مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۸/ شماره ۱/ صفحه ۱۸۳-۱۹۹

نشریه علمی مکانیک هوافضا

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.1.12.0

تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای متخلخل تابعی مدرج روی بستر الاستیک در محیط حرارتی با روش مربعات دیفرانسیلی

مهدی خاک‌پور[1]، یوسف بازرگان لاری[2]*، پرهام زاهدی نژاد [3]، محمدجواد کاظم‌زاده پارسی[4]

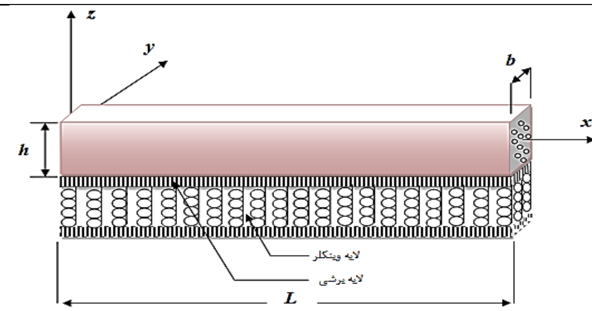
[1] دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز، ایران

[2] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز، ایران

[3] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه تگزاس شمالی، تگزاس، ایالات متحده آمریکا

[4] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- افزایش دما باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. این موضوع ناشی از کاهش صلبیت ماده است.

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد تیرهای متخلخل تابعی مدرج با شرایط مرزی ساده، روی بستر الاستیک در محیط حرارتی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی، مورد مطالعه قرار گرفت. خواص مواد به دما وابسته بوده و به‌طور پیوسته در جهت ضخامت تیر و بر اساس مدل توانی توزیع کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده تغییر می‌کند. توزیع تخلخل یکنواخت در سطح مقطع موردبررسی قرار می‌گیرد. اصل همیلتون برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت به کار گرفته شد. به‌منظور گسسته‌سازی این معادلات، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته استفاده شده است. در اینجا اثر پارامترهای مختلف از قبیل نوع میدان حرارتی، مقدار اختلاف دما، شاخص قانون توانی، کسر حجمی تخلخل، نسبت لاغری و پارامترهای بستر الاستیک روی فرکانس‌های طبیعی تیر متخلخل تابعی مدرج و برای شرایط تکیه‌گاهی ساده، موردمطالعه قرار گرفت. نتایج علاوه بر نشان دادن این تأثیرات بر رفتار ترمومکانیکی تیر، صحت روش عددی مورداستفاده را نیز تأیید می‌نماید.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:
نوع مقاله: علمی پژوهشی
دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۱۲
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۱۵
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۶
ارائه برخط: ۱۴۰۰/۱۰/۲۰.

*نویسنده مسئول:
bazarganlari@iaushiraz.ac.ir

کلیدواژه‌ها:
ارتعاشات آزاد
تیرهای متخلخل تابعی مدرج
محیط حرارتی
بستر الاستیک
روش مربعات دیفرانسیلی

۱- مقدمه

کامپوزیت‌های لایه‌ای به علت مناسب بودن از لحاظ مکانیکی و حرارتی به‌صورت گسترده در کاربردهای مهندسی مختلف به‌ویژه بارگذاری‌های ترمومکانیکی استفاده می‌شوند. به دلیل ناپیوستگی ماده و تغییرات زیاد در محل تقابل لایه‌ها، در این ناحیه تمرکز تنش ایجاد می‌گردد که در نهایت منجر به جدا شدن لایه‌ها از یکدیگر خواهد شد. به‌علاوه تغییرات زیاد پلاستیک در لایه مرزی، باعث ایجاد و رشد ترک در سازه می‌گردند [۱]. در اینجا مواد تابعی مدرج جایگزین مناسبی برای این مواد هستند. یک ماده تابعی مدرج از یک سرامیک و یک فلز با هدف حفاظت در مقابل تغییرات دمایی بالا ساخته شده است. ماده سرامیک یک مقاومت دمایی بالا به‌واسطه رسانایی حرارتی پایین فراهم می‌کند. همچنین از اکسیداسیون فلز جلوگیری می‌نماید. جزء فلزی از وقوع شکست به‌واسطه چقرمگی زیاد جلوگیری می‌کند. پیشرفت و گسترش مواد تابعی مدرج در سال‌های اخیر توجه مهندسان و محققان را به خود جلب کرده است. این مواد به دلیل کاربردهای چندگانه، در صنعت هوانوردی، مهندسی هوافضا و سپرهای حرارتی مورداستفاده قرار می‌گیرد؛ بنابراین لازم است تحلیل دقیقی از رفتار دینامیکی مواد تابعی مدرج داشته باشیم. این نیاز منجر به انجام تحقیقاتی برای سازه‌ها و تیرهای تابعی مدرج و بررسی ارتعاشات آزاد آن‌ها با استفاده از تئوری‌های مختلف تیر شد [۲-۱۱]. یک لیست از کاربردهای مختلف این مواد در مرجع [۲] آورده شده است.

