



تحلیل فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی با لایه محرک پیزوالکتریک

شهرزاد یوسف‌زاده^{۱*}، محمدمهدی دوستدار^۲ ID

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز، ایران

^۲ استاد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین^(ع)، تهران، ایران

برجسته‌ها

- ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو مخروطی چرخان با لایه محرک پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
- تحلیل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شده است.
- با افزایش سرعت زاویه‌ای تیر، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد به طوری که با بیشتر شدن سرعت افزایش، فرکانس طبیعی با شیب تندتری افزایش می‌یابد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷

بازنگری: ۱۴۰۰/۱۱/۱۸

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۱/۲۸

ارائه برخط: ۱۴۰۱/۰۴/۰۷

*نویسنده مسئول:

sh.yoosefzadeh@gmail.com

کلیدواژه‌ها:

تیر مخروطی چرخان

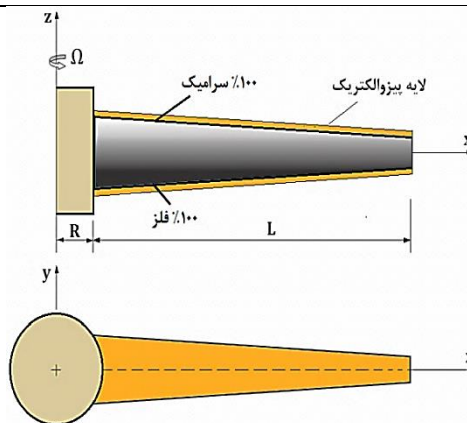
مواد تابعی

فرکانس طبیعی

پیزوالکتریک

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

چکیده گرافیکی



چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو مخروطی چرخان با لایه محرک پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته است. جنس تیر از مواد تابعی (Functionally Graded Materials) FGM در راستای ضخامت و شرط مرزی یکسر گیردار متصل به هاب در نظر گرفته شده است. تحلیل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شده است. در ابتدا، انرژی کل سیستم شامل انرژی پتانسیل و جنبشی تیر و لایه پیزوالکتریک محاسبه شده و سپس با بهره‌گیری از روش ریلی-ریتز مبتنی بر کمینه‌سازی انرژی کل سیستم، فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج شده است. در ادامه پس از اعتبارسنجی نتایج حاصل از طریق مقایسه با نتایج سایر محققان، تأثیر پارامترهای هندسی مختلف از قبیل ضخامت و پهنای تیر، شیب مخروط تیر، طول تیر، سرعت دورانی و همچنین ولتاژ پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی مطالعه شده است. نتایج نشان دادند که با افزایش سرعت زاویه‌ای تیر، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد به طوری که با بیشتر شدن سرعت افزایش، فرکانس طبیعی با شیب تندتری افزایش می‌یابد.

۱- مقدمه

از یک سیستم الکترومکانیک میکروکنترلی هستند که میدان الکتریکی اعمال شده به آن‌ها می‌تواند به حرکت‌هایی در ابعاد میکرومتر یا نانومتر تبدیل شود. در این تحقیق اثر این کاربرد مواد پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی بررسی شده است.

به دلیل کاربرد فراوان تیرها در صنایع مختلف، تحقیقات وسیعی روی ارتعاشات آن‌ها انجام شده است. در سال ۱۹۲۰ سوتول و گوگ [۱] به صورت تحلیلی فرکانس‌های تیر چرخان را به دست آوردند. یوکویوما [۲] در سال ۱۹۸۸ ارتعاشات آزاد تیر یکنواخت چرخان را به روش المان محدود و تیر به صورت صفحه‌ای و سه‌بعدی را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۹۳ لی و کویو [۳] ارتعاشات آزاد تیر چرخان را بررسی کردند. همچنین از روش ریلی-ریتز فرکانس اصلی تیر چرخان با کرنش اولیه در ریشه تیر را بررسی کرد. دو و همکاران [۴] در سال ۱۹۹۴ تیر چرخان را با استفاده از سری‌های توانی تحلیل دقیق نمودند. آن‌ها فرکانس طبیعی و شکل مدهای ارتعاشات را به دست آوردند. بانرجو [۵] در سال ۲۰۰۱ با استفاده از روش سختی دینامیک دقیق و الگوریتم ویتریک-ویلیامز فرکانس طبیعی تیر چرخان را به دست آورد. در سال ۲۰۱۶ فانگ و ژو [۶] ارتعاشات یک تیر تیموشنکو چرخان مخروطی ساخته شده از مواد تابعی در راستای طول را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش چبیشف-ریتز با در نظر گرفتن پاسخ مسئله به صورت چندجمله‌ای چبیشف ضرب در توابع مرزی و با کمینه‌سازی انرژی سیستم، فرکانس‌های طبیعی تیر را استخراج کردند. در تحقیق آن‌ها شش شرط مرزی مختلف برای تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۱۹۹۹ بازونه و خولیف [۷] ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان را مطالعه کردند. آن‌ها تأثیر شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی ارتعاشات را بررسی کردند. شیل هانسل [۸] برای به دست آوردن فرکانس طبیعی به صورت دقیق‌تر، معادله دیفرانسیل جزئی که ارتعاشات خمشی تیر را مورد مطالعه قرار داشت به روش ریلی-ریتز به دست آورد. یو و شین [۹] معادلات حرکت تیر یکسر گیردار چرخان با در نظر گرفتن اثر هم‌زمان کشیدگی و خمش تیر به کمک روش انرژی را به دست آوردند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد این عوامل

در بسیاری از صنایع، قطعات دوار مانند پره‌های هلیکوپتر، پره‌های توربین گازی و آنتن ماهواره‌ها از ساختارهای انعطاف‌پذیر دارای حرکت دورانی ساخته می‌شوند؛ لذا تحلیل ارتعاشات این قطعات و تعیین عوامل مؤثر بر راندمان آن‌ها بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار دارد. یکی از این پارامترها فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. طراحان این مجموعه‌ها سعی دارند با کم کردن وزن قطعات موجب افزایش پاسخ دینامیکی به ازای تحریکات کوچک شوند. فرکانس طبیعی این اجزا به علت قابل توجه بودن نیروی گریز از مرکز و در نتیجه تغییر سختی آن، تغییرات محسوسی پیدا می‌کند. به این پدیده اثر سختی دورانی ناشی از سرعت دورانی گفته می‌شود. از طرفی تحقیقات نشان می‌دهد لایه پیزوالکتریک موجب تغییر فرکانس طبیعی سیستم شده، به عبارتی با تغییر ولتاژ لایه پیزوالکتریک فرکانس طبیعی تحت کنترل قرار می‌گیرد.

در مواد هدفمند تابعی به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که موجب استحکام ماده می‌شود و همین تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد هدفمند تابعی موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی که باید در مقابل گرادیان درجه حرارت بالا مقاوم باشند، استفاده می‌شود. امکان بهینه کردن تغییرات تنش در مواد هدفمند تابعی با تغییر مناسب پروفیل مواد ساختاری از ویژگی‌های برجسته این مواد است [۴].

