مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۸/ شماره ۳/ صفحه ۱۳-۲۶

نشریه علمی مکانیک هوافضا

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.3.2.4

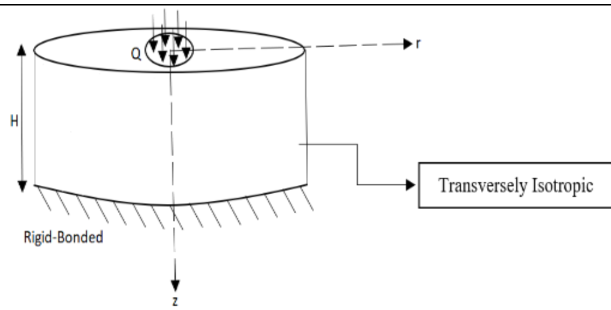
بررسی انتشار امواج در تک لایه ایزوتروپیک عرضی با ضخامت محدود، با استفاده از روش توابع پتانسیل

هادی تیموری[1]، حسن بیگلری[2*]

[1] کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

[2] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- ماده‌ی ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy بیشینه توابع گرین تنش و تغییرمکان را دارا می‌باشد.
- بارگذاری حلقوی باعث ایجاد ماکزیمم زاویه فرکانس حاصل از نشر موج برای توابع گرین تنش و جابجایی می‌گردد.

چکیده

در این مطالعه، انتشار امواج در تک لایه ایزوتروپیک عرضی موردبحث واقع‌شده است. هدف از این مقاله، پیدا کردن توابع گرین انتشار امواج می‌باشد که جهت یافتن تنش‌ها و تغییرمکان‌های حاصل از نشر موج نیروهای هارمونیکی که روی سطح تک لایه موردنظر واقع‌شده‌اند، صورت گرفته است. معادلات انتشار امواج در تک لایه ایزوتروپیک عرضی، معادلات دیفرانسیل پیچیده با مشتقات جزئی می‌باشند که با استفاده از توابع پتانسیل، معادلات حاکم به دو معادله مجزا تبدیل می‌شوند. سپس معادلات به‌دست‌آمده با استفاده از تبدیل هنکل در راستای شعاعی و سری فوریه در راستای محیطی، به معادلات ساده‌تری تبدیل می‌شوند که به کمک شرایط مرزی حاکم بر مسئله این معادلات به‌راحتی حل می‌گردند. به‌منظور صحت و دقت نتایج عددی به‌دست‌آمده، یک رویکرد مقایسه‌ای ارائه‌شده است. نتایج عددی حاصل از نشر موج برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی تحت فرکانس، بارگذاری و جنس‌های مختلف، مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته شده‌اند. ازجمله نتایج مهم حاصل از این تحقیق این است که ماده‌ی ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy بیشینه توابع گرین تنش و تغییرمکان را دارا می‌باشد و هم‌چنین بارگذاری حلقوی باعث ایجاد ماکزیمم زاویه فرکانس حاصل از نشر موج برای توابع گرین تنش و جابجایی می‌گردد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۰۹

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

ارائه برخط: ۱۴۰۱/۰۴/۰۷

*نویسنده مسئول: hbiglari@tabrizu.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

انتشار امواج

توابع پتانسیل

تبدیل هنکل

ایزوتروپیک عرضی

تک لایه

۱- مقدمه

انتشار امواج در تک لایه ایزوتروپیک عرضی، ناشی از یک منبع هارمونیکی ازجمله مباحث قابل‌توجه در مهندسی مکانیک جامدات می‌باشد. دلیل این امر کاربردهای گوناگون این مواد، به‌خصوص در رویه‌های پانل ساندویچی می‌باشد. با توجه به این امر که استفاده از خاصیت ایزوتروپیک عرضی در بسیاری از مصالح ازجمله لایه‌های چوب و مواد لاستیکی فشرده باضخامت محدود، در بسیاری از صنایع ازجمله سازه‌های نظامی و هوافضا کاربرد زیادی دارد، می‌توان از کاربرد تحقیق حاضر برای مدل‌سازی اثر انفجار (با استفاده از تابع دلتای دیراک) در روی این مصالح استفاده کرد. هم‌چنین در نظر داریم، تحقیق حاضر معادلات رفتاری مصالح ایزوتروپیک عرضی با ضخامت محدود درزمینه مکانیک را در برمی‌گیرد که در مراجع علمی به این حالت خیلی کمتر پرداخته‌شده است.

تعیین توابع گرین دینامیکی در محیط‌های ایزوتروپ به‌تفصیل موردبررسی قرارگرفته است. مقاله پایه‌ای در زمینه انتشار امواج در محیط‌های ایزوتروپ مربوط به لمب می‌باشد [۱]. او در این مقاله، انتشار امواج ناشی از بار هارمونیک وارد بر یک محیط ایزوتروپ و نیمه بی‌نهایت را بررسی کرده است و میدان تغییرمکان را در دو حالت دو بعدی و سه بعدی به دست آورده است. بعد از لمب محققان زیادی در زمینه انتشار امواج در محیط‌های ایزوتروپ تحقیق کرده‌اند و تحقیقات گسترده‌ای را ارائه کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به آخنباخ اشاره کرد [۲]. رایس و سد [۳] انتشار امواج و پراکندگی موج را با استفاده از روش المان مرزی جلو بردند؛ آن‌ها به کمک یک تابع گرین، معادله انتگرال مرزی را توسعه داده و به یک مجموعه محدود از روابط جبری تفکیک کردند. سپس با به‌کارگیری توابع گرین توانستند، دو فرم انتگرالی برای جابجایی‌ها و تنش‌های محیط به دست آورند.

استفاده از توابع پتانسیل به‌عنوان روشی کارا و مؤثر در تسهیل حل مسائل پیچیده مقادیر مرزی همواره موردتوجه محققین قرار داشته است به‌طوری‌که بسیاری از محققین در حوزه مسائل تئوری الاستیسیته نیز از این توابع برای تبدیل معادلات پیچیده حاکم بر مسئله به معادلاتی ساده‌تر و بعضاً دارای مفاهیم فیزیکی شناخته‌شده بهره برده‌اند. در این میان راه‌حل‌های ارائه‌شده توسط هاردینگ و اسندون [۴] در حوزه مسائل الاستواستاتیک با توجه به‌کارگیری توابع پتانسیل در کنار تبدیلات انتگرالی برای حل این مسائل از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشد. پک [۵] پاسخ یک محیط ایزوتروپیک و ارتجاعی نیمه متناهی به یک بارگذاری مدفون هارمونیک زمانی را با استفاده از روش توابع پتانسیل به دست آورد.

در حال حاضر با توجه به استفاده روزافزون از مواد غیر ایزوتروپیک، نیاز به تحقیقات در زمینه انتشار امواج در این محیط‌ها بیشتر احساس می‌شود. اکثر صنایع نظامی مانند جلیقه‌های ضدگلوله و پره‌های هلیکوپتر دارای خاصیت غیر ایزوتروپیک می‌باشند. با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه مهندسی مکانیک، محیط‌های غیر ایزوتروپیک معمولاً به‌صورت ایزوتروپیک عرضی و ارتوتروپیک مدل می‌شوند. تعیین توابع گرین استاتیکی برای محیط‌های با رفتار ایزوتروپیک عرضی نیز توسط محققین موردبررسی قرارگرفته است. پن و چو [۶] توابع گرین استاتیکی ناشی از بارگذاری نقطه‌ای را برای محیط‌های بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت ایزوتروپیک عرضی ارائه کردند. بو چوالد و پیتون [۷, ۸] مسائل الاستودینامیک مربوط به محیط‌های نیمه بی‌نهایت ایزوتروپیک عرضی تحت اثر بارگذاری سطحی را بررسی کردند. چن و همکاران توانستند، انتشار موج ریلی را در نزدیکی سطح محیط متخلخل اشباع‌شده از سیال را موردبررسی قرار دهند [۹]. لیانگ و همکاران [۱۰]، توابع گرین یک محیط متخلخل اشباع با رفتار ایزوتروپیک عرضی را که تحت نیروهای مدفون یکنواخت دایروی قرارگرفته بود را موردمطالعه و بررسی قراردادند؛ معادلات حرکت، بر پایه‌ی فرمولهای U_i-P بیان شدند و با کمک انتگرال هنکل و بسط سری فوریه، به فضای فوریه-هنکل انتقال داده شدند.

