\bar{\Omega}}{\gamma (\alpha_2 / \alpha_1)^{1/2}} \quad \text{در نظر گرفته}$$

شده است. که  $\gamma^2 = EI / \rho A l^2$  جمله فرکانس خطی و  $g_0 = \rho A l^3 g / EI$  جمله گرانشی بی‌بعد است.

با جایگذاری معادلات (۳) و (۵) در معادله (۱) و اعمال اصل تعادل مدها، معادله حاکم بر سیستم به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\ddot{q}(t) + q(t) + c\dot{q}(t) + \varepsilon_1 q^2(t) \ddot{q}(t) + \varepsilon_1 q(t) \dot{q}^2(t) + \varepsilon_2 q^3(t) = \varepsilon_3 P \cos(\Omega t) \quad (7)$$

ضرایب معادله (۸) از روابط معادله (۷) قابل محاسبه است، جدول ۲ مقادیر عددی ضرایب معادله (۷) را نشان می‌دهد [۵].

$$\varepsilon_1 = \alpha_3 / p^2 \alpha_1 \quad \varepsilon_2 = 2\alpha_4 / p^2 \alpha_2 \quad (7)$$

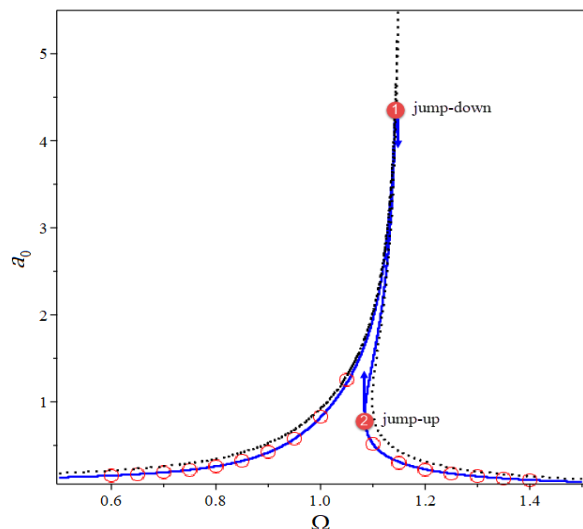
$$\varepsilon_3 = p\alpha_5 / \alpha_2, \quad P = \frac{F_0}{mAl^2 \gamma^2}$$

ضرایب  $\alpha_1$  تا  $\alpha_5$  در روابط (۹-۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\alpha_1 = \int_0^1 \phi^2 d\zeta \quad (8)$$

$$+ C_m k_m \int_0^{\zeta_1} \phi^2 d\zeta + \mu \phi^2 \quad \alpha_2 = \int_0^1 \phi'^2 d\zeta - g_0 \int_0^1 \left( \int_0^\zeta \phi'^2 d\chi \right) d\zeta \quad (9)$$

$$- g_0 \mu \int_0^{\zeta_1} \phi'^2 d\zeta$$



شکل (۲): پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی یکسرگردار تحت

تحریک هارمونیک مربوط به رابطه (۷)

پاسخ تحلیلی —، پاسخ عددی ○○

نتایج مربوط به مرجع [۵]

### جدول (۳): جمله‌های غیرخطی

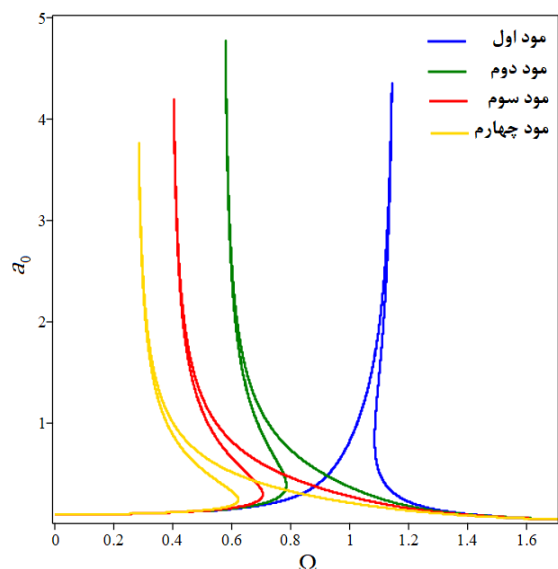
نام جمله غیرخطی	علامت	جمله مؤثر در معادله
اینرسی	(I)	$\varepsilon_1 q^2(t) \ddot{q}(t)$
اینرسی	(II)	$\varepsilon_1 q(t) \dot{q}^2(t)$
هندسی	(III)	$\varepsilon_2 q^3(t)$