چندین مطالعه با استفاده از تئوری تیر کلاسیک که به‌عنوان تئوری تیر اویلر-برنولی شناخته می‌شود برای تیرهای تابعی مدرج باریک صورت گرفت [۱۲-۱۶]. برای تیرهای مدرج نسبتاً ضخیم این تئوری، تغییر شکل را کمتر از مقدار واقعی گرفته و فرکانس‌های طبیعی را بزرگ‌تر از مقدار واقعی ارزیابی می‌کند که این می‌تواند ناشی از حذف اثرات تغییر شکل برشی عرضی باشد. تئوری تیر تغییر شکل برشی مرتبه اول که به‌عنوان تئوری تیر تیموشنکو شناخته می‌شود بر این محدودیت تئوری کلاسیک با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی عرضی غلبه می‌کند [۱۶-۱۹]. ازآنجایی‌که تئوری تیر مرتبه اول شرایط تنش برشی صفر را روی بالا و پایین سطح تیر نقض می‌کند یک ضریب اصلاح برشی برای به دست آوردن اختلاف میان حالت‌های تنش فرض شده و واقعی نیاز است. به‌منظور عدم استفاده از ضریب اصلاح برشی برای پیش‌بینی بهتر پاسخ تیرهای تابعی مدرج، تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا پیشنهاد شده است. با توجه به آنچه ذکر شد تحقیقات به سمت تحلیل ارتعاشات تیرهای تابعی مدرج با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا سوق داده شد. یک روش اجزای محدود مرتبه بالا به‌وسیله ون و زنگ برای تحلیل ارتعاشی تیرها ارائه گردید [۲۰]. سیمسک فرکانس‌های اصلی تیرهای تابعی مدرج با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای مختلف بررسی نمود [۲۱].

در مسائل و کاربردهای مهندسی، تیرها معمولاً در امتداد طولشان بر روی بستری قرار گرفته و با آن بستر برهم‌کنش دارند. چندین مطالعه بر روی اثرات بستر الاستیک بر ارتعاشات آزاد تیرها در دسترس است. یک پاسخ کلی برای ارتعاشات آزاد تیرهای ایزوتروپیک روی بسترهای الاستیک متغیر به‌وسیله زهو ارائه شد [۲۲]. حل دقیق ارتعاشات آزاد تیرهای ایزوتروپیک روی بستر الاستیک یک و دو پارامتری به‌وسیله ایزنبرگر بررسی گردید [۲۳]. متسونگا فرکانس‌های طبیعی و تنش‌های کمانش ستون-تیرهای عمیق ایزوتروپیک قرار گرفته بر روی بستر الاستیک دو پارامتری را با روش بسط سری‌های توانی و بر پایه تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا موردبررسی قرار داد [۲۴]. روش المان مربعات دیفرانسیلی به‌وسیله چن برای تحلیل ارتعاشات تیرهای اویلر-برنولی غیرمنشوری واقع شده بر روی بستر الاستیک وینکلر مورداستفاده قرار گرفت [۲۵]. ملک‌زاده و کرمی ترکیبی از روش‌های اجزای محدود و مربعات دیفرانسیلی را برای مطالعه ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای ضخیم ایزوتروپیک قرار گرفته روی یک بستر الاستیک دو پارامتری مورداستفاده قرار دادند [۲۶]. بر اساس تئوری الاستیسیته دوبعدی جواب‌های دقیق برای ارتعاشات آزاد و خمشی تیرهای تابعی مدرج با تکیه‌گاه ساده و قرار گرفته بر روی بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک به‌وسیله وینگ و همکارانش ارائه گردید [۲۷]. خمش و

ارتعاشات آزاد تیرهای تابعی مدرج با تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی مرتبه بالا، به‌وسیله تای و وو موردمطالعه قرار گرفت [۲۸]. آقازاده و همکارانش رفتار ارتعاشات آزاد و استاتیک تیرهای تابعی مدرج با مقیاس کوچک را با تئوری‌های مختلف تیر و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی بررسی نمودند [۲۹]. اکباس ارتعاشات آزاد و خمشی استاتیک تیرهای تابعی مدرج قرار گرفته بر روی بستر وینکلر با تئوری‌های تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو را موردبررسی قرار داد. در این تحقیق خواص مواد در راستای ضخامت و با توزیع توانی متغیر بود [۳۰].

همان‌طور که می‌بینیم مطالعات کمی بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای تابعی مدرج در محیط‌های حرارتی وجود دارد. برای نمایش مزیت‌های مواد تابعی مدرج چندین تحقیق با رویکرد رفتار حرارتی انجام پذیرفته است. ارتعاشات ترمومکانیکی تیرهای ساندویچی تابعی مدرج با بستر الاستیک متغیر به‌وسیله پردهان و مارمو موردمطالعه قرار گرفت. در این مطالعه از تئوری تیر اویلر-برنولی و روش مربعات دیفرانسیلی جهت حل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر حرکت استفاده گردید [۳۱]. ماهی و همکارانش ارتعاشات آزاد تیر تابعی مدرج واقع شده در محیط حرارتی و با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا موردبررسی قرار دادند. ایشان از روش تحلیلی برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی مختلف استفاده کردند [۳۲]. ارتعاشات دامنه بالا و خمش غیرخطی تیرهای تابعی مدرج قرار گرفته بر روی بستر الاستیک در محیط‌های حرارتی توسط شن و ونگ موردمطالعه قرار گرفت. در این مطالعه از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده شد [۳۳]. ترین و همکارانش یک روش تحلیلی بر پایه فضای حالت جهت بررسی ارتعاشات و کمانش تیرهای تابعی مدرج با شرایط مرزی مختلف و بارهای حرارتی ارائه دادند. آن‌ها از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت با اثرات حرارتی استفاده نمودند [۳۴]. المقرابل یک تحلیل ریاضی برای مطالعه تیر تابعی مدرج تحت بار حرارتی با فرض دو حالت توزیع دمای توانی و نمایی در امتداد عمق تیر ارائه داد [۳۵]. تام و کین ارتعاشات آزاد تیرهای تابعی مدرج دو جهتی را در یک محیط حرارتی بررسی نمودند. خواص مواد به دما وابسته بوده و در هر دو راستا با توزیع توانی تغییر می‌کرد [۳۶].