تحلیل‌های پیچیده ریاضی که منجر به ارائه فرمولاسیون دقیق مسئله انتشار امواج می‌گردند، امکان درک صحیح‌تر فیزیک انتشار امواج را فراهم می‌نمایند. در این راستا اسکندری قادی [۱۱] دو تابع پتانسیل کامل برای جداسازی معادلات حرکت در مسائل الاستودینامیکی ایزوتروپیک

عرضی ارائه کرده است. رحیمیان و همکاران [۱۲] با بهره‌گیری از توابع پتانسیل کامل ارائه‌شده توسط اسکندری و با استفاده از روش پک، در حل مسائل محیط‌های نیمه بی‌نهایت ایزوتروپیک، رویکردی جدید را در تعیین تغییرمکان‌ها و تنش‌های یک محیط ایزوتروپیک عرضی ارائه دادند. خجسته و همکاران [۱۳] با بهره‌گیری از توابع پتانسیل ارائه‌شده توسط اسکندری قادی، پاسخ دینامیکی یک نیم فضای ایزوتروپیک عرضی تحت بارگذاری هارمونیک در عمق آن را موردبررسی و تحلیل قراردادند. خجسته و همکاران [۱۴, ۱۵] با استفاده از توابع پتانسیلی که توسط اسکندری قادی پیشنهادشده است و با به‌کارگیری رویکرد ارائه‌شده توسط رحیمیان و همکاران، توابع گرین یک محیط دوگانه و همین‌طور یک نیم فضای دولایه ایزوتروپیک عرضی را برای یک بارگذاری دلخواه هارمونیک در درون آن‌ها تعیین نمودند؛ درواقع مطالعات انجام‌یافته توسط آن‌ها در رشته مهندسی عمران می‌باشد و بارهای اعمالی بیانگر حالت بار وارده به زمین بوده، بنابراین برای مدل‌سازی زمین با عمق نامحدود به‌کاررفته‌اند، درحالی‌که در مهندسی مکانیک باید ضخامت محدود در نظر گرفته شود. اکبری و همکاران توابع گرین نامتقارن به محور عمودی یک محیط نیمه بی‌نهایت مواد FGM با رفتار ایزوتروپیک عرضی را موردبحث قراردادند [۱۶]. ظفری و همکاران یک محیط کاملاً بی‌نهایت مواد FGM با رفتار ایزوتروپیک عرضی را موردبحث قراردادند؛ آن‌ها این محیط را تحت تأثیر نیروی نقطه‌ای و نیروهای یکنواخت مدفون‌شده‌ی استاتیکی، موردبررسی قراردادند [۱۷]. موج‌های ریلی، لاو و استونلی در یک محیط متخلخل اشباع با رفتار ایزوتروپیک عرضی توسط محمودیان و همکاران موردبررسی قرار گرفت. در این مقاله از سیستم مختصات کارتزین، استفاده‌شده و تمامی معادلات در این سیستم، به‌دست‌آمده‌اند. آن‌ها توانستند سرعت و ضریب میرایی هر سه نوع موج را به دست آورده و با هم دیگر مقایسه کنند [۱۸]. اسکندری و احمدی [۱۹]، توابع گرین استاتیکی یک محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپیک عرضی را که به کمک یک ورق نازک با ضخامت t مورد تقویت قرار می‌گرفت را به دست آوردند؛ روش کلی آن‌ها استفاده از اصل جمع آثار بود. اخیراً بررسی انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت متخلخل اشباع چندلایه، موردتوجه محققان مختلفی قرارگرفته است. در این زمینه ارتعاشات دیسک صلب در یک محیط نیمه بی‌نهایت متخلخل و اشباع چندلایه توسط تیموری و همکاران موردبررسی واقع‌شده است [۲۰]. تجزیه‌وتحلیل دینامیکی محیط‌های متخلخل غیراشباع چندلایه، تحت یک بارگذاری هارمونیکی عمودی توسط یی و ای موردمطالعه قرارگرفته شده است[۲۱].

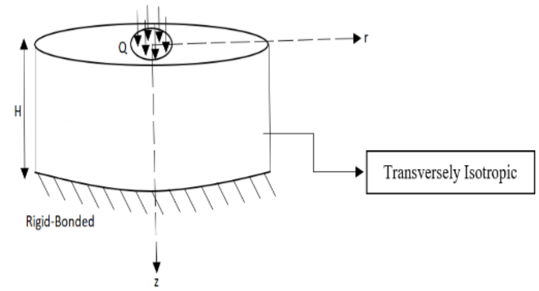
با بررسی منابع و مراجع مشاهده می‌شود که مطالعات فراوانی در زمینه انتشار امواج در محیط‌های بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت ایزوتروپیک و غیر ایزوتروپیک، صورت گرفته است، ولی برای محیط‌های غیر ایزوتروپیک با ضخامت محدود یا تک لایه غیر ایزوتروپیک که مواد بسیار مهمی در مکانیک جامدات محسوب می‌شوند و در بخش‌های مختلفی ازجمله پانل‌های ساندویچی کاربرد فراوانی دارند، تحقیقات خاصی انجام نگرفته است. به همین دلیل در این مقاله، انتشار موج ناشی از نیروهای هارمونیک با زمان برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی باضخامت محدود مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته است. در ابتدا معادلات حاکم الاستودینامیک برای چنین محیطی ارائه شده است و سپس با استفاده از توابع پتانسیل، معادلات دیفرانسیلی پیچیده به دو معادله تبدیل می‌گردند. حل این معادلات در فضای زمانی کار دشواری است، پس در گام بعدی با استفاده از سری فوریه در راستای مؤلفه مماسی و اعمال تبدیل انتگرال هنکل در راستای شعاعی، پاسخ‌های توابع پتانسیل یادشده در فضای تبدیل یافته به دست می‌آیند. سپس به کمک معکوس تبدیل انتگرال هنکل، توابع گرین حاصل از نشر موج در فضای فرکانسی به دست می‌آیند که به‌صورت گرافیکی نمایش و موردبررسی قرار می‌گیرند.

۲- بیان مسئله

ماده‌ای با رفتار ایزوتروپیک عرضی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) در نظر بگیرید که محور z عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپیک باشد. مطابق شکل **۱** نیروی هارمونیک روی سطح ماده موردنظر اعمال می‌گردند و سطح انتهایی این ماده کاملاً بسته‌شده است.

۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم برای انتشار موج داخل یک محیط ایزوتروپیک عرضی، برحسب مؤلفه‌های تغییرمکان به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۵]:



شکل (۱): ماده‌ای با رفتار ایزوتروپیک عرضی تحت نیروی هارمونیک دلخواه با سطح انتهایی بسته‌شده.