در منحنی شکل ۳ اثرات هر یک از پارامترهای غیرخطی اینرسی و هندسی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. جنس پدیده پرش در اثر جمله غیرخطی اینرسی (I) از نوع نرم‌شونده می‌باشد. همچنان که در شکل ۳ مشخص است تنها جمله غیرخطی (I) می‌باشد که مایل به سمت چپ است. جمله‌های غیرخطی (II) و (III) که ناشی از غیرخطی اینرسی و هندسی هستند مایل به سمت راست نمودار هستند بنابراین باعث سخت‌شوندگی پدیده پرش تیر می‌شوند. در شکل ۳ منحنی (IV) پاسخ فرکانسی تیر با سه جمله غیرخطی را نشان می‌دهد. به عبارتی منحنی (IV) پاسخ تحلیلی معادله (۷) است که سه پارامتر غیرخطی (I)، (II) و (III) به‌صورت یکجا دارد. در سیستم‌های غیرخطی پدیده‌هایی رخ می‌دهد که در سیستم‌های خطی قابل‌مشاهده نیست. منحنی (۷) در شکل ۳ پاسخ فرکانسی غیرخطی بدون در نظر گرفتن جمله‌های غیرخطی است.

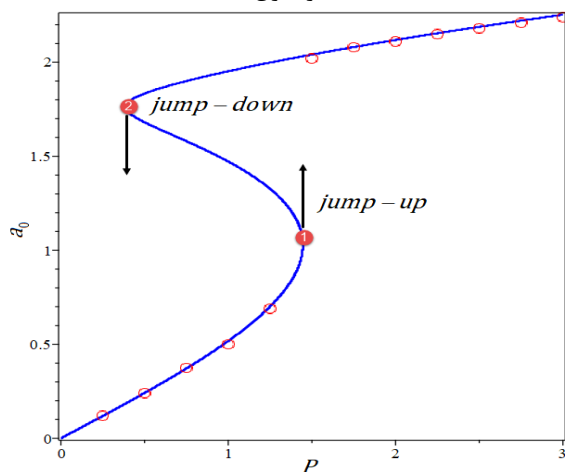
معادله (۱۵) پاسخ فرکانسی حاصل از حل تحلیلی روش بالانس هارمونیک می‌باشد که در آن پارامتر زمان ( $t$ ) از پاسخ تحلیلی حذف‌شده، به عبارتی معادله (۱۶) مستقل از زمان است. این معادله مطالعه‌ی پدیده پرش را میسر می‌نماید در صورتی که برای بررسی پاسخ زمانی و منحنی فاز محدودیت داشته و قابل استفاده نمی‌باشد.

منحنی شکل ۲ پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی را نسبت به فرکانس تحریک با دو روش تحلیلی و عددی نشان می‌دهد که با نتایج مرجع [۵] مقایسه شده‌اند نتایج حل تحلیلی در شکل ۲ با خط پیوسته نشان داده‌شده یک تابع ضمنی می‌باشد که با رسم معادله (۱۶) نتیجه خواهد شد. با حل مستقیم معادله غیرخطی دیفرانسیلی حاکم بر ارتعاشات تیر یکسرگردار (۷) با استفاده از روش عددی، پاسخ بر اساس فرکانس تحریک استخراج می‌گردد. مقایسه پاسخ‌های حاصل از حل تحلیلی و عددی با نتایج مقاله [۵] در شکل ۲ نشان می‌دهد نتایج تطابق خوبی با هم داشته و اختلاف در بیشترین حالت پنج درصد است. در شکل ۲ پدیده غیرخطی پرش در مود اول تیر یکسرگردار رخ می‌دهد. به دلیل متمایل شدن منحنی پاسخ به سمت راست نمودار، جنس پرش از نوع سخت شونده خواهد بود. در پدیده پرش سخت شونده با افزایش فرکانس تحریک پرش به سمت پایین (کاهش دامنه نوسان) و برعکس با کاهش فرکانس تحریک پرش به سمت بالا (افزایش دامنه تحریک) خواهیم داشت. نقاط یک و دو در شکل ۲ که به ترتیب پدیده‌های پرش به پایین و بالا را نشان می‌دهند، نقاط دوشاخگی نامیده می‌شوند. ناحیه بین این نقاط، ناحیه پاسخ سه‌گانه نام دارد و تیر غیرخطی ممکن است در ناحیه پاسخ سه‌گانه رفتار آشوبناک داشته باشد. منحنی شکل ۲ پاسخ معادله (۷) با در نظر گرفتن هر سه جمله غیرخطی می‌باشد. در ادامه تأثیر هر یک از جمله‌های غیرخطی بررسی و باحالت خطی تیر مقایسه خواهد شد. برای این منظور هر یک از جمله‌های غیرخطی در جدول ۳ نام‌گذاری می‌شوند. علت فیزیکی پدیده پرش، کاهش انرژی در نقاط دوشاخگی است. تیر تمایل دارد در مسیری نوسان نماید که دارای حداقل انرژی باشد.