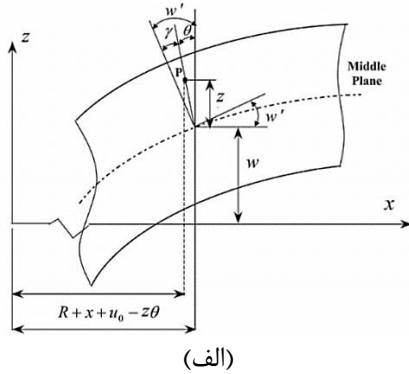
پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که در صورت اعمال فشار یا تنش به آن‌ها، بار الکتریکی در سطوح خاصی از آن‌ها ظاهر می‌شود. این پدیده، اثر پیزوالکتریک مستقیم نام دارد که یک فرآیند قابل برگشت است، یعنی به طور معکوس هرگاه ماده‌ای با این خاصیت، در یک میدان الکتریکی واقع شود، ابعاد آن تغییر می‌کند و به این کاربرد پیزوالکتریک‌ها محرک گفته می‌شود. در سال‌های اخیر کاربرد مواد پیزوالکتریک بیشتر تحت سه عنوان سنسور، مبدل و محرک شناخته شده است. در واقع محرک‌های پیزوالکتریک شکلی

و بدون در نظر گرفتن چرخش اولیه مطالعه کردند. در سال ۲۰۰۵ اوزدمیر و کایا [۲۰] ارتعاشات آزاد تیر مخروطی دوطرفه چرخان تیموشینکو را به روش انرژی بررسی کردند. در سال ۲۰۲۰ سرپرست و همکاران [۲۱] به مطالعه رفتار ارتعاشی و پایداری دینامیکی تیرهای متحرک محوری در مقیاس کوچک پرداختند که بر روی بستر ویسکوالاستیک- پسترناک در یک محیط رطوبتی- حرارتی قرار داشت. آن‌ها از روش گالرکین برای تعیین مقادیر ویژه سیستم دینامیکی معادلات و مناطق پایداری سیستم بهره گرفتند. تحقیق آن‌ها نشان داد که اثرات مخرب شرایط رطوبتی-حرارتی را می‌توان با تنظیم دقیق ویژگی‌های فونداسیون کاهش داد. در سال ۲۰۲۰ ایلاخ و همکاران [۲۲] به بررسی پایداری دینامیکی میکرو لوله‌های FGM دوگانه که سیال را انتقال می‌دهند با تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده پرداختند. آن‌ها معادلات ارتعاشی با شرایط مرزی را طبق اصل همپلتون به دست آورده و سپس با روش گالرکین حل کردند. در سال ۲۰۱۹ ابراهیمی ممقانی و همکاران [۲۳] یک مدل ریاضی جدید برای تحلیل دینامیکی جریان دو فاز در لوله‌های عمودی با در نظر گرفتن مدل‌های مختلف جریان دوفازی با احتساب نیروهای اتلاف ارائه دادند. آن‌ها برای حل معادلات از روش گسسته‌سازی گالرکین و تحلیل مقادیر ویژه استفاده کردند. نتایج آنان نشان داد که لوله‌های انتقال جریان دوفازی مستعد تجربه چندین پدیده دینامیکی هستند و پاسخ دینامیکی لوله به‌طور قابل توجهی به کسر حجمی گاز وابسته است.

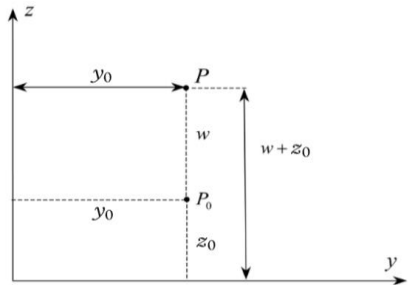
در این تحقیق، ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان با لایه محرک پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته است. جنس تیر از مواد تابعی و شرایط مرزی یکسر درگیر با هاب می‌باشد. تحلیل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شده است. در ابتدا، انرژی کل سیستم شامل انرژی پتانسیل و جنبشی تیر و لایه پیزوالکتریک محاسبه شده سپس با بهره‌گیری از روش ریلی- ریتز مبتنی بر کمینه‌سازی انرژی کل سیستم، فرکانس‌های طبیعی سیستم به دست آمده است. در ادامه تأثیر پارامترهای هندسی از قبیل ضخامت و پهناى تیر، شیب مخروط تیر، طول تیر، سرعت دورانی و

تأثیر زیادی بر فرکانس طبیعی دارد. لین و هیساو [۱۰] ارتعاش تیر چرخان بر اساس تئوری برشی مرتبه اول را با استفاده از سری پاور محاسبه کردند. آن‌ها همچنین تأثیر تغییر شعاع هاب بر فرکانس طبیعی را مورد بررسی قرار دادند. چویل و همکاران [۱۱] ارتعاشات تیر چرخان با زاویه پیچش اولیه از جنس کامپوزیت و کنترل با لایه پیزوالکتریک را به روش المان محدود محاسبه نمودند و نشان دادند که تغییر زاویه پیچش اولیه موجب تغییر پاسخ و فرکانس طبیعی می‌شود. زرین‌زاده و همکاران [۱۲] ارتعاشات تیر چرخان مخروطی شکل از جنس FGM را مورد بررسی قرار دادند. این تحقیق برای شش شرط مرزی مختلف و با استفاده از روش المان محدود انجام گرفته است. همچنین اثر جرم متمرکز و شعاع هاب را بر فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۱ فتح‌آبادی [۱۳] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر از جنس FGM با لایه پیزوالکتریک را بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار داد. وی اثر ضریب لاغری، ضریب بهره، ضخامت لایه و پیزوالکتریک بر فرکانس پایه را تحقیق نمود. فانگ و ژو [۱۴] ارتعاشات آزاد تیر چرخان از جنس FGM در راستای محوری را با استفاده از روش ریلی- ریتز و چبیشف- ریتز مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نتایج را برای شش شرط مرزی مورد بررسی قرار دادند. اکسنسر و آیدوگو [۱۵] ارتعاشات آزاد تیر چرخان از جنس کامپوزیت بر اساس تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه اول و با استفاده از روش ریتز را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۰۶ کایا [۱۶] ارتعاشات آزاد تیر چرخان تیموشینکو را برای شرایط مرزی مختلف بررسی کرد. او همچنین تأثیر سرعت دوران را بر فرکانس طبیعی بررسی کرد.

ساب رحمانیام و همکاران [۱۷] در سال ۱۹۸۱ فرکانس طبیعی و شکل مودهای ارتعاش تیر چرخان با سطح مقطع آیرودینامیک با در نظر گرفتن تغییر شکل و اینرسی دورانی مجاز را مطالعه کردند. در سال ۱۹۸۲ هلویر و لیو و فریبرگ [۱۸] ماتریس سختی دینامیک تیر چرخان با در نظر گرفتن سختی دورانی را به‌صورت دقیق محاسبه و ارتعاشات آن را بررسی کردند. سابان چو و اوران [۱۹] در سال ۲۰۰۶ تعادل دینامیکی تیر چرخان تیموشینکو را با سطح مقطع متقارن با



(الف)



(ب)

شکل (۲): المانی از تیر تغییر شکل یافته. (الف) نمای

جانبی از جابجایی نقطه P_0 (ب) نمایی از مقطع تیر [۱۶] که در این روابط شعاع هاب، x فاصله نقطه موردنظر از ابتدای هاب، u_0 جابجایی محوری، y فاصله نقطه موردنظر از مرکز هاب در راستای محور y ، z فاصله عمودی نقطه موردنظر از صفحه وسط، w جابجایی خمشی و θ چرخش نقطه موردنظر می‌باشد.