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+c_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\\
&c_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{c_{11}+c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)\\
&-2c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z}+\rho\omega^2 u_r=0\\
&c_{66}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)+c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\\
&c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{c_{11}+c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\\
&+2c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\,\partial z}+\rho\omega^2 u_\theta=0\\
&c_{44}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\\
&(c_{13}+c_{44})\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\,\partial z}\right)+\rho\omega^2 u_z=0
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در رابطه بالا u_z، u_θ و u_r مؤلفه‌های تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای شعاعی، مماسی و عمودی می‌باشند. ρ جرم مخصوص محیط و ω فرکانس زاویه‌ای می‌باشد و همچنین c_{kl} معرف ثابت‌های الاستیسیته می‌باشند. در نظر داریم، این روابط دارای محدودیت‌های خطی می‌باشند که فقط تغییر شکل‌های کوچک را شامل می‌شوند و هم‌چنین بسط معادلات حاصل از حالت ایزوتروپیک عرضی به اورتوتروپیک کار بسیار مشکلی است و توسط روش‌های عددی معمول قابل‌اعمال نمی‌باشند و در نظر داشته باشیم، اگر محیط ما به‌صورت محیط چندلایه در نظر گرفته شود، باید از ماتریس‌های انعکاس و شکست استفاده گردد.

معادلات حرکت ۱ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند که حل این معادلات به این سادگی انجام نمی‌گیرند. به‌منظور مجزا سازی این معادلات از یکدیگر از دو تابع پتانسیل مجهول φ و χ استفاده‌شده است. مؤلفه‌های تغییرمکان برحسب توابع پتانسیل φ و χ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت دینامیکی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$
\begin{aligned}
u_r &= -\alpha_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\\
u_\theta &= -\alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\,\partial z}+\frac{\partial\chi}{\partial r}\\
u_z &= \left((1+\alpha_1)\nabla^2_{r\theta}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho\omega^2}{c_{66}}\right)\varphi
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

$f(r,z)$

که در رابطه بالا ثوابت α_i به فرم زیر هستند:

$$
\nabla^2_{r\theta}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}
$$

$$
\alpha_1=\frac{c_{66}+c_{12}}{c_{66}},\quad \alpha_2=\frac{c_{44}}{c_{66}},\quad \alpha_3=\frac{c_{13}+c_{44}}{c_{66}}
$$

با قرار دادن روابط ۲ در معادلات ۱، دو معادله دیفرانسیل کاملاً مستقل از هم برحسب توابع پتانسیل φ و χ به‌صورت زیر به دست می‌آیند که ثوابت در آن به‌قرار رابطه ۴ هستند:

$$
\begin{aligned}
&\left(\nabla_1^2\nabla_2^2+\delta\omega^2\frac{d^2}{dz^2}\right)\varphi=0\\
&\nabla_0^2\chi=0
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

$$\nabla_i^2 = \nabla_{r\theta}^2 + \frac{\rho\omega^2}{\mu_i c_{66}} + \frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad i = 0,1,2$$

$$\delta = \rho \left[\frac{-1}{c_{44}s_2^2} - \frac{1}{c_{11}s_1^2} + \frac{1}{c_{11}}(1 + \frac{c_{33}}{c_{44}}) \right] \tag{۴}$$

$$\mu_0 = 1 \qquad \mu_1 = \alpha_2 \qquad \mu_2 = 1 + \alpha_1$$

در روابط فوق، $s_0^2 = 1/\alpha_2$ و s_1 و s_2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$c_{33}c_{44}s^4 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33})s^2 + ...$$
$$+c_{11}c_{44} = 0$$

حل معادلات ۳ کار بسیار سخت و مشکلی است، برای رفع این مشکل با استفاده از سری فوریه مختلط در راستای مؤلفه مماسی و اعمال تبدیل انتگرال هنکل در راستای مؤلفه شعاعی، پاسخ‌های توابع پتانسیل یادشده در فضای تبدیل یافته به دست می‌آیند.

سری فوریه مختلط توابع پتانسیل φ و χ نسبت به θ، به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۲]:

$$[\varphi(r,\theta,z), \chi(r,\theta,z)] = ... \tag{۵}$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [\varphi_m(r,z), \chi_m(r,z)] e^{im\theta}$$

تبدیل هنکل و معکوس هنکل مرتبه m ام نسبت به امتداد شعاعی برای $f(r,z)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید [۱۲]:

$$\tilde{f}^m(\xi,z) = \int_0^\infty f(r,z) r J_m(r\xi) dr \tag{۶}$$
$$f(r,z) = \int_0^\infty \tilde{f}^m(\xi,z)\xi J_m(r\xi) d\xi$$

با استفاده از روابط ۴ و ۵، معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع پتانسیل مجهول φ و χ به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\left(\tilde{\nabla}_1^2 \tilde{\nabla}_2^2 + \delta\omega^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{\varphi}_m^m = 0 \tag{۷}$$
$$\tilde{\nabla}_0^2 \tilde{\chi}_m^m = 0$$

که در رابطه بالا:

$$\tilde{\nabla}_i^2 = \frac{\rho\ \omega^2}{\mu_i c_{66}} - \xi^2 + \frac{1}{s_i^2}\frac{d^2}{dz^2} \qquad i = 0,1,2$$

در روابط ۶، بالانویس m بیانگر مرتبه تبدیل هنکل و زیرنویس m بیانگر مقادیر سری فوریه مختلط می‌باشند. جواب عمومی معادلات ۶ که از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی هستند، به شکل زیر می‌باشند:

$$\tilde{\varphi}_m^m(\xi,z) = C_1(\xi)e^{-\lambda_1 z} + D_1(\xi)e^{-\lambda_2 z} \tag{۸}$$
$$+ C_2(\xi)e^{\lambda_1 z} + D_2(\xi)e^{\lambda_2 z}$$
$$\tilde{\chi}_m^m(\xi,z) = E_1(\xi)e^{-\lambda_3 z} + E_2(\xi)e^{\lambda_3 z}$$

در روابط بالا، C_1، C_2، ... و E_2 توابعی مجهول هستند که با نوشتن شرایط مرزی که در قسمت بعدی آورده خواهد شد، به دست می‌آیند. مقادیر $\lambda_{1,2}$ و λ_3 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{a\xi^2 + b \pm \frac{1}{2}\sqrt{c\xi^4 + d\xi^2 + e}} \tag{۹}$$
$$\lambda_3 = s_0\sqrt{\xi^2 - \frac{\rho\ \omega^2}{c_{66}}}$$

که در رابطه بالا ثوابت عبارت‌اند از:

$$a = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2) \qquad b = -\frac{\rho\ \omega^2}{2}\left(\frac{1}{c_{33}} + \frac{1}{c_{44}}\right)$$

$$c = (s_2^2 - s_1^2)^2 \qquad e = \rho^2\omega^4\left(\frac{1}{c_{33}} - \frac{1}{c_{44}}\right)^2$$

$$d = -2\rho\omega\left[\left(\frac{1}{c_{33}} + \frac{1}{c_{44}}\right)(s_1^2 + s_2^2) - 2\frac{c_{11}}{c_{33}}\left(\frac{1}{c_{11}} + \frac{1}{c_{44}}\right)\right]$$

ریشه‌های روابط ۹ که بیانگر اعداد موج‌های حجمی می‌باشند عبارت‌اند از:

$$\xi_{\lambda_1} = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}}, \xi_{\lambda_2} = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}, ... \tag{۱۰}$$
$$\xi_{\lambda_3} = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho}{c_{66}}}$$

توابع $\lambda_{1,2}$ و λ_3، به توابع چند مقداره مشهور هستند. هر تابع چند مقداره درواقع مجموعه‌ای از توابع تک مقداره هستند. هر یک از اعضای این مجموعه یک بریدگی شاخه‌ای از تابع چند مقداره نامیده می‌شود. برای تبدیل این توابع به توابع تک مقداره باید مسیرهای انتگرالگیری به نحوی انتخاب گردند که بریدگی های شاخه‌ای فقط اعداد مختلط با قسمت‌های مثبت را در بر گیرند. به نقاط تکین توابع چند مقداره، نقاط شاخه‌ای نیز می‌گویند.