با پیشرفت سریع در فناوری المان‌های سازه، سازه‌ها با تخلخل مدرج می‌تواند در میان آخرین پیشرفت‌های مواد تابعی مدرج قرار گیرد. تخلخل ریزساختار به‌وسیله چگالی متغیر محلی محاسبه می‌گردد. محققان بر روی روش‌های تولید مواد تابعی مدرج از قبیل متالورژی پودر، رسوب بخار، خود انتشار، ریخته‌گری گریز از مرکز و جداسازی مغناطیسی توجه ویژه‌ای دارند [۳۷-۴۱]. این روش‌ها دارای معایبی از قبیل هزینه بالا و پیچیدگی تکنیک هستند. یکی از روش‌های انعطاف‌پذیر و مناسب جهت تولید مواد تابعی مدرج، فرآیند تف جوشی (سینترینگ) است. در طول این فرآیند به دلیل تفاوت زیاد در جامدسازی بین مواد تشکیل‌دهنده، تخلخل یا میکرو حفره‌هایی می‌تواند به‌طور منظم به وجود آید [۴۲]. به همین علت اثر تخلخل در هنگام طراحی و آنالیز سازه‌های تابعی مدرج از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سازه‌های تابعی مدرج متخلخل ترکیبی بسیار جالب از خواص مکانیکی مانند سختی بالا نسبت به وزن مخصوص خیلی پایین دارند [۴۳]. تا کنون مطالعات کمی بر روی پاسخ ارتعاشی مواد تابعی مدرج متخلخل انجام پذیرفته است. برای ورق‌های متخلخل تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق‌های حلقوی مدرج متخلخل قرار گرفته بر روی بسترهای الاستیک به‌وسیله بوطاهر و همکارانش ارائه شد. آن‌ها دریافتند که کسر حجمی تخلخل و نوع توزیع تخلخل اثر قابل‌توجهی روی پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق‌های تابعی مدرج در دامنه‌های بزرگ دارد [۴۴]. وتناساکولپونگ و آنگب هاکرن مطالعاتی در زمینه ارتعاشات خطی و غیرخطی تیرهای تابعی مدرج متخلخل قرارگرفته بر بستر الاستیک انجام دادند [۴۵]. ابراهیمی و مختاری یک روش انتقال دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات تیرهای تابعی مدرج تیموشنکو متخلخل چرخان ارائه دادند [۴۶]. وتناساکولپونگ و چایکیتیرانا ارتعاشات عرضی تیرهای تابعی مدرج متخلخل را با استفاده از تئوری تیموشنکو پیش‌بینی نمودند. آن‌ها دریافتند که تخلخل جرم و مقاومت تیرهای تابعی مدرج را کاهش می‌دهد [۴۷]. ابراهیمی و ضیا ارتعاشات دامنه بالای تیرهای تابعی مدرج تیموشنکو

متخلخل را با استفاده از روش‌های گالرکین و مقیاس‌های چندگانه بررسی نمودند [۴۸]. آتمنه و همکارانش از یک تئوری تیر کارا برای مطالعه اثرات ضخامت و تخلخل روی پاسخ مکانیکی تیرهای تابعی مدرج بر روی بسترهای الاستیک استفاده کردند [۴۹]. ابراهیمی و سالاری ارتعاشات تیرهای تابعی مدرج متخلخل اویلر- برنولی تحت بارهای حرارتی را موردبررسی قرار دادند. در این مطالعه تنها یک توزیع تخلخل در نظر گرفته شده بود و هیچ اشاره‌ای به اثرات توزیع تخلخل‌های مختلف روی رفتار ترمودینامیکی تیرهای متخلخل نشده بود [۵۰]. ابراهیمی و جعفری از تئوری‌های تیموشنکو و ردی برای اثرات دما روی ارتعاشات تیرهای تابعی مدرج با دو نوع تخلخل استفاده کردند [۵۱].

به‌دلیل پیچیدگی ذاتی مسائل بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، به روش‌های قدرتمند برای حل معادلات حاکم با شرایط مرزی مختلف نیاز است. ازاین‌رو روش مربعات دیفرانسیلی در این مطالعه به کار گرفته شد. این روش برای تحلیل ارتعاشات پانل‌ها، پوسته‌ها، ورق‌ها و تیرهای تابعی مدرج استفاده شده است [۲۵، ۲۶، ۲۹، ۳۱، ۵۲ و ۵۵]. زاهدی نژاد ارتعاشات آزاد تیرهای تابعی مدرج با شرایط مرزی مختلف و قرار گرفته بر روی بستر الاستیک دو پارامتری را در محیط حرارتی با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بررسی نمود. در اینجا از روش مربعات دیفرانسیلی و اصل همیلتون جهت به دست آوردن معادلات حرکت و گسسته‌سازی آن استفاده کرد [۵۶].

نوآوری این تحقیق تحلیل هم‌زمان تیر متخلخل تابعی مدرج بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم روی بستر الاستیک در محیط گرمایی توسط روش مربعات دیفرانسیلی است. در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای متخلخل تابعی مدرج، با توزیع تخلخل یکنواخت و بر اساس تغییر شکل برشی مرتبه سوم موردبررسی قرار گرفته است. این نوع توزیع تخلخل، در جهت ضخامت تیر در نظر گرفته شده است. همچنین اثر بارهای حرارتی و بستر الاستیک روی پارامترهای فرکانس برای شرایط مرزی مختلف موردتوجه قرار گرفت. معادلات حرکت و شرایط مرزی از اصل همیلتون به دست آورده شد. روش مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات حاکم، به کار گرفته شد. خواص مواد وابسته به دما بوده و در جهت ضخامت تیر و با توزیع قانون توانی تغییر می‌کند. همگرایی رفتار روش به‌کاررفته نشان داده شده و دقت نتایج با سایر حل‌های موجود در مقالات دیگر مقایسه گردیده است. اثر مواد مختلف و پارامترهای هندسی، توزیع دمای مختلف و ضرایب سختی بستر الاستیک، کسر حجمی تخلخل، روی فرکانس‌های طبیعی تیر متخلخل تابعی مدرج موردمطالعه قرار گرفت.