اگر بردار مکان قبل از جابجایی و \vec{r}_0 بردار تغییر مکان بعد از جابجایی باشد، برای جابجایی‌های کوچک داریم:

$$d\vec{r}_0 = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (۴)$$

و با مشتق‌گیری از رابطه (۱) و استفاده از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$d\vec{r}_1 = [(1 + u'_0 - z\theta')dx - \theta dz]\vec{i} + dy\vec{j} + (w' + dz)\vec{k} \quad (۵)$$

کرنش الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_1 - d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 = 2[dx \ dy \ dz] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ij} \\ dz \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در رابطه (۶) مؤلفه‌های کرنش

به شرح زیر به دست می‌آید:

$$2\varepsilon_{xx} = (1 + u'_0 - z\theta')^2 + (w')^2 - 1 \quad (۷)$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

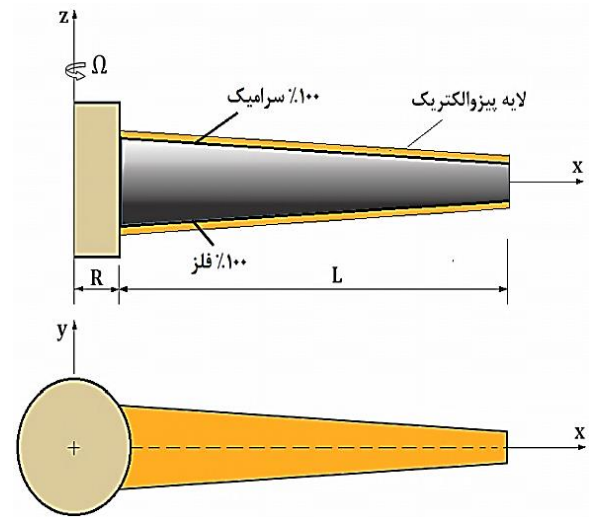
$$\gamma_{xz} = w' - (1 + u'_0 - z\theta')\theta$$

با صرف نظر از ترم‌های مرتبه بالا:

همچنین ولتاژ پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی مطالعه شده است.

۲- روابط حاکم بر تیر

شکل ۱ یک تیر یکسر گیردار با سطح مقطع مخروطی چرخان با لایه محرک پیزوالکتریک و شعاع هاب R را نشان می‌دهد که با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور قائم z دوران می‌کند.



شکل (۱): تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی و لایه محرک پیزوالکتریک

که در آن h ضخامت تیر، R شعاع پایه صلب دوار یا هاب، L طول تیر، c_b شیب مخروط در راستای پهنای تیر، c_h شیب مخروط در راستای ارتفاع تیر، h_0 پهنای تیر در ناحیه ریشه تیر در $(x=R)$ و h ارتفاع تیر در ناحیه ریشه تیر در $(x=R)$ می‌باشد. برای به دست آوردن معادلات دوبعدی حاکم بر ارتعاشات آزاد تیر، المانی از تیر تغییر شکل یافته را مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم.

مطابق شکل ۲ نقطه P_0 در اثر چرخش به نقطه P جابجا می‌شود. بردار جابجایی این تغییر به صورت زیر است [۱۶]:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (۱)$$

مکان نقطه قبل از جابجایی:

$$x_0 = R + x \quad , \quad y_0 = y \quad , \quad z_0 = z \quad (۲)$$

مکان نقطه بعد از جابجایی:

$$\begin{aligned} x_1 &= R + x + u_0 - z\theta \\ y_1 &= y \quad , \quad z_1 = w + z \end{aligned} \quad (۳)$$

در این رابطه $T(x)$ نیروی گریز از مرکز می‌باشد که در اثر چرخش تیر به وجود می‌آید. با جایگذاری رابطه (۱۵) در رابطه (۱۱) داریم:

$$U_b^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L E(z) \left[A \left(\frac{T(x)}{E(z)A} \right)^2 + I(\theta)^2 + A \left(\frac{T(x)}{E(z)A} \right) (w')^2 \right] dx \quad (16)$$

$$U_b^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{T^2(x)}{E(z)A} + E(z)I(\theta)^2 + T(x)(w')^2 \right] dx$$

برای به دست آوردن $T(x)$ نیروی گریز از مرکز در هر نقطه از تیر که با سرعت زاویه‌ای Ω به وجود آمده است داریم:

$$T(x) = \iiint_V r \Omega^2 dV = \int_x^L \rho(z) A \Omega^2 (R+x) dx \quad (17)$$

انرژی پتانسیل ناشی از پیچش تیر به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۴]:

$$U_s^{FGM} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2) dV \quad (18)$$

$$U_s^{FGM} = \frac{1}{2} \int_A \int_0^L G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2) dA dx$$

در این رابطه G مدول برشی تیر می‌باشد. با جایگذاری معادله (۸) در رابطه (۱۸) داریم:

$$U_s^{FGM} = \frac{1}{2} \int_A \int_0^L G(w' - \theta)^2 dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L kAG(w' - \theta)^2 dx \quad (19)$$

در این رابطه k ضریب تصحیح برشی تیر می‌باشد. پس انرژی پتانسیل کلی تیر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L A_2(\theta')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T(w')^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L C(w' - \theta)^2 dx$$

$$+ cte \quad (20)$$

در این رابطه:

$$A_2 = \int_{-h/2}^{-h/2} C_{11} z^2 dA$$

$$C = \int_{-h/2}^{-h/2} k C_{55} dA \quad (21)$$

$$C = \int_{-h/2}^{-h/2} k C_{55} dA$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_0 - z\theta' + \frac{(w')^2}{2} \quad (8)$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = w' - \theta$$

خواص مواد FGM تابع ضخامت قطعه می‌باشد و از یک سمت قطعه $(z = +\frac{h}{2})$ تا سمت دیگر $(z = -\frac{h}{2})$ آن به صورت زیر می‌باشد:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m \quad (9)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m$$

که در آن m , c و p به ترتیب بیانگر فلز، سرامیک و توان کسر حجمی ماده تابعی می‌باشد. به دلیل ثابت نبودن مقادیر فوق در معادلات انرژی از فرم کلی $E(z)$ و $\rho(z)$ استفاده شده و در نهایت در راستای ضخامت انتگرال گیری می‌شود.

انرژی پتانسیل ناشی از خمش و چرخش آن به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۴]:

$$U^{FGM} = U_b^{FGM} + U_s^{FGM} \quad (10)$$

در این معادله U_b^{FGM} انرژی پتانسیل ناشی از خمش و U_s^{FGM} انرژی پتانسیل ناشی از پیچش تیر می‌باشد. انرژی پتانسیل ناشی از خمش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$U_b^{FGM} = \iiint_V \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^2}{2} dV \quad (11)$$

۱-۲- انرژی پتانسیل تیر

با قرار دادن رابطه (۸) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$U_b^{FGM} = \frac{1}{2} \int_A \int_0^L \sigma_{xx} \left[u'_0 - z\theta' + \frac{(w')^2}{2} \right]^2 dx dA \quad (12)$$

۲-۲- انرژی پتانسیل ناشی از پیچش تیر

با انتگرال گیری از رابطه (۱۲) روی سطح مقطع تیر و حذف ترم‌های مرتبه بالا داریم:

$$U_b^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L E(z) \left[A(u'_0)^2 + I(\theta')^2 + Au'_0(w')^2 \right] dx \quad (13)$$

که در آن I ممان دوم سطح تیر حول محور y می‌باشد:

$$I = \int_A z^2 dA \quad (14)$$

برای ساده‌سازی رابطه (۱۳) می‌نویسیم:

$$u'_0(x) = \varepsilon_0(x) = \frac{T(x)}{E(z)A} \quad (15)$$

$$\int_A \int_0^L V_z^2 \rho(z) dA dx = \int_A \int_0^L (\dot{w})^2 \rho(z) dA dx \quad (30)$$

$$= \int_0^L B_1 (\dot{w})^2 dx$$

پس انرژی جنبشی به صورت زیر می‌باشد:

$$T^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L [B_2 (\dot{\theta})^2 + B_2 \Omega^2 (\theta)^2 + B_1 (\dot{w})^2] dx \quad (31)$$

ضرایب B_1 و B_2 به صورت زیر می‌باشد:

$$(B_1, B_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z^2) dA \quad (32)$$

۳- روابط حاکم بر لایه پیزوالکتریک

روابط تنش و جابجایی الکتریک برای لایه پیزوالکتریک

به کاررفته در تیر به صورت زیر می‌باشد [۲۴]:

$$\sigma_{xx} = C_{11}^{piezo} \varepsilon_{xx} - e_{31} E_z \quad (33)$$

$$D_z = e_{31} \varepsilon_{xx} + e_{33} E_z$$

که σ_{xx} مؤلفه تنش، ε_{xx} مؤلفه کرنش، E_z شدت میدان

الکتریکی، C_{11}^{piezo} تانسور الایسیسته ماده پیزوالکتریک در

یک میدان الکتریکی ثابت، e_{31} ثابت کرنش پیزوالکتریک،

e_{33} ثابت دی الکتریک و D_z جابجایی الکتریکی می‌باشد.