نقاط شاخه‌ای توابع $\lambda_{1,2}$ و λ_3، ξ_{λ_1}، ξ_{λ_2} و ξ_{λ_3} می‌باشد که ξ_{λ_1} و ξ_{λ_2}، نشان‌دهنده‌ی اعداد امواج قائم فشاری P و قائم برشی SV می‌باشند و ξ_{λ_3}، نشان‌دهنده‌ی عدد موج افقی برشی SH می‌باشد. در شکل **۲**، مطالب گفته‌شده، به‌وضوح دیده می‌شود. روابط تنش‌ها و جابجایی‌ها، برحسب دو تابع φ و χ و با اعمال سری فوریه مختلط در راستای مؤلفه مماسی و تبدیل انتگرال هنکل در راستای مؤلفه شعاعی، به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u_{z_m}^{m} = \left(\alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho\omega^2}{c_{66}^{s}} - \xi^2(1+\alpha_1)\right)\tilde{\varphi}_m{}^{m} \tag{۱۱}$$

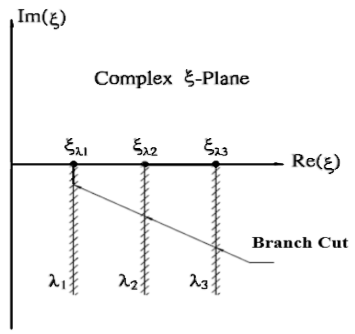
$$u_{r_m}^{m+1} + iu_{\theta_m}^{m+1} = \alpha_3\xi \frac{d}{dz}\tilde{\varphi}_m{}^{m} - i\xi\tilde{\chi}_m{}^{m}$$

$$u_{r_m}^{m-1} - iu_{\theta_m}^{m-1} = -\alpha_3\xi \frac{d}{dz}\tilde{\varphi}_m{}^{m} - i\xi\tilde{\chi}_m{}^{m}$$

$$\sigma_{zz_m}^{m} = \frac{d}{dz}\left(\alpha_3 c_{13}\xi^2 + c_{33}\left(\frac{\rho\omega^2}{c_{66}} - \xi^2(1+\alpha_1)\right) + c_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{\varphi}_m{}^{m}$$

$$\sigma_{zr_m}^{m+1} + i\sigma_{z\theta_m}^{m+1} = c_{44}\xi\left((\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1) - \frac{\rho\omega^2}{c_{66}}\right)\tilde{\varphi}_m{}^{m} - ic_{44}\xi\frac{d\tilde{\chi}_m{}^{m}}{dz}$$

$$\sigma_{zr_m}^{m-1} - i\sigma_{z\theta_m}^{m-1} = -c_{44}\xi\left((\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1) - \frac{\rho\omega^2}{c_{66}}\right)\tilde{\varphi}_m{}^{m} - ic_{44}\xi\frac{d\tilde{\chi}_m{}^{m}}{dz}$$



شکل (۲): بریدگی‌های شاخه‌ای برای ماده‌ای با رفتار ایزوتروپیک عرضی.

۴- بارگذاری

بارگذاری‌های هارمونیکی مختلفی برای انتشار امواج توسط محققین مختلف ارائه‌شده‌اند، ولی سه مدل از بارگذاری‌ها اهمیت بیشتری نسبت به بارگذاری‌های دیگر دارند و در این مقاله نیز از این سه بارگذاری استفاده‌شده است.

۴-۱- بارگذاری نقطه‌ای

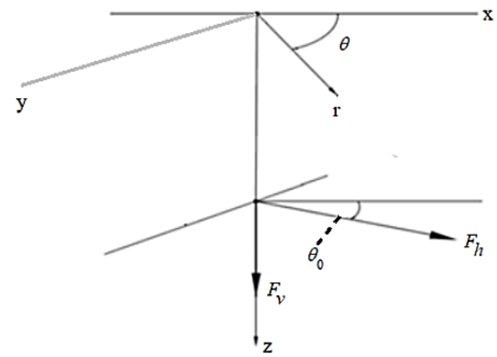
با توجه به اینکه، تمامی معادلات حاکم بر مسئله به دلیل دشواری حل در فضای زمان به فضای هنکل انتقال داده‌شده‌اند، بایستی مؤلفه‌های هر سه بارگذاری نیز در فضای تبدیل یافته به دست آیند (شکل **۳**). بارگذاری نقطه‌ای در فضای هنکل به‌قرار زیر است [۲۲]:

$$X_{+1}(\xi) = \frac{F_h}{2\pi}e^{-i\theta_0}, \quad X_m = 0 \quad \text{for} \quad m \neq +1$$

$$Y_{-1}(\xi) = \frac{F_h}{2\pi}e^{+i\theta_0}, \quad Y_m = 0 \quad \text{for} \quad m \neq -1$$

$$Z_0(\xi) = \frac{F_v}{2\pi}, \quad Z_m = 0 \quad \text{for} \quad m \neq 0$$

که F_h و F_v، مؤلفه‌های قائم و افقی می‌باشند و θ_0 در شکل زیر نشان داده‌شده است.



شکل (۳): مؤلفه‌های قائم و افقی برای بارگذاری نقطه‌ای.

۴-۲- بارگذاری حلقوی

مؤلفه‌های بارگذاری حلقوی در فضای هنکل به‌قرار زیر است [۲۲]:

$$X^{+1}(\xi)=aF_h J_0(a.\xi)e^{-i\theta_0},\ X_m=0 \text{ for } m\neq +1$$
$$Y^{-1}(\xi)=aF_h J_0(a.\xi)e^{+i\theta_0},\ Y_m=0 \text{ for } m\neq -1$$
$$Z^{0}(\xi)=aF_v J_0(a.\xi),\ Z_m=0 \text{ for } m\neq 0$$

۴-۳- بارگذاری یکنواخت صفحه‌ای

مؤلفه‌های بارگذاری یکنواخت صفحه‌ای در فضای هنکل به‌قرار زیر است [۲۲]:

$$X^{+1}(\xi)=aF_h\frac{J_1(a.\xi)}{\xi}e^{-i\theta_0},\ X_m=0 \text{ for } m\neq +1$$
$$Y^{-1}(\xi)=aF_h\frac{J_1(a.\xi)}{\xi}e^{+i\theta_0},\ Y_m=0 \text{ for } m\neq -1$$
$$Z^{0}(\xi)=aF_v\frac{J_1(a.\xi)}{\xi},\ Z_m=0 \text{ for } m\neq 0$$

۵- شرایط مرزی حاکم بر تک لایه

طبق شکل ۱، شرایط مرزی حاکم بر مسئله به‌صورت زیر است:

$$u_z(r,z=H)=0$$
$$u_r(r,z=H)=0$$
$$u_\theta(r,z=H)=0$$
$$\sigma_{zz}(r,z=0)=\begin{cases} f_v(r,\theta,z) & (r,\theta)\in Q\\ 0 & (r,\theta))\notin Q\end{cases} \quad (۱۲)$$
$$\sigma_{zr}(r,z=0)=0$$
$$\sigma_{z\theta}(r,z=0)=0$$

همان‌طور که گفته شد، تمامی معادلات حاکم بر مسئله به دلیل دشواری حل در فضای زمان به فضای هنکل انتقال داده‌شده‌اند و به همین دلیل بایستی شرایط مرزی حاکم نیز در فضای تبدیل به دست آیند. لذا از روابط ۱۱ استفاده می‌شود. بارگذاری اعمال‌شده در این مقاله به‌صورت قائم و متقارن نسبت به راستای θ در نظر گرفته‌شده است. پس نتیجه می‌شود تمامی تنش‌ها و تغییرمکان‌های ایجادشده در راستای θ برابر صفر می‌باشد. از طرفی از رابطه‌ی ۲ نتیجه می‌شود که تابع پتانسیل χ با توجه به بارگذاری اعمال‌شده برابر صفر خواهد بود، پس طبق رابطه‌ی ۷، عبارات $E_1(\xi)$ و $E_2(\xi)$ حذف خواهند شد.