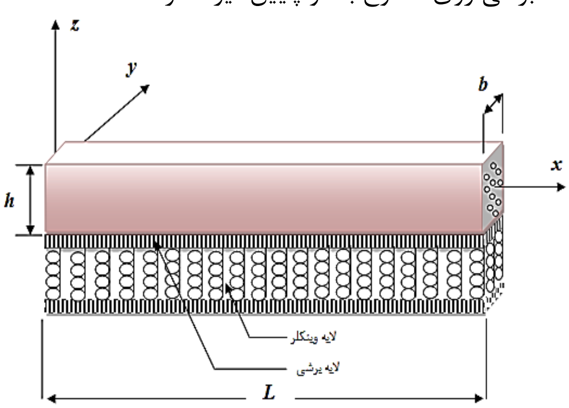
۲- سینماتیک

یک تیر تابعی مدرج متخلخل با تخلخل یکنواخت به طول L، عرض b و ارتفاع h روی بستر الاستیک در شکل **۱** نمایش داده شده است. میدان جابه‌جایی بر اساس تئوری تیر تغییر برشی مرتبه سوم مطابق با فرضیات زیر انتخاب شده است:

۱) جابه‌جایی‌های محوری و عرضی به مؤلفه‌های خمشی و برشی تقسیم‌بندی می‌شوند.

۲) مؤلفه خمشی از جابه‌جایی محوری مشابه با تئوری تیر کلاسیک است.

۳) مؤلفه برشی از جابه‌جایی محوری با تغییرات درجه سوم کرنش برشی در راستای عمق تیر تغییر می‌کند و تنش برشی روی سطوح بالا و پایین تیر صفر است.



شکل (۱): تیر متخلخل تابعی مدرج روی بستر الاستیک

مطابق با این فرضیات، [۲۸] میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u_1(x,z,t) &= u(x,t) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ u_2(x,z,t) &= 0, \\ u_3(x,z,t) &= w_b(x,t) + w_s(x,t) \end{aligned} \qquad (۱)$$

که $u_i(i=1,2,3)$، w_s و w_b جابه‌جایی محوری، مؤلفه‌های برشی و خمشی از جابه‌جایی عرضی یک نقطه روی صفحه میانی تیر هستند. توزیع تنش برشی و کرنش برشی عرضی در عمق تیر به‌وسیله تابع شکل $f(z)$ که شرایط مرزی بدون تنش را روی سطوح بالا و پایین تیر ارضا می‌کند نمایش داده می‌شود. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی [۵۷]، این تابع به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f(z)=\frac{4z^3}{3h^2} \tag{۲}$$

میدان جابه‌جایی ارائه‌شده با آنچه ردی ارائه کرد متفاوت بوده و جابه‌جایی عرضی به دو مؤلفه که جابه‌جایی‌های ناشی از خمش و برش است تقسیم می‌شود. در اینجا کرنش‌ها به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}-f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2},\\ \gamma_{xz}&=\left(1-\frac{df(z)}{dz}\right)\frac{\partial w_s}{\partial x}\equiv g(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}\end{aligned} \tag{۳}$$

۳- خواص مواد تابعی مدرج متخلخل

ترکیب ماده فرض می‌شود به‌صورت پیوسته در راستای ضخامت از سطح پایین $(z=-h/2)$ با ماده فلز و سطح بالایی $(z=h/2)$ با ماده سرامیک مطابق قانون توانی ساده در ترم‌های کسر حجمی تغییر نماید:

$$V_c=\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^p,\qquad V_m=1-V_c \tag{۴}$$

که در اینجا $-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}$ و p شاخص قانون توانی ماده است که می‌تواند مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی صفر داشته باشد. حالتی با p برابر صفر ارائه‌کننده یک تیر سرامیک کامل و در حالتی که p به سمت بی‌نهایت میل کند تیر تقریباً فلزی کامل است. پارامترهای V_c و V_m کسرهای حجمی سرامیک و فلز هستند. خواص مؤثر P_{eff} مثل مدول الاستیسیته E، نسبت پواسون ν و ضریب انبساط گرمایی α برای تیر با توزیع تخلخل یکنواخت، می‌تواند به‌صورت زیر مشخص گردد؛ که در اینجا a کسر حجمی تخلخل است.

$$P_{eff}(z,T)=\left(P_c(T)-P_m(T)\right)V_c+P_m(T)-\left(P_c(T)+P_m(T)\right)\frac{a}{2} \tag{۵}$$

مواد تابعی مدرج اغلب در محیط‌های دمایی بالا مورداستفاده قرار می‌گیرند که تغییرات در خواص ماده اجتناب‌ناپذیر است. در اینجا خواص ماده یک تیر تابعی مدرج به موقعیت و دما وابسته است؛ بنابراین باید وابستگی به دما را جهت پیش‌بینی دقیق پاسخ سازه در نظر گرفت. خواص مواد یک تابع غیرخطی از دمای محیطی $T(K)$ است.

$$P(T)=P_0\left(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3\right) \tag{۶}$$

که در آن $T(z)=T_0+\Delta T(z)$ و T_0 دمای اتاق و برابر ۳۰۰ درجه کلوین است. P_0، P_{-1}، P_1، P_2 و P_3 ضرایب وابسته دمایی می‌باشند. فرض می‌شود تغییرات دما تنها در جهت ضخامت و دما در سطوح بالا و پایین مشخص باشد. برای این حالت ما می‌توانیم معادله انتقال حرارت حالت پایدار را برای به دست آوردن توزیع دما در امتداد ضخامت حل نماییم.