دوشاخگی را نشان دهد. در شکل‌های ۲ و ۵ مقایسه حل تحلیلی با حل عددی صحت نتایج را نشان می‌دهد. در شکل ۲ حل عددی با حل تحلیلی مقایسه شد که نتایج، صحت روش‌های استفاده‌شده را نشان داد. حال می‌توان با استفاده از روش عددی پاسخ معادله دیفرانسیلی (۷) را نسبت به زمان بررسی کرد.



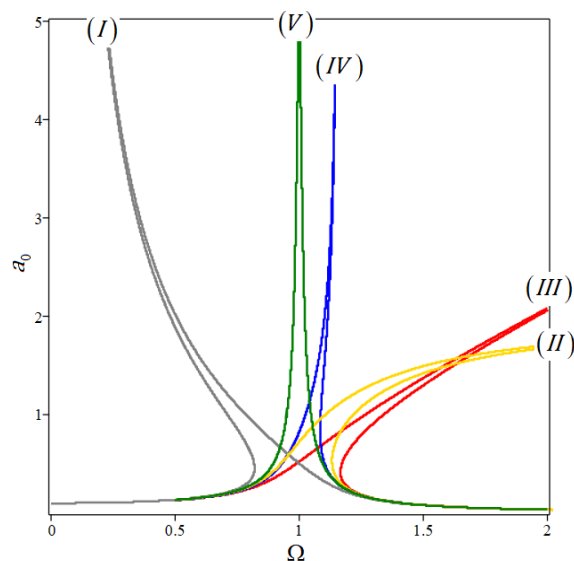
شکل (۴): مقایسه پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی در چهار مود اول



شکل (۵): بررسی پدیده دوشاخگی

— پاسخ تحلیلی، ○○ پاسخ عددی

در شکل ۶ پاسخ زمانی تیر غیرخطی در مود اول بررسی شده است. در اثر تحریک دامنه نوسان تا زمان ۱۰۰ ثانیه افزایشی می‌باشد ولی به دلیل وجود میرایی و جمله‌های غیرخطی اینرسی در رابطه (۷) دامنه نوسان



شکل (۳): مقایسه اثرات هریک از جمله‌های غیرخطی

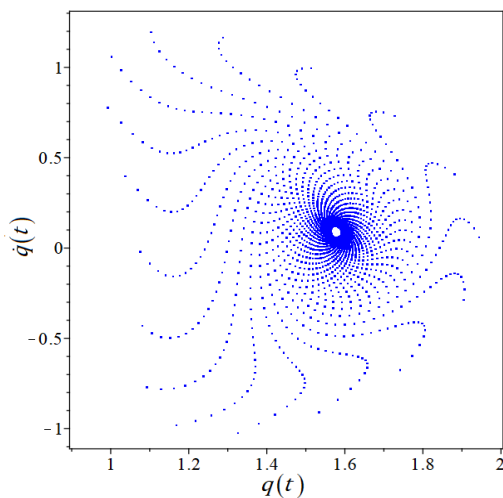
در منحنی شکل ۴ پاسخ فرکانسی تیر غیرخطی یکسرگردار مغروق در آب در چهار مود اول بررسی شده است. پدیده پرش در مودهای دو تا چهار برخلاف مود اول به سمت چپ متمایل است بنابراین پدیده پرش در مودهای دو تا چهار نرم‌شونده می‌باشند. در پدیده پرش نرم‌شونده برخلاف پرش سخت شونده با افزایش فرکانس تحریک پرش به سمت بالا است و با کاهش فرکانس تحریک پرش به سمت پایین خواهد بود.