با تشکیل دستگاه معادلات جبری به فرم $M*X=N$، ضرایب مجهول توابع پتانسیل به‌سادگی مشخص می‌گردند. در این دستگاه معادلات بردارها به فرم زیر هستند:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} C_1(\xi) & D_1(\xi) & C_2(\xi) & D_2(\xi)\end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix} Z^0(\xi) & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \quad (۱۳)$$

همچنین ماتریس ضرایب معلوم M به شکل زیر است:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} [\sigma_{zz}n_i(\xi,0)]_{1\times2} & [\sigma_{zz}p_i(\xi,0)]_{1\times2}\\ [\sigma_{zr}n_i(\xi,0)]_{1\times2} & [\sigma_{zr}p_i(\xi,0)]_{1\times2}\\ [u_z n_i(\xi),H]_{1\times2} & [u_z p_i(\xi,H)]_{1\times2}\\ [u_r n_i(\xi,H)]_{1\times2} & [u_r p_i(\xi,H)]_{1\times2}\end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

که در رابطه بالا:

$$\sigma_{zz}n_i(\xi,z)=\frac{d}{dz}(\alpha_3 c_{13}\xi^2+c_{33}\left(\frac{\rho\omega^2}{c_{66}}\right.$$
$$\left.-\xi^2(1+\alpha_1))+c_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right)e^{-\lambda_i z}$$

$$\sigma_{zr} n_i(\xi, z) = 2c_{44}\xi\left((\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1) - \frac{\rho\omega^2}{c_{66}}\right)e^{-\lambda_i z}$$

$$u_z n_i(\xi, z) = \left(\alpha 2\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho\omega^2}{c66} - \xi^2(1+\alpha_1)\right)e^{-\lambda_i z}$$

$$u_r n_i = 2\alpha_3\xi\frac{d}{dz}e^{-\lambda_i z}$$

$$\sigma_{zz} p_i(\xi, z) = \frac{d}{dz}\left(\alpha_3 c_{13}\xi^2 + c_{33}\left(\frac{\rho\omega^2}{c_{66}} - \xi^2(1+\alpha_1)\right) + c_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right)e^{\lambda_i z}$$

$$\sigma_{zr} p_i(\xi, z) = 2c_{44}\xi\left((\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1) - \frac{\rho\omega^2}{c_{66}}\right)e^{\lambda_i z}$$

$$u_z p_i(\xi, z) = \left[\alpha_2\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho\omega^2}{c_{66}} - \xi^2(1+\alpha_1)\right]e^{\lambda_i z}$$

$$u_r p_i = 2\alpha_3\xi\frac{d}{dz}e^{\lambda_i z} \quad , \quad (i=1,2)$$

با تعیین ضرایب مجهول، توابع پتانسیل بردار تغییرمکان و تانسورهای تنش برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی موردنظر در فضای تبدیل یافته هنکل به‌سادگی مشخص می‌شوند و با استفاده از عکس تبدیل هنکل، جواب‌ها در فضای فرکانسی حاصل می‌شوند. توجه شود که انتگرال‌هایی که از معکوس هنکل به دست می‌آیند، به‌صورت تحلیلی قابل‌حل نیستند و بایستی از روش‌های عددی محاسبه شوند.

۶- اعتبارسنجی و نتایج

۶-۱- اعتبارسنجی

به‌منظور اعتبارسنجی یک حالت خاص در نظر گرفته‌شده است. یک محیط نیمه بی‌نهایت دولایه با رفتار ایزوتروپیک عرضی و تحت نیروهای هارمونیکی که توسط خجسته و همکاران [۱۵] موردمطالعه قرارگرفته است. مشخصات دولایه مدنظر مطابق جدول **۱** می‌باشد.

جدول (۱): مشخصات مواد در صحه‌گذاری [۱۵]

لایه	لایه اول	لایه دوم
c_{11} (GPa)	۵۵۳	۴۷/۹
c_{12} (GPa)	۲۸۰	۱۵/۹
c_{13} (GPa)	۲۵۰	۱۱/۲
c_{33} (GPa)	۲۵۰	۲۳/۹
c_{44} (GPa)	۵۰	۹
$\rho\ (\frac{kg}{m^3})$	۵۰۰۰	۹۰
$\frac{H}{a}$	۱	–

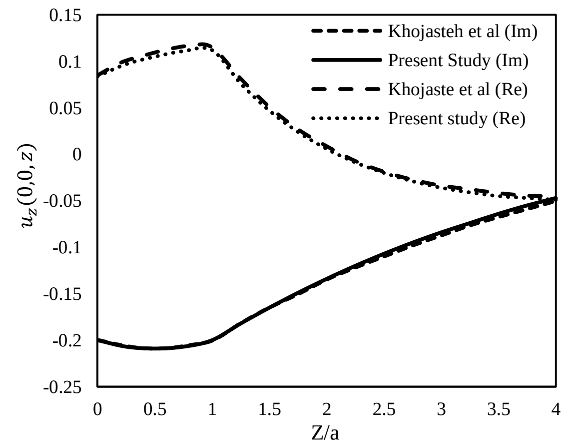
شکل **۴**، تغییرمکان قائم بی‌بعد در راستای محور z را نشان می‌دهد. با مشاهده شکل ملاحظه می‌گردد که روش به کار گرفته‌شده برای تک‌لایه ایزوتروپیک عرضی دارای صحت و دقت کافی برای تحلیل می‌باشد. با توجه به اینکه معادلات در فضای تحلیلی انجام‌شده‌اند، بنابراین باید انطباق کامل برای صحت سنجی حاصل گردد.

۶-۲- نتایج عددی

به‌منظور تحلیل دینامیکی و ارائه پاسخ‌های ماده موردنظر به‌صورت گرافیکی، سه پارامتر فرکانس، مشخصات مواد مورداستفاده و نوع بار تحریک، به‌عنوان متغیر در نظر گرفته‌شده‌اند. مواد استفاده‌شده در این مقاله از مواد مرکب Glass/Epoxy، Kevlar/Epoxy و Carbon/Epoxy می‌باشد که در جدول **۲** مشخصات مربوط به این مواد ذکرشده است و جدول **۳**، مشخصات بی‌بعد مواد مرکب استفاده‌شده برای تک لایه ایزوتزوپیک عرضی را نشان می‌دهد.

پارامترهای موردبررسی با استفاده از روابط زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$\tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{66}} \quad (i=1,3,4 \quad j=1,2,3,4), \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho}, \qquad \text{(۱۵)}$$
$$\tilde{\omega} = a\omega\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{a} \quad (a=1)$$



شکل (۴): مقایسه تغییرمکان حاصل از مطالعه حاضر و مقاله خجسته و همکاران [۱۵].