$$-\frac{d}{dz}\left[k\frac{dT}{dz}\right]=0 \tag{۷}$$

این معادله با شرایط مرزی $T=T_c$ در $z=\frac{h}{2}$ و $T=T_m$ در $z=-\frac{h}{2}$ حل می‌شود. جواب این معادله در مرجع [۳۳] به‌صورت زیر است.

$$T(z)=T_c-\frac{T_c-T_m}{\int_{-h/2}^{h/2}\frac{dz}{k(z,T)}}\int_{-h/2}^{z}\frac{dz}{k(z,T)} \tag{۸}$$

۴- روابط اصلی و معادلات حاکم

معادلات حرکت برای ارتعاشات آزاد تیر تابعی مدرج می‌تواند از اصل همیلتون استخراج شود.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta K-\delta U-\delta V_{ef}\right)dt=0 \tag{۹}$$

که t زمان، t_1 و t_2 زمان‌های ابتدایی و انتهایی، Kتغییرات انرژی جنبشی، U تغییرات انرژی کرنشی کل و V_{ef} تغییرات انرژی پتانسیل بستر الاستیک است. انرژی کرنشی کل تیر به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$U=U_d+U_T \tag{۱۰}$$

که U_d انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های مکانیکی و U_T انرژی کرنشی به علت تنش‌های اولیه ناشی از افزایش دما است. این کرنش‌ها با روابط زیر ارائه می‌شوند [۵۸]:

$$U_d = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}\gamma_{xz}\right) dA dx \tag{۱۱}$$

$$U_T = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx}^T d_{xx}\right) dA dx \tag{۱۲}$$

$$d_{xx} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 \tag{۱۳}$$

در رابطه ۱۲ تنش حرارتی با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{xx}^T = -\frac{E(z,T)\alpha(z,T)}{1-\upsilon(z,T)}\Delta T(z) \tag{۱۴}$$

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بستر الاستیک به‌صورت زیر است:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho(z)\left(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2\right) dA dx \tag{۱۵}$$

$$V_{ef} = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^b \left[k_w u_3^2 + k_p\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2\right] \Bigg|_{z=0} dy dx \tag{۱۶}$$

که k_w و k_p ضرایب الاستیک لایه برشی و وینکلر بستر بوده که به خاک و مشخصات بستر مانند طول خاک، مدول الاستیک و نسبت پواسون خاک بستگی دارد. با جایگزینی روابط (۱۰-۱۶) در رابطه (۹) و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء نسبت به مکان و زمان، معادلات حرکت تیر تابعی مدرج به‌دست می‌آید.

$$\delta u: I_0\ddot{u} - I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N^T}{\partial x} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}\delta w_b &: I_0\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + I_1\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - \\ J_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_b^T}{\partial x^2} + \\ &\left(A^T + k_p\right)\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) - k_w\left(w_b + w_s\right)\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}\delta w_s &: I_0\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + J_1\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - J_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - \\ K_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_s^T}{\partial x^2} + \\ &\left(A^T + k_p\right)\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial Q}{\partial x} - k_w\left(w_b + w_s\right)\end{aligned} \tag{۱۹}$$

پارامترهای N^T،M_b،M_b^T،M_s،M_s^T و Q به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N = A\frac{\partial u}{\partial x} - B\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \tag{۲۰}$$

$$N^T = A^T\frac{\partial u}{\partial x} - B^T\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_s^T\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \tag{۲۱}$$

$$M_b = B\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \tag{۲۲}$$

$$M_b^T = B^T\frac{\partial u}{\partial x} - D^T\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - D_s^T\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \tag{۲۳}$$

$$M_s = B_s\frac{\partial u}{\partial x} - D_s\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \tag{۲۴}$$

$$M_s^T = B_s^T\frac{\partial u}{\partial x} - D_s^T\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_s^T\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \tag{۲۵}$$

$$Q = A_s\frac{\partial w_s}{\partial x} \tag{۲۶}$$

ضرایب به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2\right) = \int_A \rho(z)\left(1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z)\right) dA \tag{۲۷}$$

$$\left(A, B, B_s, D, D_s, H_s\right) = \int_A E(z,T)\left(1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z)\right) dA \tag{۲۸}$$

$$A_s = \int_A \frac{E(z,T)}{2\left(1+\upsilon(z,T)\right)} g^2(z) dA \tag{۲۹}$$

$$\left(A^T, B^T, B_s^T, D^T, D_s^T, H_s^T\right) = \int_A \sigma_{xx}^T\left(1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z)\right) dA \tag{۳۰}$$

با جایگذاری روابط ۲۰-۲۶ در روابط ۱۷-۱۹ معادلات حرکت بر اساس مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\delta u &: I_0\ddot{u} - I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} = \left(A + A^T\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &-\left(B + B^T\right)\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - \left(B_s + B_s^T\right)\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3}\end{aligned} \tag{۳۱}$$

$$\begin{aligned}\delta w_b &: I_0\left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s\right) + I_1\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - \\ J_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} &= \left(B + B^T\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \\ &\left(D + D^T\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \left(D_s + D_s^T\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \\ &\left(A^T + k_p\right)\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) - k_w\left(w_b + w_s\right)\end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$\delta w_s: I_0\left(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s\right)+J_1\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}-J_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} -K_2\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2}=\left(B_s+B_s^T\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}- \left(D_s+D_s^T\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}-\left(H_s+H_s^T\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+ \left(A^T+k_p\right)\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)+ A_s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}-k_w\left(w_b+w_s\right) \quad (۳۳)$$