با افزایش مد تیر اثر جمله غیرخطی اینرسی (I) تقویت می‌شود؛ بنابراین اثر جمله غیرخطی (I) باعث می‌شود پدیده پرش تیر یکسرگردار در مودهای دو تا چهار نرم‌شونده باشند. همچنین با افزایش شماره مود تیر، پدیده پرش نرم‌تر می‌شود به عبارتی تمایل منحنی در ناحیه پاسخ سه‌گانه به سمت چپ نمودار افزایش می‌یابد.

در شکل ۵ پدیده دوشاخگی با استفاده از حل تحلیلی و عددی بررسی شده است. با افزایش دامنه تحریک در نقطه (۱) شکل ۵ پدیده پرش به سمت بالا و با کاهش دامنه تحریک پدیده پرش به سمت پایین رخ می‌دهد؛ بنابراین یک نقطه بحرانی بوده و پیش‌بینی می‌شود که پدیده آشوب در پاسخ تیر غیرخطی رخ دهد. حل عددی رانگ کوتای مرتبه چهار قادر نیست پاسخ سیستم را در محدوده سه‌گانه (محدوده نقاط بین یک و دو) تعیین کند. این روش فقط می‌تواند مرز ناحیه پاسخ سه‌گانه و نقاط

با مطالعه رفتار تیر غیرخطی یکسرگردار با جرم متمرکز تحت جریان سیال در منحنی فاز می‌توان پدیده آشوب را پیش‌بینی نمود. مسیر منحنی فاز ابتدا با شروع حرکت به‌صورت ساعت‌گرد با کاهش دامنه میل به همگرا شدن دارد ولی در نزدیکی مرکز منحنی جهت حرکت تغییر نموده و حرکت مسیر پادساعت‌گرد می‌شود. در این تغییر سمت حرکت از ساعت‌گرد به پادساعت‌گرد احتمال وجود پدیده آشوب خواهد بود.

محل تلاقی پاسخ پیوسته معادله (۷) در فضای سه‌بعدی فازی با یک صفحه دوبعدی نگاشت پوانکاره را نشان خواهد داد. نگاشت پوانکاره در شکل ۸ را می‌توان به‌عنوان یک سیستم گسسته پویا با فضای حالت تعبیر کرد که یک بعد کوچک‌تر از سیستم دینامیکی پیوسته اصلی است. نگاشت پوانکاره نیز همانند منحنی‌های شکل‌های ۶ تا ۱۰ در فرکانس تحریک بحرانی ۱/۱ مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نگاشت پوانکاره رفتار سیستم غیر سیکل حدی بی‌شمار نقاط پایداری را نشان می‌دهد؛ بنابراین پیش‌بینی می‌شود رفتار سیستم غیرخطی، بی‌نظم و آشوبناک خواهد بود.