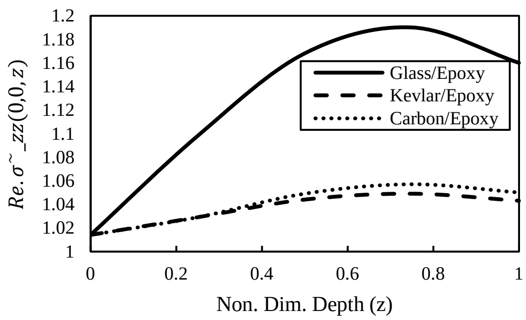
جدول (۲): مشخصات مواد مرکب استفاده‌شده برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی (واحدها مطابق جدول ۱) [۲۳]

ماده	Glass/Epoxy	Kevlar/Epoxy	Carbon/Epoxy
c_{11}	۱۴/۷۶۵	۶/۶۷۲	۱۴/۷۹۴
c_{12}	۷/۸۳۲	۲/۷۴۴	۸/۱۰۶
c_{13}	۶/۳۲۷	۳/۲۰۱	۶/۱۸۳
c_{33}	۴۴/۵۴۳	۸۲/۱۷۷	۱۵۰/۳۳۹
c_{44}	۴/۳	۲/۲	۷
ρ	۱۹۷۰	۱۳۸۰	۱۶۰۰
H	۱	۱	۱

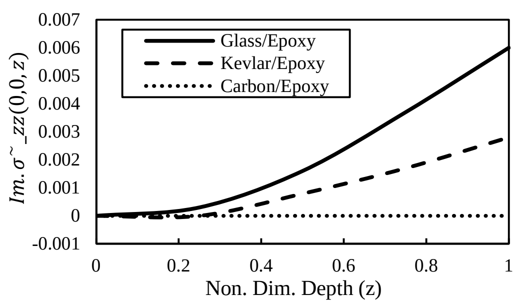
جدول (۳): مشخصات بی‌بعد مواد مرکب استفاده‌شده برای تک لایه ایزوتزوپیک عرضی

ماده	Glass/Epoxy	Kevlar/Epoxy	Carbon/Epoxy
$\tilde{c}_{11}$	۴/۲۲	۳/۳۹۷	۴/۴۲۴
$\tilde{c}_{12}$	۲/۲۴	۱/۳۹۷	۲/۴۲۴
$\tilde{c}_{13}$	۱/۸	۱/۶۲۹	۱/۸۴۸
$\tilde{c}_{33}$	۱۲/۷۳	۴۱/۸۴۱	۴۴/۹۵۷
$\tilde{c}_{44}$	۱/۲۳	۱/۱۲	۲/۰۹۳
$\tilde{\rho}$	۱	۱	۱

شکل‌های **۵** و **۶**، تنش عمودی و جابجایی در راستای عمودی را برای سه ماده‌ی ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy، Kevlar/Epoxy و Carbon/Epoxy، تحت فرکانس تحریک یکسان و بارگذاری یکسان نمایش می‌دهند.

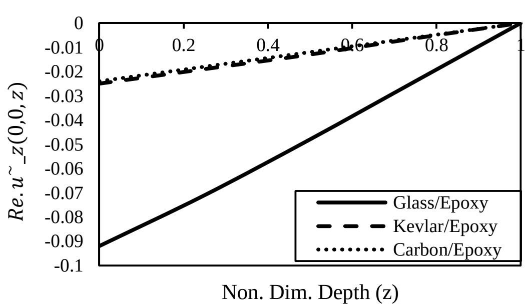


(الف)

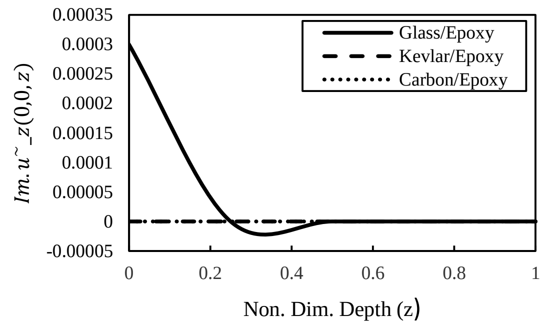


(ب)

شکل (۵): (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی تنش نرمالیزه‌شده‌ی σ_{zz} برای ضخامت بی‌بعد h=1، تحت بارگذاری Patch load بر روی ماده ایزوتروپیک عرضی و فرکانس تحریک بی‌بعد ω=2، برای مصالح مختلف.



(الف)



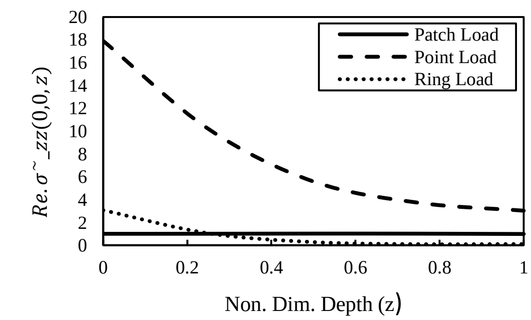
(ب)

شکل (۶): (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی جابجایی نرمالیزه‌شده‌ی u_z برای ضخامت بی‌بعد h=1، تحت بارگذاری Patch load بر روی ماده ایزوتروپیک عرضی و فرکانس تحریک بی‌بعد ω=2 ، برای مصالح مختلف.

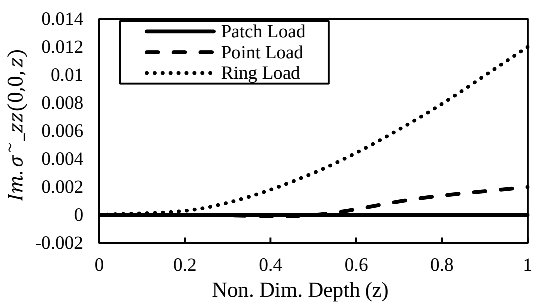
شکل **۵ الف** قسمت حقیقی و شکل **۵ ب** قسمت موهومی تنش عمودی برحسب ضخامت ماده‌ی موردنظر را نشان می‌دهد. با توجه به شکل **۵ الف**، مشاهده می‌شود که ماکزیمم مقدار تنش عمودی برای ماده‌ی Glass/Epoxy می‌باشد و دو ماده‌ی دیگر تقریباً رفتار نزدیک به هم را دارند؛ هر سه ماده تا نزدیکی ضخامت بی‌بعد ۰/۷۲ روند صعودی و از ۰/۷۲ به بعد روند نزولی دارند، با توجه به اعمال بار از سمت بالا و از طرف پایین نیز به علت محدود بودن جابجایی و اعمال نیروی تکیه‌گاهی عمودی، لذا تنش‌های محوری در نزدیکی میانه لایه نسبت به ابتدا و انتها اندازه بزرگ‌تری خواهند داشت؛ درحالی‌که در قسمت موهومی (شکل **۵ ب**) که نشان‌دهنده‌ی زاویه نشر موج می‌باشد، مقادیر برای هر سه ماده بسیار ناچیز هستند که می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. البته مقدار ماکزیمم مجدداً متعلق به ماده Glass/Epoxy می‌باشد.

شکل **۶**، نشان می‌دهد که دو ماده‌ی Carbon/Epoxy و Kevlar/Epoxy رفتار نزدیک به هم را دارا هستند و دلیل آن این است که ضرایب بی‌بعد الاستیسیته این دو ماده خیلی به همدیگر نزدیک هستند و انتظار می‌رود نمودارهای آن‌ها نیز تقریباً به همدیگر نزدیک باشند و بیشترین جابجایی در راستای عمودی برای ماده Glass/Epoxy می‌باشد؛ درحالی‌که در قسمت موهومی، مقادیر کلی جابجایی در راستای عمود برای هر سه ماده بسیار ناچیز هستند که می‌توان از آن صرف‌نظر نمود ولی در حالت کلی ماکزیمم مقدار جابجایی عمودی برای ماده Glass/Epoxy می‌باشد.