۵- شرایط مرزی

با توجه به شرایط مرزی تیر تابعی مدرج، پارامترهای زیر باید مشخص شوند:

$$u=0 \quad \text{یا} \quad \left(N+N^T\right)=0 \quad (۳۴)$$

$$Q_b\equiv\frac{\partial M_b}{\partial x}+\frac{\partial M_b^T}{\partial x}+A^T\left(\frac{\partial w_b}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)- I_1\ddot{u}+I_2\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x}+J_2\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}=0 \quad (۳۵)$$

یا

$$w_b=0$$

$$Q_s\equiv\frac{\partial M_s}{\partial x}+\frac{\partial M_s^T}{\partial x}+A^T\left(\frac{\partial w_b}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)+ Q-J_1\ddot{u}+J_2\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x}+K_2\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}=0 \quad (۳۶)$$

یا

$$w_s=0$$

$$\left(M_b+M_b^T\right)=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial w_b}{\partial x}=0 \quad (۳۷)$$

$$\left(M_s+M_s^T\right)=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial w_s}{\partial x}=0 \quad (۳۸)$$

شرایط مختلف در $x=0$ و $x=L$ با ترکیب شرایط ذکرشده در روابط ۳۸-۳۴ می‌تواند به دست آید. در این مطالعه شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده نرم موردبررسی قرار گرفته و شرایط مرزی برای این حالت مطابق ذیل است:

$$\left(A+A^T\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\left(B+B^T\right)\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}- \left(B_s+B_s^T\right)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}=0 \quad (۳۹)$$

یا

$$\left(N+N^T\right)=0$$

$$\left(B+B^T\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\left(D+D^T\right)\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}- \left(D_s+D_s^T\right)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}=0$$

یا

$$\left(M_b+M_b^T\right)=0$$

$$\left(B_s+B_s^T\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\left(D_s+D_s^T\right)\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}- \left(H_s+H_s^T\right)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}=0$$

یا

$$\left(M_s+M_s^T\right)=0$$

$$w_b=0, \qquad w_s=0$$

برای تحلیل ارتعاشات آزاد، جواب‌های زیر ممکن است برای مؤلفه‌های جابه‌جایی در نظر گرفته شود:

$$u\left(x,t\right)=\bar{u}\left(x\right)e^{I\omega t}, \quad w_b\left(x,t\right)=\bar{w}_b\left(x\right)e^{I\omega t}, \quad w_s\left(x,t\right)=\bar{w}_s\left(x\right)e^{I\omega t} \quad (۴۰)$$

که $I=\sqrt{-1}$ و ω فرکانس طبیعی است.

۶- گسسته سازی مربعات دیفرانسیلی

در این مرحله، معادلات حرکت و شرایط مرزی مرتبط با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل می‌شود. با استفاده از قانون گسسته‌سازی برای مشتقات [52] و روابط ۳۱-۳۳ و ۳۹ و روش مربعات دیفرانسیلی معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی به دست می‌آید.

$$\left(A+A^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{u}_j-\left(B+B^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}C_{ij}\bar{w}_{bj}- \left(B_s+B_s^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}C_{ij}\bar{w}_{sj}+ \omega^2\left(I_0\bar{u}_i-I_1\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{w}_{bj}-J_1\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{w}_{sj}\right)=0, \quad (۴۱)$$

$$\begin{aligned}&\left(B+B^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}C_{ij}\bar{u}_j-\left(D+D^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}D_{ij}\bar{w}_{bj}-\\&\left(D_s+D_s^{\,T}\right)\sum_{j=1}^{N_x}D_{ij}\bar{w}_{sj}+\left(A^T+k_g\right)\\&\left(\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\left(\bar{w}_{bj}+\bar{w}_{sj}\right)\right)-k_w\left(\bar{w}_{bi}+\bar{w}_{si}\right)+\\&\omega^2(I_0\left(\bar{w}_{bi}+\bar{w}_{si}\right)+\\&I_1\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{u}_j-I_2\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{bj}-J_2\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{sj})=0,\end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}&\left(B_s+B_s^{\,T}\right)\sum_{j=1}^{N_x}C_{ij}\bar{u}_j-\left(D_s+D_s^{\,T}\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}D_{ij}\bar{w}_{bj}-\left(H_s+H_s^{\,T}\right)\sum_{j=1}^{N_x}D_{ij}\bar{w}_{sj}\\&+\left(A^T+k_g\right)\left(\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\left(\bar{w}_{bj}+\bar{w}_{sj}\right)\right)\\&-k_w\left(\bar{w}_{bi}+\bar{w}_{si}\right)+A_s\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{sj}+\\&\omega^2(I_0\left(\bar{w}_{bi}+\bar{w}_{si}\right)+J_1\\&\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{u}_j-J_2\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{bj}-K_2\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{sj})=0,\end{aligned} \tag{۴۳}$$

که N_x تعداد نقاط گسسته در راستای طولی و A_{ij}، B_{ij}، C_{ij} و D_{ij} ضرایب وزنی مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم روش مربعات دیفرانسیلی هستند. شرایط مرزی بر اساس این روش به‌صورت معادله بعد نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left(A+A^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{u}_j-\left(B+B^T\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{bj}-\left(B_s+B_s^{\,T}\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{sj}=0,\\&\left(B+B^T\right)\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{u}_j-\left(D+D^T\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{bj}-\left(D_s+D_s^{\,T}\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{sj}=0,\\&\left(B_s+B_s^{\,T}\right)\sum_{j=1}^{N_x}A_{ij}\bar{u}_j-\left(D_s+D_s^{\,T}\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{bj}-\left(H_s+H_s^{\,T}\right)\\&\sum_{j=1}^{N_x}B_{ij}\bar{w}_{sj}=0,\\&\bar{w}_{bi}=0,\quad \bar{w}_{si}=0.\end{aligned} \tag{۴۴}$$

برای به دست آوردن سیستم مقادیر ویژه از معادلات، درجات آزادی به درجات آزادی داخلی و مرزی جدا می‌شود. $[S_{db}]$ و $[S_{dd}]$ ماتریس‌های سختی و $[M]$ ماتریس جرم می‌باشد. با روش مشابه شکل گسسته شده شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$\left[S_{bb}\right]\{b\}+\left[S_{bd}\right]\{d\}=0 \tag{۴۵}$$

که $[S_{bb}]$ و $[S_{bd}]$ ماتریس‌های سختی هستند. با استفاده از معادله ۵۱ با حذف درجات مرزی آزادی $\{b\}$ از معادله ۵۰ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\left(\left[S\right]-\omega_i^2\left[M\right]\right)\{d\}=0 \tag{۴۶}$$

که $[S]=[S_{dd}]-[S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}]$ از معادله مقادیر ویژه می‌توان جهت به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر تابعی مدرج استفاده نمود.