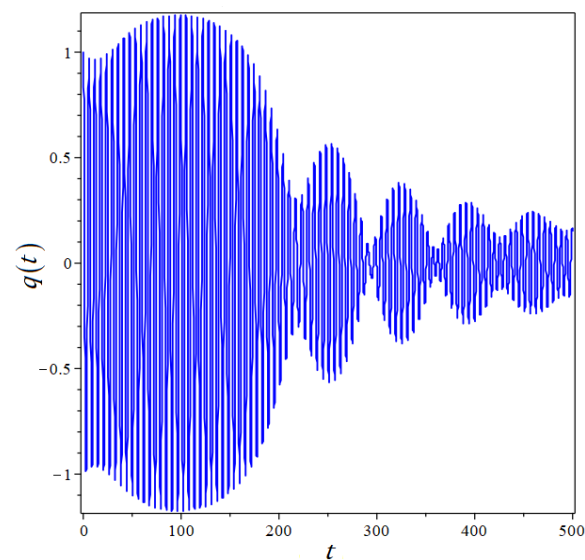


شکل (۸): نگاشت پوانکاره

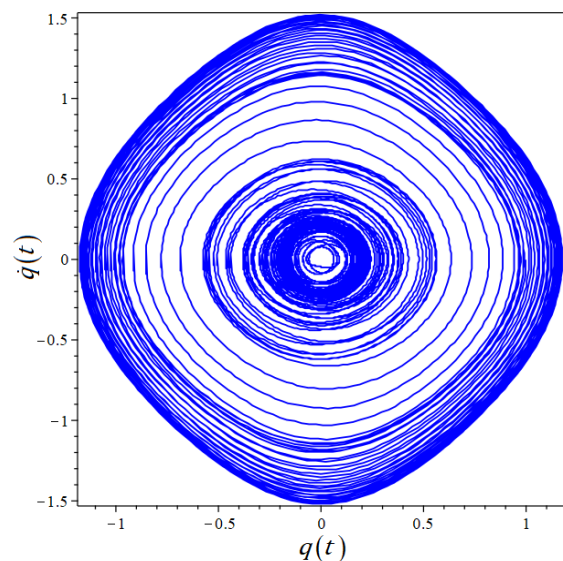
با فرض  $r = (q^2 - \dot{q}^2)^{1/2}$  و مقایسه ( $r$ ) نسبت به دامنه تحریک ( $P$ ) می‌توان پدیده آشوب را بررسی کرد. در منحنی شکل ۹ پدیده آشوب تیر غیرخطی با استفاده از رابطه (۷) بررسی شده است. همچنان که در شکل مشخص است رفتار این تیر تا دامنه تحریک ۵۰ بررسی گردیده است. پاسخ ( $r$ )

کنترل می‌شود. برای مطالعه عددی پاسخ معادله (۷) تمامی ضرایب به‌جز فرکانس تحریک معرفی گردید. برای این منظور در ادامه برای تمامی نمودارهای (۵) الی (۱۰) ۱/۱  $\Omega =$  که یکی از نقاط بحرانی بر روی منحنی پرش است، انتخاب گردید.

اگر دامنه پاسخ نسبت به سرعت پاسخ تیر غیرخطی بررسی شود می‌توان منحنی فازی را مشاهده نمود. مقایسه رفتار سیستم معادله (۷) در دو منحنی پاسخ زمانی و فاز می‌تواند باعث درک بهتر پدیده‌های غیرخطی تیر شود.



شکل (۶): پاسخ زمانی تیر غیرخطی یکسرگردار در مود اول



شکل (۷): منحنی فاز تیر غیرخطی یکسرگردار در مود اول



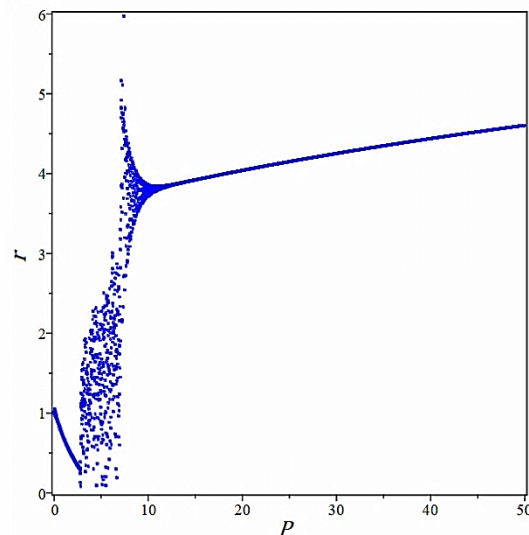
همچنان که از مقایسه شکل ۱۰ با شکل ۹ مشخص است پدیده آشوب در دامنه‌های تحریک مختلفی رخ می‌دهد. پس از همگرا شدن پاسخ در نقطه  $P=30$  (شکل ۱۰)، پدیده دوشاخگی رخ می‌دهد که این پدیده دوشاخگی در نقطه  $P=34$  وارد پدیده آشوب می‌شوند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله تیر غیرخطی یکسرگردار مغروق در سیال، با یک جرم متمرکز تحت اثرات جریان هارمونیک آب مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. معادله حاکم بر مشتقات معمولی تیر با سه جمله غیرخطی با استفاده از روش گلرکین استخراج و اثرات جریان سیال بر روی آن محاسبه گردید. با استفاده از روش بالانس هارمونیک، پاسخ معادله غیرخطی تعیین و پدیده‌های دوشاخگی و پرش در منحنی‌های پاسخ فرکانسی و نیرویی بررسی شد. منحنی پاسخ فرکانسی نشان داد پدیده‌های پرش به بالا و پایین در بین نقاط دوشاخگی، ناحیه‌ای که سیستم دارای پاسخ سه‌گانه است رخ می‌دهند. همچنین در پاسخ نیرویی سیستم نیز پدیده پرش رخ می‌دهد که نشان‌دهنده احتمال وجود آشوب در پاسخ تیر است. در هر دو منحنی پاسخ فرکانسی و نیرویی حل تحلیلی با حل عددی مقایسه گردید که نتایج تطابق خوبی با یکدیگر داشتند. هریک از جمله‌های غیرخطی اثرات مختلفی بر روی پدیده پرش دارند که برآیند این اثرات باعث می‌شوند که پدیده پرش در مود اول، سخت شونده باشد. همچنین پاسخ فرکانسی در مودهای بالاتر نشان داد رفتار پدیده پرش در مودهای دو تا چهار متفاوت با مود اول بوده و نرم‌شونده هستند.