۳-۱- انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک

انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک به صورت زیر می‌باشد [۲۴]:

$$U^{piezo} = U_m - U_e \quad (34)$$

که در این رابطه U_m و U_e به ترتیب انرژی پتانسیل مکانیکی

و انرژی پتانسیل الکتریکی می‌باشد.

$$U^{piezo} = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \frac{1}{2} \iiint_V \{D\}^T \{E\} dV \quad (35)$$

$$U^{piezo} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV - \frac{1}{2} \iiint_V D_z E_z dV$$

انرژی پتانسیل مکانیکی به صورت زیر می‌باشد:

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV = \frac{1}{2} \iiint_V (C_{11} \varepsilon_{xx} - e_{31} E_z) dV \quad (36)$$

که با ساده‌سازی آن، در نهایت U_m به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^L A_2 (\dot{\theta})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T'(w)^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L \varepsilon_{31} E_z (w)^2 dx dA + cte \quad (37)$$

که در رابطه فوق A_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

k ضریب تصحیح تنش برشی و ضرایب الایسیسته C_{11} و C_{55} به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$C_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (22)$$

$$C_{55} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$

۲-۳- انرژی جنبشی تیر

سرعت نقطه P در اثر چرخش تیر به صورت زیر می‌باشد

[۱۴]:

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \Omega \vec{k} \times \vec{r}_1 \quad (23)$$

بردار سرعت را می‌توان برحسب ترم‌های جابجایی به صورت

زیر نوشت:

$$\vec{V} = (\dot{x}_1 - \Omega y_1) \vec{i} + (\dot{y}_1 + \Omega x_1) \vec{j} + \dot{z}_1 \vec{k} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲۴) مؤلفه‌های سرعت

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V_x &= -z\dot{\theta} - y\Omega \\ V_y &= (R + x + u_0 - z\theta)\Omega \\ V_z &= \dot{w} \end{aligned} \quad (25)$$

انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^{FGM} = \frac{1}{2} \int_A \int_0^L (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \rho(z) dA dx \quad (26)$$

با جایگذاری روابط (۲۴) و (۲۵) در رابطه (۲۶) انرژی

جنبشی تیر برحسب مؤلفه‌های جابجایی حاصل می‌شود:

مؤلفه اول انرژی جنبشی به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_A \int_0^L V_x^2 \rho(z) dA dx &= \int_A \int_0^L (z\dot{\theta} + y\Omega)^2 \rho(z) dA dx \\ &= \int_A \int_0^L [z^2 (\dot{\theta})^2 + y^2 \Omega^2 + 2yz\Omega\dot{\theta}] \rho(z) dA dx \end{aligned} \quad (27)$$

مؤلفه‌های دوم و سوم ثابت می‌باشد. پس:

$$\begin{aligned} \int_A \int_0^L V_x^2 \rho(z) dA dx &= \int_A \int_0^L z^2 (\dot{\theta})^2 \rho(z) dA dx \\ &= \int_0^L B_2 (\dot{\theta})^2 dx + etc \end{aligned} \quad (28)$$

مؤلفه دوم انرژی جنبشی به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_A \int_0^L V_y^2 \rho(z) dA dx &= \int_A \int_0^L [(R + x + u_0 - z\theta)\Omega]^2 \rho(z) dA dx \\ &= \int_0^L B_2 \Omega^2 (\theta)^2 dx + etc \end{aligned} \quad (29)$$

مؤلفه سوم انرژی جنبشی به صورت زیر می‌شود:

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (47)$$

که در این رابطه ϕ توزیع پتانسیل الکتریکی می‌باشد. برای به دست آوردن رابطه E_z ابتدا توزیع پتانسیل الکتریکی به صورت یک تابع مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi = \phi_0 + z\phi_1 \quad (48)$$

با توجه به اختلاف پتانسیل الکتریکی در دو سر تیر داریم:

$$\phi = 0 \quad \text{at} \quad z = \frac{h}{2} \quad (49)$$

$$\phi = V_0 \quad \text{at} \quad z = h_p + \frac{h}{2}$$

که در این رابطه V_0 ولتاژ اعمالی و h_p نیز ضخامت لایه پیزوالکتریک می‌باشد. با اعمال شرایط مرزی در رابطه (49) مقادیر ϕ_0 و ϕ_1 تعیین شده و ϕ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\phi = \frac{V_0}{2} + \left(\frac{V_0}{h_p}\right)z \quad (50)$$

$$E_z = -\frac{V_0}{h_p}$$

۴- روابط تیر مخروطی

برای یک تیر مخروطی با سطح مقطع مستطیلی مطابق شکل ۱ ارتفاع و پهناي تیر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$b = b_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right) \quad (51)$$

$$h = h_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)$$

که b_0 و h_0 به ترتیب پهنا و ارتفاع سطح مقطع تیر در $x = 0$ و c_b و c_h ضرایب نسبت شیب مخروط به ترتیب در دو جهت پهنا و ارتفاع سطح مقطع تیر می‌باشد. با این فرض پارامترهای ابعادی در معادلات انرژی به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$A = A_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right) \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right) \quad (52)$$

$$I = I_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L}\right) \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^3$$

از رابطه (51) می‌توان نتیجه گرفت، برای مقدار $(c_b = c_h = 0)$ مقطع تیر منشوری یا یکنواخت، برای مقدار $(0 < c_b, c_h < 1)$ مقطع تیر مخروط همگرا و برای مقدار $(-1 < c_b, c_h < 0)$ مقطع تیر مخروط وگرا خواهد بود. در شکل ۲ چند شکل ۲ از مقادیر فوق آمده است:

$$A'_2 = \int_{h/2}^{h_p+h/2} C_{11}^{piezo} z^2 dA \quad (38)$$

همچنین $T'(x)$ نیروی گریز از مرکز می‌باشد که در اثر چرخش تیر با سرعت زاویه‌ای Ω به وجود آمده است و رابطه آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T'(x) = \int_x^L B'_1 \Omega^2 (R+x) dx \quad (39)$$

و ضرایب B_1 و B_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B'_1 = \int_{h/2}^{h_p+h/2} \rho^{piezo}(z) dA \quad (40)$$

که در رابطه بالا ρ^{piezo} چگالی لایه پیزوالکتریک می‌باشد. انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر می‌باشد:

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_V (D_z E_z) dV = \frac{1}{2} \iiint_V (e_{31} \varepsilon_{xx} + e_{33} E_z) E_z dV \quad (41)$$

حال با ساده‌سازی رابطه فوق انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر می‌شود:

$$U_e = \frac{1}{4} \iint_A \int_0^L (e_{31} E_z) (w')^2 dx dA + cte \quad (42)$$

در نهایت انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک به صورت زیر می‌شود:

$$U^{piezo} = \frac{1}{2} \int_0^L A'_2 (\theta')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T'(w')^2 dx - \frac{1}{2} \iint_A \int_0^L (e_{31} E_z) (w')^2 dx dA \quad (43)$$