۷- نتایج و بحث

در این بخش ابتدا همگرایی روش برای شرایط مرزی مختلف موردبررسی قرار می‌گیرد. مقایسه با دیگر جواب‌های در

دسترس دقت نتایج را تأیید می‌نماید. برای حالت‌های مستقل از دما، یک تیر تشکیل‌شده از آلومینیوم (Al) و آلومینا (Al_2O_3) را در نظر می‌گیریم. خواص مواد تابعی مدرج در جدول **۱** لیست شده است.

جدول (۱): خواص مواد آلومینیوم و آلومینا

خواص	فلز (Al)	سرامیک (Al_2O_3)
E (GPa)	۷۰	۳۸
ν	۰/۳	۰/۳
$\rho(\frac{kg}{m^3})$	۲۷۰۲	۳۹۶۰

برای حالت‌های وابسته به دما، یک تیر ساخته‌شده از فولاد ضدزنگ (SUS304) و سیلیکون نیتراید (Si_3N_4) در نظر گرفته می‌شود. خواص این مواد در جدول **۲** بر اساس داده‌های ارائه‌شده در مرجع [۳۳] لیست شده است. در همه مثال‌های حل‌شده پارامترهای فرکانس بی‌بعد (λ_n) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_n = \frac{\omega_n L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{۴۷}$$

ρ_m و E_m چگالی و مدول یانگ لایه فلزی هستند. برای تیر تابعی مدرج وابسته به دما، مقادیر این پارامترها در دمای مرجع، ۳۰۰ درجه کلوین استفاده شده است. همچنین ثابت‌های الاستیک بی‌بعد بستر به‌صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$K_w = \frac{k_w L^4}{E_0 I}, \qquad K_P = \frac{k_P L^2}{\pi^2 E_0 I} \tag{۴۸}$$

که پارامتر I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{۴۹}$$

در اینجا همگرایی روش مربعات دیفرانسیلی با توجه به تعداد نقاط تقسیم در امتداد طول تیر مورد آزمایش قرار گرفت. اگرچه به‌عنوان خلاصه تنها برای تیر تابعی مدرج در دمای مرجع بدون در نظر گرفتن اثرات بستر الاستیک، تخلخل و تحت شرایط مرزی ساده ارائه گردید. در جدول **۳** همگرایی پارامترهای فرکانس تیر تابعی مدرج برای شرایط تکیه‌گاهی ساده ارائه‌شده است. در این جدول مشخص است که نتایج برای N_x=۲۹ همگرا می‌شود.

در جدول **۴** پارامترهای فرکانس محاسبه شده و با آنچه ابراهیمی [۵۹] و سیمسک [۲۱] در مقاله‌ای بر اساس تئوری تیر تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای تیرهای تابعی مدرج با تکیه‌گاه ساده بود مقایسه گردید و تطابق نزدیکی بین نتایج حاصل شد. بر این اساس این داده‌ها در جدول مشخص گردید که روش پیشنهادشده همه مودهای ارتعاشات تیر را برای نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ پیش‌بینی می‌کند.

جهت تأیید بیشتر نتایج به‌دست‌آمده از روش مربعات دیفرانسیلی، زاهدی نژاد در مقاله‌ای [۵۶]، فرکانس‌های اصلی تیر ایزوتروپیک با تکیه‌گاه ساده بر روی بستر الاستیک را محاسبه و با آنچه متسونگا [۲۴] ارائه کرده مقایسه نمود. اثرات نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و پارامترهای بستر الاستیک موردتوجه قرار گرفت. تطابق بین نتایج ارائه‌شده، صحت استفاده از روش را نشان داد.

در جدول **۵**، پارامترهای فرکانس اول بی‌بعد اصلی تیر تابعی مدرج در محیط حرارتی با شرایط تکیه‌گاهی ساده با آنچه به‌وسیله ابراهیمی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا ارائه نموده مقایسه گردید. در اینجا سه میدان حرارتی یکنواخت (UTR)، خطی (LTR) و غیرخطی (NLTR) در نظر گرفته شد. آنچه در اینجا می‌بینیم تطابق خوب نتایج است.

با توجه به مقایسه نتایج و تطابق خوب این نتایج با نتایج سایر مقالات، اعتبار استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی مورد تأیید واقع می‌شود. در ادامه اثرات پارامترهای مختلف بر روی فرکانس‌های اول تیر موردبررسی قرار می‌گیرد.