شکل‌های **۷** و **۸**، تأثیر بارگذاری‌های مختلف بر روی یک ماده ایزوتروپیک عرضی مشخص، تحت فرکانس تحریک یکسان را نشان می‌دهند.



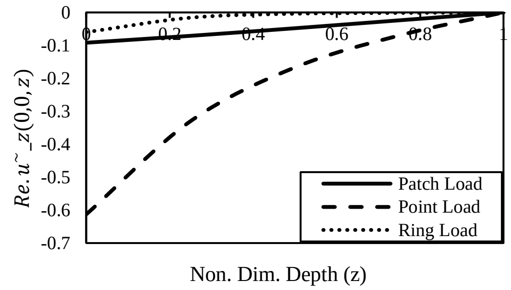
(الف)



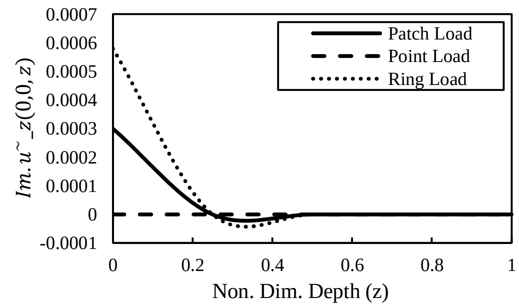
(ب)

شکل (۷): (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی تنش نرمالیزه‌شده‌ی σ_{zz} برای ضخامت بی‌بعد h=1، ماده ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy و تحت فرکانس بی‌بعد ω=2، برای بارگذاری‌های مختلف.

در شکل **۷ الف** مشاهده می‌شود که ماکزیمم تنش عمودی ایجادشده برای قسمت حقیقی، مربوط به بارگذاری نقطه‌ای (Point load) می‌باشد که کاملاً یک روند کاهشی را در طول ضخامت موردنظر دارد، درحالی‌که در قسمت موهومی، ماکزیمم تنش ایجادشده برای بارگذاری حلقوی (Ring load) می‌باشد که با توجه به نمودار، یک روند افزایشی برای این بارگذاری مشاهده می‌شود؛ درواقع بارگذاری حلقوی باعث ایجاد بیشترین زاویه فرکانس نشر موج برای تنش عمودی می‌گردد.



(الف)

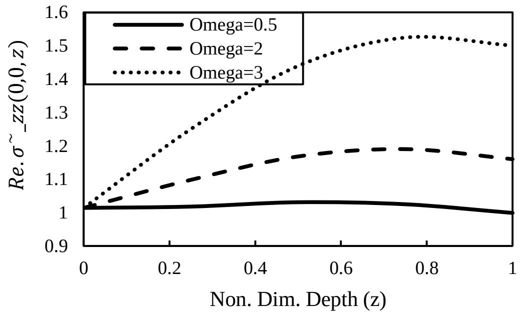


(ب)

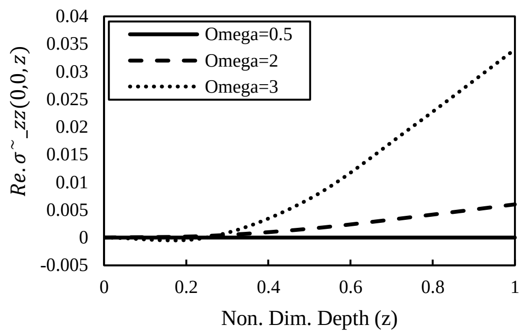
شکل (۸): (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی جابجایی نرمالیزه‌شده‌ی u_Z برای ضخامت بی‌بعد h=1، ماده ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy و تحت فرکانس بی‌بعد ω=2، برای بارگذاری‌های مختلف.

در شکل **۸ الف** مشاهده می‌شود که بیشترین جابجایی در راستای عمودی در بخش حقیقی، برای بارگذاری نقطه‌ای می‌باشد که یک روند کاهشی در راستای ضخامت را دارا است؛ درحالی‌که برای قسمت موهومی، مشاهده می‌شود که مقادیر جابجایی در راستای عمود، برای هر سه بارگذاری تقریباً نزدیک صفر است. ولی در حالت کلی برای بارگذاری حلقوی بیشتر است.

شکل‌های **۹** و **۱۰**، تأثیر فرکانس‌های تحریک مختلف برای بارگذاری یکسان روی سطح ماده ایزوتروپیک عرضی مشخص را نشان می‌دهد. شکل‌های **۹ الف** و **ب**، نشان می‌دهد که با افزایش فرکانس تحریک، مقدار تنش عمودی در بخش حقیقی و موهومی، افزایش پیدا می‌کند. شکل‌های **۱۰ الف** و **ب**، نشان می‌دهد که با افزایش فرکانس تحریک مقادیر جابجایی در راستای عمودی در بخش حقیقی و موهومی، افزایش و در هر دو مقادیر جابجایی روند نزولی پیدا می‌کنند.



(الف)

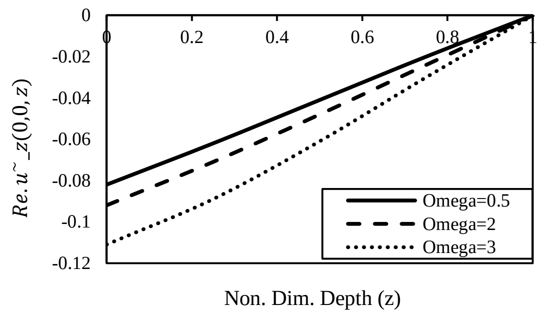


(ب)

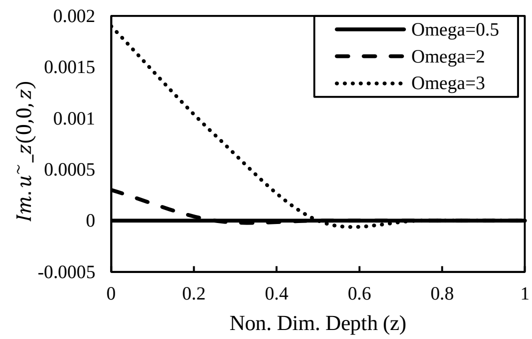
شکل (۹): (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی تنش نرمالیزه‌شده‌ی σ_{ZZ} برای ضخامت بی‌بعد h=1، ماده ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy و تحت بارگذاری Patch load بر روی ماده موردنظر، برای فرکانس‌های تحریک مختلف.

۷- نتیجه‌گیری

در این مطالعه روش تحلیلی برای به دست آوردن توابع گرین انتشار امواج برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی، تحت بارگذاری هارمونیکی در راستای عمود و متقارن نسبت به محور عمودی بیان‌شده است.



(الف)



(ب)

شکل (۱۰): (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی جابجایی نرمالیزه‌شده‌ی u_z برای ضخامت بی‌بعد h=1، ماده ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy و تحت بارگذاری Patch load بر روی ماده موردنظر، برای فرکانس‌های تحریک مختلف.

ازجمله تفاوت‌های یک محیط نیمه‌بی‌نهایت با محیط تک لایه در اصل تشعشع می‌باشد؛ وجود تشعشع در محیط‌های نیمه‌بی‌نهایت باعث می‌شود جملات $e^{\lambda_i z}$ در توابع پتانسیل حذف شوند. توابع گرین به‌دست‌آمده، کاربردهای مستقیم و غیرمستقیمی در زمینه‌های مختلف مهندسی مکانیک جامدات ازجمله صنایع نظامی دارد. نتایج مهم حاصل از توابع گرین برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی به ترتیب در زیر آمده است.