۳-۲- انرژی جنبشی لایه پیزوالکتریک

برای محاسبه انرژی جنبشی لایه پیزوالکتریک، مشابه آنچه برای تیر تیموشینکو گفته شد، عمل می‌شود. رابطه کلی انرژی جنبشی به صورت زیر می‌باشد [۲۴]:

$$T^{piezo} = \frac{1}{2} \int_0^L [B'_2 (\dot{\theta})^2 + B'_2 \Omega^2 (\theta)^2 + B'_1 (\dot{w})^2] dx \quad (44)$$

در این رابطه ضرایب B'_1 و B'_2 :

$$(B'_1, B'_2) = \int_{h/2}^{h_p+h/2} \rho^{piezo}(z) (1, z^2) dA \quad (45)$$

انرژی کل سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$U = U^{FGM} + U^{piezo} \quad (46)$$

$$T = T^{FGM} + T^{piezo}$$

۳-۳- محاسبه شدت میدان الکتریکی (E_z)

شدت میدان الکتریکی E_z می‌باشد و رابطه آن به صورت زیر است [۱۳]:

مرزی تعریف می‌شود و برای شرط مرزی یکسر گیردار به صورت زیر است:

$$F_x(x) = F_\theta(x) = x \quad (55)$$

از طرفی تابع چبیشف $P_i(x)$ هم به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$P_i(x) = \cos[(i-1)\cos^{-1}(2x-1)], x \in [0, L] \quad (56)$$

انرژی پتانسیل کل سیستم برابر است با:

$$\Pi = U - T = (U^{FGM} + U^{piezo}) - (T^{FGM} + T^{piezo}) \quad (57)$$

با جایگزین کردن روابط (۵۳) و (۵۴) در روابط (۲۰)، (۳۱)، (۴۳)، (۴۴) داریم:

$$U^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L A_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \sum_{i=1}^N d_i P_i(x) \right)^2 dx + \int_0^L T \frac{\partial}{\partial x} \left(x \sum_{i=1}^N c_i P_i(x) \right)^2 dx + \int_0^L C \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x \sum_{i=1}^N c_i P_i(x) \right) - \left(x \sum_{i=1}^N d_i P_i(x) \right) \right)^2 dx \Big| e^{i\omega_n t} \quad (58)$$

در روش ریلی-ریتز، اساس کار مشتق‌گیری تابع انرژی کل Π برحسب ضرایب شکل مود c_i و d_i است که در نهایت تعداد $2N$ معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

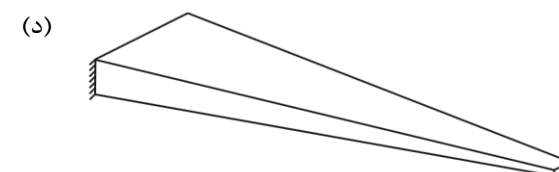
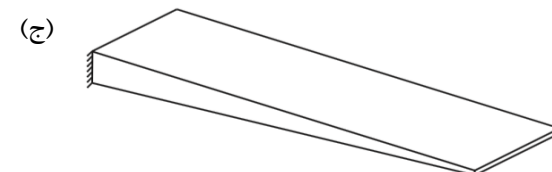
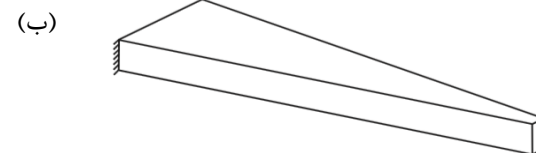
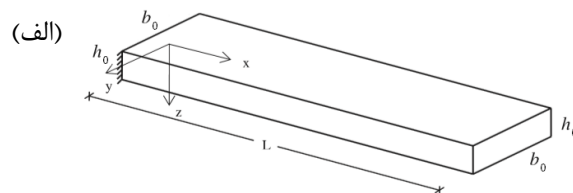
$$\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (62)$$

$$\Pi_{i+N} = \frac{\partial \Pi}{\partial d_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

حال با استفاده از هر یک از معادلات به دست آمده، ماتریس ضرایب به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1} & \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial d_{N-1}} & \frac{\partial \Pi_1}{\partial d_N} \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1} & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \Pi_2}{\partial d_{N-1}} & \frac{\partial \Pi_2}{\partial d_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Pi_{2N-1}}{\partial c_1} & \frac{\partial \Pi_{2N-1}}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \Pi_{2N-1}}{\partial d_{N-1}} & \frac{\partial \Pi_{2N-1}}{\partial d_N} \\ \frac{\partial \Pi_{2N}}{\partial c_1} & \frac{\partial \Pi_{2N}}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \Pi_{2N}}{\partial d_{N-1}} & \frac{\partial \Pi_{2N}}{\partial d_N} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \times \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{Bmatrix}_{2N \times 1} = \{0\}_{2N \times 1} \quad (63)$$

که ماتریس فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه نوشت:



شکل (۲): حالت‌های مختلف مقطع تیر برحسب تغییرات

ضرایب نسبت مقطع مخروط. (الف) $(c_b = c_h = 0)$ (ب)

(ج) $(c_b \neq 0, c_h = 0)$ (د) $(c_h \neq 0, c_b = 0)$

$(c_h \neq 0, c_b \neq 0)$

۵- تحلیل ارتعاشات آزاد

برای استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر مخروطی از روش حل ریلی-ریتز بهره گرفته شده است. به روش تفکیک متغیرها پاسخ مسئله را به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(x, t) = \bar{w}(x) e^{i\omega_n t} \quad (53)$$

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x) e^{i\omega_n t}$$

در این روابط $\bar{w}(x)$ و $\bar{\theta}(x)$ مؤلفه‌های جابجایی در راستای x (شکل مود) و ω_n فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. شکل مودها بر اساس تابع چبیشف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{w}(x) = F_x(x) \sum_{i=1}^N c_i P_i(x) \quad (54)$$

$$\bar{\theta}(x) = F_\theta(x) \sum_{i=1}^N d_i P_i(x)$$

در رابطه بالا c_i و d_i ضرایب مجهول شکل مود و N تعداد جملات لازم برای همگرایی پاسخ هستند. عبارات $F_x(x)$ و $F_\theta(x)$ توابع مرزی نامیده می‌شود که برای ارضای شرایط

جدول از لایه پیزوالکتریک بدون ولتاژ الکتریکی با شرایط زیر و از چهار جمله اول سری چبیشف استفاده شده است.

$$E = 126 \text{ GPa}$$

$$C_{11} = 7500$$

$$e_{31} = -6.5 \text{ (Coulomb/m}^2\text{)}$$

$$\epsilon_{33} = 1.302 \times 10^{-8} \text{ (C/Volt.m)}$$

جدول (۱): مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد μ برای تیر منشوری غیردوار از جنس آلومینیوم بدون لایه پیزوالکتریک

فرکانسی طبیعی بی‌بعد μ			
	سوم	دوم	اول
مرجع [۱۴]	۳۶/۷۰۸	۱۶/۲۸۹	۳/۳۲۴۱
تحقیق حاضر	۳۳/۹۱۸	۱۴/۹۳۷	۳/۱۰۴۲
درصد خطا	۷/۶	۸/۳	۶/۶

جدول (۲): مقایسه فرکانس طبیعی برای تیر چرخان از جنس مواد تابعی با لایه پیزوالکتریک

فرکانسی طبیعی (Hz)			
	سوم	دوم	اول
مرجع [۲۴]	۱۴۶۷۵/۷۲	۵۶۷۴/۸۳	۹۷۴/۱۵
تحقیق حاضر	۱۵۶۵۸/۹۵	۶۲۳۰/۹۶	۱۰۳۷/۱۸
درصد خطا	۶/۷	۹/۸۲	۸/۶

۱-۶- آزمون تعداد جملات لازم سری برای

همگرایی نتایج

به منظور دستیابی به تعداد جملات لازم برای سری چبیشف جهت همگرایی پاسخ، در جدول ۳، فرکانس طبیعی تیر چرخان با مواد تابعی بدون لایه پیزوالکتریک برای ۸ جمله اول سری چبیشف نشان داده شده است.