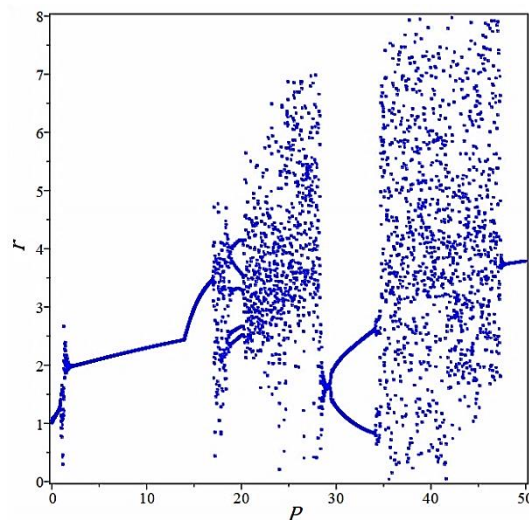
پاسخ زمانی و منحنی فاز سیستم در نقطه دوشاخگی که پدیده پرش به سمت بالا رخ می‌داد بررسی شد. نتایج حاصل از منحنی پوانکاره نشان داد پاسخ سیستم دارای نقاط پایداری بسیاری است؛ بنابراین قابل پیش‌بینی بود که با افزایش دامنه تحریک در پاسخ تیر غیرخطی یکسرگردار تحت جریان سیال پدیده آشوب رخ دهد. این بررسی نشان داد که جمله غیرخطی هندسی مؤثرترین عامل در ایجاد پدیده آشوب در پاسخ تیر می‌باشد.

در  $P=2/7$  وارد رفتار نامنظمی می‌شود که در اصطلاح این رفتار نامنظم را پدیده آشوب می‌نامند. به دلیل وجود جمله‌های میرایی در رابطه تیر، آشوب در سیستم کنترل می‌شود بنابراین پاسخ ( $r$ ) در  $P=12$  همگرا خواهد شد.



شکل (۹): پدیده آشوب تیر غیرخطی معادله (۷)

با بررسی اثر هریک از جمله‌های غیرخطی در پاسخ ( $r$ ) می‌توان نتایج جالبی را در منحنی پدیده آشوب مشاهده نمود. در منحنی شکل ۱۰ اثر جمله غیرخطی هندسی  $(\varepsilon_2 q^3(t))$  به‌تنهایی بر روی منحنی آشوب بررسی می‌شود (از جمله‌های غیرخطی اینرسی در رابطه (۷) صرف‌نظر شده است).



شکل (۱۰): پدیده آشوب تیر غیرخطی معادله (۷) بدون در نظر گرفتن جمله‌های غیرخطی اینرسی

supported beams on viscoelastic-Pasternak foundation in a hygro-thermal environment. 2020.

[13] Elaikh TE, Abed NM, Ebrahimi-Mamaghani A, editors. Free vibration and Flutter Stability of Interconnected Double Graded Micro Pipes System Conveying Fluid. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering; 2020: IOP Publishing.

[14] Rao SS. Mechanical vibrations. 2004. Pearson Prentice Hall, Inc. NJ.

## ۵- مراجع

[1] Crespo da Silva M, Glynn C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion. Journal of Structural Mechanics. 1978;6(4):437-48.

[2] Crespo da Silva M, Glynn C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. II. Forced motions. Journal of Structural Mechanics. 1978;6(4):449-61.

[3] Zavodney LD, Nayfeh A. The non-linear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1989;24(2):105-25.

[4] Nayfeh AH, Pai PF. Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1989;24(2):139-58.