- ماده ایزوتروپیک عرضی Glass/Epoxy، تحت بارگذاری و فرکانس تحریک یکسان، تنش عمودی، تنش برشی، تغییرمکان در راستای عمودی و تغییرمکان در راستای شعاعی بیشتری نسبت به دو ماده‌ی Carbon/Epoxy و Kevlar/Epoxy دارد.
- در مقایسه بارگذاری‌های هارمونیکی مختلف با فرکانس تحریک یکسان مشاهده شد که در بخش حقیقی بارگذاری نقطه‌ای و در بخش موهومی بارگذاری حلقوی، تنش و جابجایی بیشتری را ایجاد می‌کنند. درواقع بارگذاری حلقوی باعث ایجاد بیشینه زاویه فرکانس حاصل از نشر موج در توابع گرین تنش و تغییرمکان می‌گردد.
- در مقایسه فرکانس‌های تحریک متفاوت تحت بارگذاری و ماده ایزوتروپیک عرضی، مشاهده گردید که تنش عمودی و جابجایی عمودی با افزایش فرکانس تحریک، افزایش پیدا می‌کنند.

۸- مراجع

[1] Lamb H. I. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical or physical character. 1904;203(359–371):1–42.

[2] Achenbach J, A Jd. Wave Propagation In Elastic Solids. 1973.

[3] Rice JM, Sadd MH. Propagation and scattering of SH-waves in semi-infinite domains using a time-dependent boundary element method. Journal of Applied Mechanics. 1984:51(3): 641–645.

[4] Harding JW, Sneddon IN. The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1945;41(1):16–26.

[5] Pak RYS, Jennings PC. Elastodynamic Response of Pile Under Transverse Excitations. Journal of Engineering Mechanics. 1987;113(7):1101–1116.

[6] Pan YC, Chou TW. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. Journal of Applied Mechanics. 1976;43(4):608–612.

[7] Buchwald V. Rayleigh waves in transversely isotropic media. The Quartely Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1961;14(3):293-318.

[8] Payton R. Elastic wave propagation in transversely isotropic media. Springer Science and Business Media. 2012;4.

[9] Chen W, Wang D, Mou Y, Zhao, Chen G. Effect of flow-independent viscosity on the propagation of

underlying a liquid layer. Applied Mathematical Modelling. 2021;95:575-592.

[21] Ye Z, Ai ZY. Dynamic analysis of multilayered unsaturated poroelastic media subjected to a vertical time-harmonic load. Applied Mathematical Modelling.2021;90:394-412.

[22] Pooladi A, Rahimian M, and Pak RYS. Poroelastodynamic potential method for transversely isotropic fluid-saturated poroelastic media. Applied Mathematical Modelling. 2017;50:177-199.

[23] Jones RM. Mechanics of composite materials. CRC press. 2018.

Rayleigh wave in porous media. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2021;142:106564.

[10] Liang J, Wu M, Ba Z. Three-dimensional dynamic Green's functions for transversely isotropic saturated half-space subjected to buried loads. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2019;108:301-320.

[11] Eskandari-Ghadi M. A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media. Journal of Elasticity. 2005;81(1):1-19.

[12] Rahimian M, Eskandari-Ghadi M, Pak RYS, Khojasteh A. Elastodynamic potential method for transversely isotropic solid. Journal of Engineering Mechanics. 2007;133(10):1134-1145.

[13] Khojasteh A, Rahimian M, Eskandari-Ghadi M, Pak RYS. Asymmetric wave propagation in a transversely isotropic half-space in displacement potentials. International Journal of Engineering Science. 2008;46(7):690-710..

[14] Khojasteh A, Rahimian M, and Pak RYS. Three-dimensional dynamic Green’s functions in transversely isotropic bi-materials. International Journal of Solids and Structure. 2008;45(18–19):4952-4972.

[15] Khojasteh A, Rahimian M, Pak RYS, Eskandari-Ghadi M. Asymmetric dynamic Green’s functions in a two-layered transversely isotropic half-space. Journal of Engineering Mechanics. 2008;134(9):777-787.

[16] Akbari F, Khojasteh A, Rahimian M. Asymmetric Green’s functions for exponentially graded transversely isotropic substrate–coating system. Journal of Centeral South University. 2018;25(1):169-184.

[17] Zafari Y, Shahmohamadi M, Khojasteh A, Rahimian M. Asymmetric Green's functions for a functionally graded transversely isotropic tri-material. Applied Mathematical Modelling. 2019;72:176-201.

[18] Mahmoodian M, Eskandari-Ghadi M, Nikkhoo A. Rayleigh, Love and Stoneley waves in a transversely isotropic saturated poroelastic media by means of potential method. Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2020;134:106139.

[19] Eskandari M, and Ahmadi SF. Green’s functions of a surface-stiffened transversely isotropic half-space. International Journal of Solids and Structure. 2012;49(23-24):3282-3290.

[20] Teymouri H, Khojasteh A, Rahimian M, Pak RYS. Rigid disc vibration in a multi-layered transversely isotropic poroelastic half-space

Journal of Aerospace Mechanics/ 2022/ Vol.18/ No. 3/ 13-26

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.3.2.4

Evaluation of Wave Propagation in a Transversely Isotropic Monolayer with Finite Thickness by the Potential Functions Method

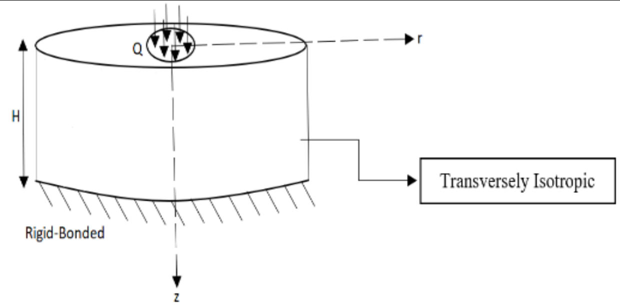
Hadi Teymouri[1], Hasan Biglari[2*]

[1] MSc, Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
[2]Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

HIGHLIGHTS

- The transversely isotropic material Glass/Epoxy has the maximum green's functions of stress and displacement.
- The maximum frequency angle of the wave motion for green's functions of stress and displacement.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 29 March 2022
Received in revised form: 13 May 2022
Accepted: 21 May 2022
Available online: 28 June 2022
*Correspondence:
hbiglari@tabrizu.ac.ir
How to cite this article:
H. Teymouri, H, Biglari. Evaluation of wave propagation in a transversely isotropic monolayer with finite thickness by the potential functions method. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18 (3): 13-26.

Keywords:
Wave propagation
Potential functions
Hankel transform
Transversely isotropic
Monolayer

ABSTRACT

In this study, wave propagation in a transversely isotropic monolayer is discussed. The purpose of this paper is to find green's functions of wave motion to find the stresses and displacements resulting from the wave propagation of harmonic forces applied on the monolayer surface. Wave propagation equations in a transversely isotropic monolayer are quite complicated equations with partial derivatives, in which potential functions are utilized to divide the governing equations into two individual equations. Then, the resulting governing equations are transformed into simpler equations considering the boundary conditions by using Hankel and Fourier series transform in the direction of radial and tangential components, respectively. A comparison-oriented approach is presented to ensure the accuracy of the obtained numerical results. Numerical wave propagation results for transversely isotropic monolayer are investigated under different frequencies, loads, and materials. One of the important results from this study is that the transversely isotropic material Glass/Epoxy has the maximum green's functions of stress and displacement and also the ring load causes the maximum frequency angle of the wave motion for green's functions of stress and displacement.