جدول (۳): فرکانس طبیعی برای تیر چرخان با مواد تابعی برای ۸ جمله اول سری چبیشف

هشتم	هفتم	ششم	پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول
۸۱۷۶	۸۱۷۶	۸۱۷۶	۹۸۱۶	۹۸۱۶	۹۸۱۶	۱۱۳۹/۱۲	۳۷۳۶/۸۳

$$([K] - \omega_n^2[M]) \times \begin{Bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (۶۴)$$

در این رابطه $[K]$ ماتریس سختی، $[M]$ ماتریس جرمی و ω_n فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب رابطه (۶۴)، معادله فرکانس درجه 4N حاصل می‌شود:

$$\det([K] - \omega_n^2[M]) = 0 \quad (۶۵)$$

با حل معادله فوق فرکانس‌های طبیعی سیستم به دست می‌آید.

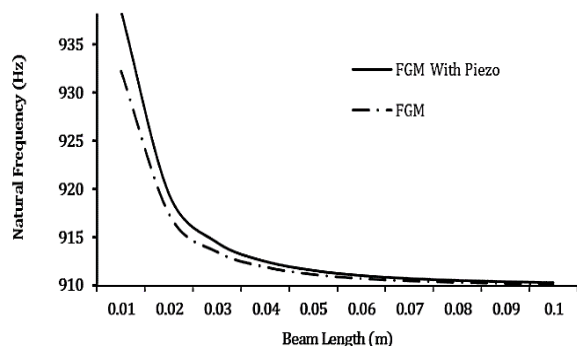
۶- اعتبارسنجی محاسبات

در این بخش ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی با لایه پیزوالکتریک و با شرط مرزی یکسر گیردار بررسی می‌شود. برای این منظور، ابتدا نتایج به دست آمده از فرمول‌بندی ارائه شده در بخش‌های قبل برای ارتعاشات آزاد، با نتایج تحقیق سایر محققان صحت‌سنجی شده، سپس تأثیر پارامترهای مختلف مؤثر بر ارتعاشات آزاد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای اعتبارسنجی نتایج حاصل از فرمول‌بندی ارائه شده برای ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی با لایه پیزوالکتریک، با توجه به در دسترس بودن تحقیقات مشابه، اقدام به صحت‌سنجی پاسخ‌ها در شرایط مختلف با منابع مشخص شده گردیده است. در همه موارد نتایج دقت قابل قبولی به دست آمده است.

در جدول ۱ نتایج مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول تا سوم تیر منشوری چرخان ($c_b = c_n = 0$) از جنس آلومینیوم ($n=0$) و بدون لایه پیزوالکتریک و غیردوار با مرجع [۱۴] نشان داده شده است ($\mu = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_0 A_0}{E_0 I_0}}$). در مرجع مذکور ارتعاشات آزاد یک تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. در استخراج نتایج این جدول از چهار جمله اول سری چبیشف استفاده شده است. نتایج جدول ۱ بیانگر انطباق خوب نتایج این تحقیق با نتایج مرجع [۱۴] می‌باشد.

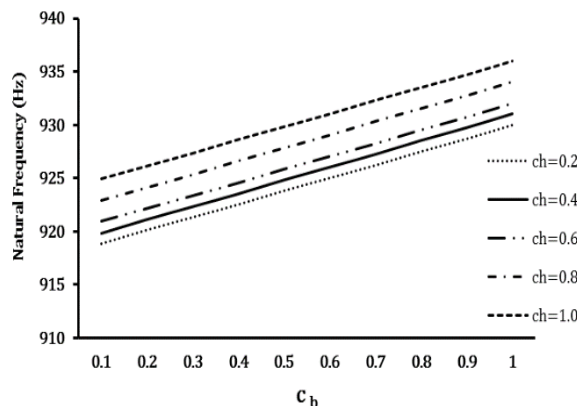
در جدول ۲ نتایج مقایسه فرکانس طبیعی اول، دوم و سوم ارتعاشات آزاد تیر چرخان از جنس مواد تابعی با لایه پیزوالکتریک و سرعت دورانی $\Omega = 1000 \text{ rad/sec}$ با مرجع [۲۴] نشان داده شده است. در استخراج نتایج این

طول تیر، اثر شرایط مرزی دو سر سازه رفته‌رفته کاهش یافته و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی برای طول‌های زیاد از تیر به یکدیگر نزدیک می‌شوند.



شکل (۳): تأثیر طول تیر چرخان بر فرکانس طبیعی تیر از جنس مواد تابعی در دو حالت با و بدون لایه پیزوالکتریک ($b = h = 0.1 \text{ m}$, $c_b = c_h = 0.6$)

در شکل ۴ تأثیر پهنای تیر بر فرکانس طبیعی آن برای ارتفاع‌های مختلف با شیب‌های مثبت (همگرا) بررسی شده است.



شکل (۴): تأثیر شیب مخروط در راستای پهنای تیر بر فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف شیب در راستای ارتفاع ($k = 0.85$ و $L = 0.01 \text{ m}$, $V = 4000 \text{ mV}$)

همان‌طور که در شکل ۴ مشخص است با افزایش شیب مخروط در هر دو راستای پهنای و ارتفاع تیر به‌صورت همگرا، جرم تیر کاسته شده و موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

در شکل ۵ تأثیر شیب مخروط پهنای تیر بر فرکانس طبیعی تیر چرخان برای شیب‌های منفی (واگرا) بررسی شده است.

همان‌طور که نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد برای جملات چهارم به بعد تغییری در فرکانس طبیعی اتفاق نمی‌افتد و در نظر گرفتن چهار جمله از سری چبیشف برای دستیابی به نتایج مطلوب کفایت می‌کند.

در این بخش تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و خواص مادی تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی با لایه محرک پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی آن بررسی می‌گردد. برای این منظور، خواص مواد تابعی و پیزوالکتریک طبق جداول ۴ و ۵ در نظر گرفته شده است. همچنین مشخصات هندسی تیر در جدول ۶ آمده است.