[5] Al-Qaisia A, Hamdan M, Al-Bedoor B. On the steady state response of a cantilever beam partially immersed in a fluid and carrying an intermediate mass. Shock and Vibration. 2000;7(4):179-94.

[6] Al-Qaisia A, Hamdan M. Bifurcations and chaos of an immersed cantilever beam in a fluid and carrying an intermediate mass. Journal of Sound and Vibration. 2002;253(4):859-88.

[7] Delgado-Velázquez I. Nonlinear vibration of a cantilever beam. 2007.

[8] Motallebi A, Irani S, Sazesh S. Analysis on jump and bifurcation phenomena in the forced vibration of nonlinear cantilever beam using HBM. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2016;38(2):515-24.

[9] Wang G-X, Ding H, Chen L-QJJoS, Vibration. Dynamic effect of internal resonance caused by gravity on the nonlinear vibration of vertical cantilever beams. 2020;474:115265.

[10] Mamaghani AE, Khadem S, Bab SJND. Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. 2016;86(3):1761-95.

[11] Sarvi P, Elahami MR. The Study of the Stochastic Jump Phenomenon in a Nonlinear Cantilever Beam Immersed in Water Under Narrow-Band Random Excitation. Journal Of Aerospace Mechanics. 2021;17(3):85-95.

[12] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A, Safarpour M, Ouakad HM, Dimitri R, Tornabene FJMMitAS. Nonlocal study of the vibration and stability response of small-scale axially moving



## Study of Phenomena of Jump and Chaos in a Non-linear Beam with Concentrated Mass under the Effects of Water Flow

Pouya Sarvi<sup>1</sup>, Alireza Naddaf Oskouei<sup>2\*</sup>, Amirhossein Omidi<sup>3</sup>

<sup>1</sup>MSc, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Associate Professor, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

<sup>3</sup>MSc, Faculty of Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

### HIGHLIGHTS

- Vibration of the cantilever beam under the effects of water flow
- The behavior of the jumping phenomenon in the first four modes
- Complete analysis of non-linear phenomena including jump, bifurcation, and chaos.
- Comparison of analytical solution method with numerical modeling

### ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 5 January 2022

Received in revised form: 26 January 2022

Accepted: 27 February 2022

Available online: 28 February 2022

\*Correspondence: anadaf@ihu.ac.ir

How to cite this article:

P. Sarvi, A.N.Oskouei, A. Omidi. Study of phenomena of jump and chaos in a non-linear beam with concentrated mass under the effects of water flow. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(2):157-167.

Keywords:

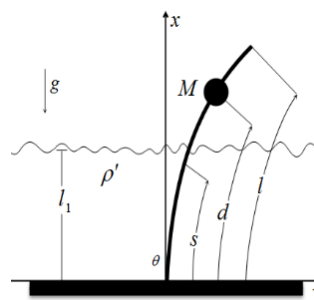
Nonlinear beam

Nonlinear vibrations

Jump phenomenon

Chaos phenomenon

### GRAPHICAL ABSTRACT



### ABSTRACT

In the analysis of many offshore structures such as oil columns and structures, oil rig abutments and towers surrounded by water, the cantilever beam model is usually used. These models usually bear the weight of a concentrated mass, and the response amplitude of these structures is of particular importance during design. In this paper, a nonlinear beam immersed in a fluid with a concentrated mass under the effects of the harmonic flow of water has been studied. Using the harmonic balancing method, the response of a nonlinear beam with three nonlinear terms is determined in the first four modes. Examination of the frequency response by analytical solution and numerical simulation shows that the jump phenomenon occurs in the triple response zone between the bifurcation points. The jump phenomenon is hardening in the first mode and softening in the second to fourth modes. Each of the nonlinear sentences has different effects on the vibrational behavior of the system and the jump phenomenon. The behavior of the beam in the state space along with the time response and Poincaré mapping shows that the path of the phase curve has different stability points. Finally, the phenomenon of chaos in the nonlinear beam was studied. At the bifurcation points, the behavior of the system is chaos, and the geometric nonlinear sentence has the most effective effect on the response disorder. Investigating the jump phenomenon using analytical and numerical methods and comparing the two methods with each other to validate the results, study the jump phenomenon in the fourth mode, comprehensive study of nonlinear phenomena such as bifurcation and chaos in phase curves, time response, Poincaré, and mapping, are an innovation in the field of the immersed nonlinear beam.