جدول (۴): خواص مواد تابعی [۲۴]

ν	E_m (GPa)	ρ_m ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)	E_c (GPa)	ρ_c ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)
0.3	70	2700	200	5700

جدول (۵): خواص ماده پیزوالکتریک

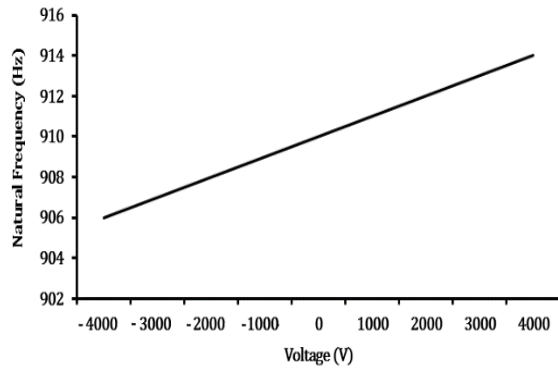
ϵ_{33} ($\frac{\text{C}}{\text{Vol. m}}$)	e_{31} ($\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$)	E (GPa)	C_{11}
1/302	-6/5	126	7500

جدول (۶): مشخصات هندسی تیر (واحدها به متر است)

R	h_0	b_0	L	
0.1	0.1	0.1	0.1	تیر FGM
0.1	0.01	0.1	0.1	لایه پیزوالکتریک

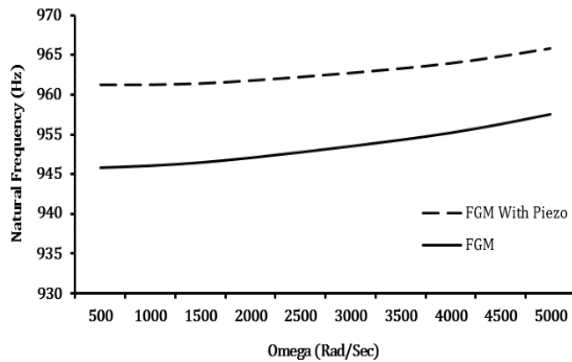
۷- بررسی نتایج

در این بخش تأثیر تغییرات طول تیر بر ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی با لایه پیزوالکتریک بررسی شده است. نتایج در شکل ۳ نشان داده شده است. نتایج این شکل نشان می‌دهد با افزایش طول تیر، فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد زیرا با افزایش طول تیر جرم آن افزایش و سختی آن کاهش یافته و نهایتاً فرکانس طبیعی سیستم نیز کاهش می‌یابد. همچنین این نمودار بیانگر آن است که وجود لایه محرک پیزوالکتریک، باعث افزایش فرکانس‌های تیر می‌شود که این افزایش در طول‌های کوتاه‌تر تیر محسوس‌تر است. ملاحظه می‌شود که با افزایش



شکل (۷): تأثیر ولتاژ تحریک پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی تیر چرخان ($R = 0.01$ m, $L = 0.01$ m, $k = 0.85$ و $\Omega = 1000$ rad/sec)

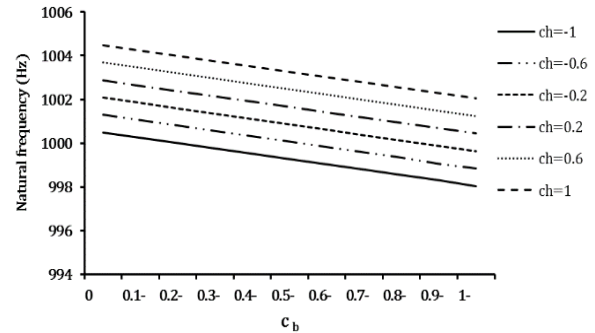
در شکل ۸ تأثیر سرعت چرخش تیر چرخان بر فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد تیر بررسی شده است. همان طور که انتظار می رود با افزایش سرعت زاویه ای تیر، فرکانس طبیعی افزایش می یابد. دلیل این امر افزایش نیروی گریز از مرکز که معادل نیروی کشش در تیر است، باعث افزایش سختی تیر می شود که به آن سختی دورانی می گویند.



شکل (۸): تأثیر سرعت چرخش تیر بر فرکانس طبیعی ($c_b = c_h = 0.6$ و $k = 0.85$ ، $L = 0.01$ m, $R = 0.01$)

در شکل ۹ تأثیر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان بررسی شده است. با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک انرژی پتانسیل تیر افزایش یافته که موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم می شود و شکل ۹ این مطلب را تأیید می کند.

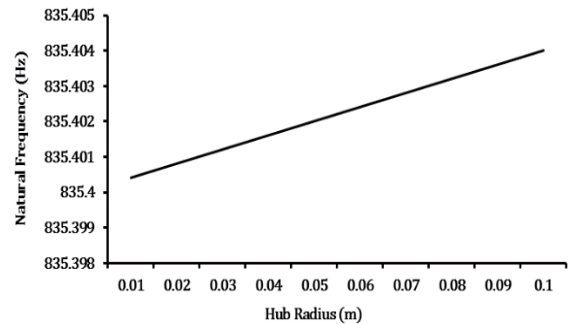
در شکل ۱۰ تأثیر ضریب کسر حجمی بر فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان بررسی شده است.



شکل (۵): تأثیر شیب مخروط پهنای تیر بر فرکانس طبیعی تیر چرخان برای مقادیر مختلف شیب مخروط ارتفاع تیر ($V = 4000$ mV, $L = 0.01$ m و $k = 0.85$)

همان طور که در نمودارها مشخص است با کاهش شیب مخروط در هر دو راستای پهنای و ارتفاع تیر، جرم تیر افزایش یافته و موجب کاهش فرکانس طبیعی سیستم می شود.

در شکل ۶ تأثیر شعاع هاب بر حسب پهنای مختلف تیر مخروطی چرخان بر فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد آن بررسی شده است.



شکل (۶): تأثیر شعاع هاب بر فرکانس طبیعی ($k = 0.85$ و $L = 0.01$ m, $V = 4000$ mV, $c_b = c_h = 0.6$)

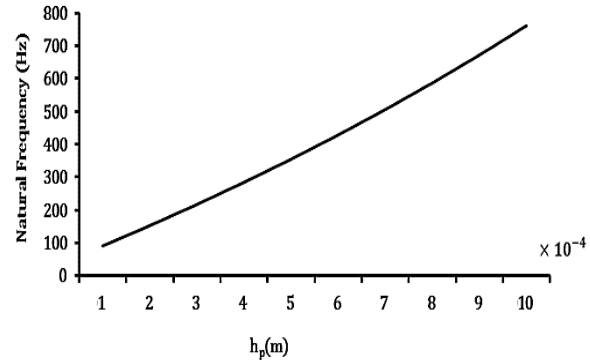
همان طور که در شکل ۶ مشخص است با افزایش شعاع هاب فاصله مرکز جرم تیر یا محور دوران بیشتر شده و صلبیت تیر افزایش می یابد و فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد.

در شکل ۷ تأثیر ولتاژ تحریک مواد پیزوالکتریک بر ارتعاشات آزاد تیر مخروطی چرخان بررسی شده است. شکل ۷ نشان می دهد با افزایش ولتاژ لایه پیزوالکتریک فرکانس طبیعی افزوده شده و علت آن افزایش انرژی پتانسیل کل تیر و در نهایت افزایش سختی تیر می باشد.

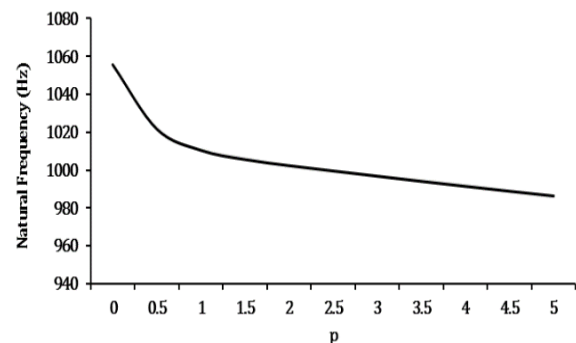
- با افزایش طول تیر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.
- با افزایش شیب مخروط در دو راستای پهنا و ارتفاع تیر از صفر تا یک (همگرا) فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش این ضریب از صفر تا منفی یک (واگرا) فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.
- با افزایش شعاع هاب فرکانس طبیعی به صورت خطی افزایش می‌یابد.
- با افزایش ولتاژ پیزوالکتریک فرکانس طبیعی تقریباً به صورت خطی افزایش می‌یابد.
- با افزایش سرعت زاویه‌ای فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد به طوری که با بیشتر شدن سرعت افزایش فرکانس با شیب بیشتری افزایش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک فرکانس طبیعی تقریباً به صورت خطی افزایش می‌یابد.
- فرکانس طبیعی برای مواد سرامیک بیشتر از مواد فلزی است.

۹- مراجع

- [1] Southwell R, Gough F. "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", British ARC Reports and Memoranda, No. 766. 1921.
- [2] Yokoyama T. Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams. International Journal of Mechanical Sciences. 1988;30(10):743-55.
- [3] Lee S-Y, Kuo Y. Bending frequency of a rotating Timoshenko beam with general elastically restrained root. Journal of Sound and Vibration. 1993;162(2):243-50.
- [4] Du H, Lim M, Liew K. A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam. Journal of Sound and Vibration. 1994;175(4):505-23.
- [5] Banerjee J. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beams. Journal of Sound and Vibration. 2001;247(1):97-115.
- [6] Fang J-S, Zhou D. Free vibration analysis of rotating axially functionally graded tapered Timoshenko beams. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2016;16(05):1550007.



شکل (۹): تأثیر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی تیر چرخان $(R = 0.01, L = 0.01 m, k = 0.85)$ و $(c_b = c_h = 0.6)$



شکل (۱۰): تأثیر ضریب کسر حجمی بر فرکانس طبیعی ارتعاشات تیر مخروطی چرخان $(R = 0.01, L = 0.01 m, k = 0.85)$ و $(c_b = c_h = 0.6)$

با افزایش ضریب کسر حجمی از خاصیت سرامیکی آن کاسته شده و به خاصیت فلزی افزوده می‌شود. با افزایش میزان فلز سیستم، جرم آن افزایش یافته و در نهایت فرکانس‌های طبیعی آن کاهش می‌یابد. ضمناً این کاهش در مقادیر پایین کسر حجمی محسوس‌تر است.

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاش آزاد یک تیر مخروطی چرخان از جنس مواد تابعی با لایه محرک پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته و اثر پارامترهای مختلف مسئله مانند طول تیر، شیب‌های مخروطی پهنا و ارتفاع، شعاع هاب، ولتاژ پیزوالکتریک، سرعت چرخش و ضخامت لایه پیزوالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی آن مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که:

- coupling. *Journal of Vibration and Control*. 2010;16(6):915-34.
- [20] Ozdemir Ozgumus O, Kaya MO. Energy expressions and free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam featuring bending-bending-torsion coupling. *Archive of Applied Mechanics*. 2013;83(1):97-108.
- [21] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A, Safarpour M, Ouakad HM, Dimitri R, Tornabene F. Nonlocal study of the vibration and stability response of small-scale axially moving supported beams on viscoelastic-Pasternak foundation in a hygro-thermal environment. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020.
- [22] Elaikh TE, Abed NM, Ebrahimi-Mamaghani A, editors. Free vibration and flutter stability of interconnected double graded micro pipes system conveying fluid. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*; 2020: IOP Publishing.
- [23] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N. Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. *Journal of Fluids and Structures*. 2019;87:150-73.
- [24] Jafari MS, Jafari AA. Free vibrations of rotating FGM beam with piezoelectric layer. *Iranian Acoustic and Vibration Association, Shahid Beheshti University*, 2016 (In Persian).
- [7] Bazoune A, Khulief Y. A finite beam element for vibration analysis of rotating tapered Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*. 1992;156(1):141-64.
- [8] Schilhansl M. Bending frequency of a rotating cantilever beam. 1958.
- [9] Yoo H, Shin S. Vibration analysis of rotating cantilever beams. *Journal of Sound and vibration*. 1998;212(5):807-28.
- [10] Lin S, Hsiao K. Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*. 2001;240(2):303-22.
- [11] Choi S-C, Park J-S, Kim J-H. Vibration control of pre-twisted rotating composite thin-walled beams with piezoelectric fiber composites. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;300(1-2):176-96.
- [12] Zarrinzadeh H, Attarnejad R, Shahba A. Free vibration of rotating axially functionally graded tapered beams. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2012;226(4):363-79.
- [13] Fathabadi M. Analysis of free and forced vibrations of FGM beam with piezoelectric layers. M.Sc. Thesis, Khajeh Nasir al-Din Tusi University, Faculty of Mechanical Engineering, 2011 (In Persian).
- [14] Fang J, Zhou D. Free vibration analysis of rotating axially functionally graded-tapered beams using Chebyshev-Ritz method. *Materials Research Innovations*. 2015;19(sup5):S5-1255-S5-62.
- [15] Aksencer T, Aydogdu M. Flapwise vibration of rotating composite beams. *Composite Structures*. 2015;134:672-9.
- [16] Kaya MO. Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method. *Aircraft engineering and aerospace Technology*. 2006.
- [17] Subrahmanyam K, Kulkarni S, Rao J. Coupled bending-torsion vibrations of rotating blades of asymmetric aerofoil cross section with allowance for shear deflection and rotary inertia by use of the Reissner method. *Journal of Sound and Vibration*. 1981;75(1):17-36.
- [18] Ozgumus OO, Kaya MO. Energy expressions and free vibration analysis of a rotating double tapered Timoshenko beam featuring bending-torsion coupling. *International journal of engineering science*. 2007;45(2-8):562-86.
- [19] Kaya MO, Ozgumus OO. Energy expressions and free vibration analysis of a rotating uniform Timoshenko beam featuring bending—torsion



Natural Frequencies Analysis of a Rotating Tapered Timoshenko Beam Made of Functionally Graded Material with Actuated Piezoelectric Layer

Shahrouz Yousefzadeh^{1*}, Mohammadmehdi Doostdar²

¹ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Aligudarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran

² Professor, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- The free vibration of rotating tapered Timoshenko beam with piezoelectric layer has been studied.
- The first-order shear deformation theory has been used to drive governing equations.
- By increasing the angular velocity, the natural frequency increases so that as the increasing velocity increases, the natural frequency increases with a steeper slope.

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 27 January 2022

Received in revised form: 7 February 2022

Accepted: 17 April 2021

Available online: 28 June 2022

*Correspondence:

sh.yousefzadeh@gmail.com

How to cite this article:

S. Yousefzadeh, M. Doostdar. Natural frequencies analysis of a rotating tapered Timoshenko beam made of functionally graded material with actuated piezoelectric layer. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(2):143-156.

Keywords:

Rotating tapered beam

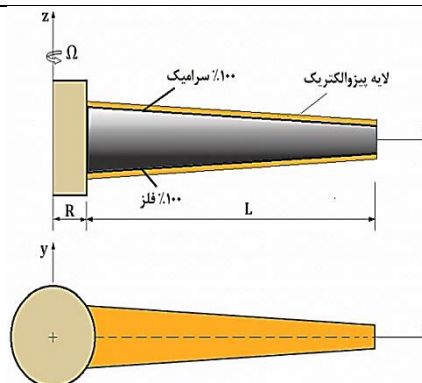
Functionally graded material

Natural frequency

Piezoelectric layer

First-order shear deformation theory

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this research, the free vibration of rotating tapered Timoshenko beam with piezoelectric layer has been studied. It is assumed that the beam is made of Functionally Graded Materials (FGM) through the thickness direction and the boundary condition is a cantilever attached to the hub. The first-order shear deformation theory has been used to drive governing equations. At first, the total energy of the system such as potential and kinetic energies for the beam and piezoelectric layer has been derived, and then the natural frequencies of the beam have been determined by the Ritz approach based on minimizing the total system energy. After verifying the results by comparing them with other research, the effects of some parameters such as hub radius, rotational speed, taper ratios, rotary inertia, material gradient, piezoelectric voltage, and beam thickness on the natural frequencies of the tapered Timoshenko beam have been studied in detail. The results showed that with increasing the angular velocity of the beam, the natural frequency increases so that as the increasing velocity increases, the natural frequency increases with a steeper slope.