به‌منظور تحلیل اثر بستر الاستیک روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر تابعی مدرج مدل قانون توانی نسبت به هر دو پارامتر بستر الاستیک بررسی‌ها انجام پذیرفت. تیر با یک توزیع تخلخل یکنواخت در معرض افزایش دمای یکنواخت قرار گرفته است. تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد نسبت به پارامتر وینکلر با حذف پارامتر پاسترناک برای مقادیر مختلف پارامتر تخلخل در شکل **۲** ترسیم شده است. سپس، این

تغییرات نسبت به پارامتر پاسترناک با حذف پارامتر وینکلر برای مقادیر مختلف شاخص تخلخل در شکل **۳** ترسیم می‌گردد. در این اشکال مشاهده می‌شود که برای هر مقدار شاخص تخلخل، فرکانس‌های طبیعی با افزایش پارامترهای وینکلر و پاسترناک افزایش می‌یابد. این موضوع به این دلیل است که با افزایش هر دو پارامتر بستر الاستیک، سختی کل سیستم افزایش یافته و در نتیجه فرکانس‌های بی‌بعد افزایش می‌یابد. فرکانس‌های بزرگ‌تر برای مقادیر بزرگ‌تر شاخص تخلخل به دست می‌آید. همان‌طور که از شکل **۴** مشخص است پارامتر پاسترناک اثر بیشتری نسبت به پارامتر وینکلر روی فرکانس‌های طبیعی داشته و فرکانس‌های بزرگ‌تر با ترکیب هر دو پارامتر بستر الاستیک به‌دست می‌آید. برای مشاهده تأثیر دما روی فرکانس‌ها، شکل **۵** تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد را نسبت به دما برای شاخص‌های مختلف قانون توانی و یک مقدار ثابت نسبت لاغری نشان می‌دهد. تیر با توزیع تخلخل یکنواخت در معرض افزایش دمای یکنواخت قرار دارد. مشاهده می‌گردد برای تمام شاخص‌های توانی فرکانس طبیعی با افزایش دما کاهش می‌یابد و این به دلیل افزایش انعطاف‌پذیری تیر است. سختی هندسی با افزایش دما، کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود با افزایش شاخص قانون توانی فرکانس‌های طبیعی تیر کاهش می‌یابد. برای نمایش اثر کسر حجمی تخلخل با یک توزیع تخلخل یکنواخت روی فرکانس‌های طبیعی شکل **۶** فرکانس‌ها را نسبت به دما برای پارامترهای مختلف تخلخل با مقادیر ثابت شاخص قانون توانی و نسبت لاغری ارائه می‌دهد. فرکانس‌های طبیعی بزرگ‌تر برای مقادیر بزرگ‌تر شاخص تخلخل به دست می‌آید.

جدول (۲): ضرایب وابسته دمایی برای سرامیک و فلز

ماده	خواص	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Si_3N_4	$E(Pa)$	۳۴۸/۴۳×۱۰^{۹}	۰	−۳/۰۷۰×۱۰$^{-۴}$	۲/۱۶۰×۱۰$^{-۷}$	−۸/۹۴۶×۱۰$^{-۱۱}$
	$\alpha\left(\frac{1}{K}\right)$	۵/۸۷۲۳×۱۰$^{-۶}$	۰	۹/۰۹۵×۱۰$^{-۴}$	۰	۰
	$k(w/mK)$	۱۳/۷۲۳	۰	−۱/۰۳۲×۱۰$^{-۳}$	۵/۴۶۶×۱۰$^{-۷}$	−۷/۸۷۶×۱۰$^{-۱۱}$
	υ	۰/۲۴	۰	۰	۰	۰
	$\rho(\frac{kg}{m^3})$	۲۳۷۰	۰	۰	۰	۰
SUS304	$E(Pa)$	۲۰۱/۰۴×۱۰^{۹}	۰	۳/۰۷۰×۱۰$^{-۴}$	−۶/۵۳۴×۱۰$^{-۷}$	۰
	$\alpha\left(\frac{1}{K}\right)$	۱۲/۳۳۰×۱۰$^{-۶}$	۰	۸/۰۸۶×۱۰$^{-۴}$	۰	۰
	$k(w/mK)$	۱۵/۳۷۹	۰	−۱/۲۶۴×۱۰$^{-۳}$	۲/۰۹۲×۱۰$^{-۶}$	−۷/۲۲۳×۱۰$^{-۱۰}$
	υ	۰/۳۲۶۲	۰	−۲/۰۰۲×۱۰$^{-۴}$	۳/۷۹۷×۱۰$^{-۷}$	۰
	$\rho(\frac{kg}{m^3})$	۸۱۶۶	۰	۰	۰	۰

جدول (۳): همگرایی سه فرکانس اول بی‌بعد برای تیر تابعی مدرج با شرایط تکیه‌گاهی ساده (p=۵)

		تعداد نقاط شبکه (Nx)						
$\frac{L}{h}$	n	۵	۹	۱۵	۲۱	۲۵	۲۹	۳۳
۵	۱	۲/۹۹۵	۳/۳۷۳	۳/۳۹۲	۳/۳۹۶	۳/۳۹۸	۳/۳۹۹	۳/۳۹۹
	۲	۱۹/۵۴۶	۱۱/۵۱۲	۱۱/۴۸۲	۱۱/۵۱۱	۱۱/۵۲۱	۱۱/۵۲۶	۱۱/۵۲۶
	۳	۳۵/۹۲۱	۱۹/۷۸۹	۱۹/۷۸۸	۱۹/۷۸۷	۱۹/۷۸۶	۱۹/۷۸۵	۱۹/۷۸۵
۲۰	۱	۳/۲۷۳	۳/۶۴۶	۳/۶۴۸	۳/۶۴۸	۳/۶۴۸	۳/۶۴۸	۳/۶۴۸
	۲	۷۸/۶۷۳	۱۴/۵۵۸	۱۴/۳۶۴	۱۴/۳۶۹	۱۴/۳۷۰	۱۴/۳۷۲	۱۴/۳۷۲

	۳	۱۴۳/۶۸۶	۳۶/۱۹۴	۳۱/۵۲۲	۳۱/۵۵۱	۳۱/۵۵۹	۳۱/۵۶۵	۳۱/۵۶۵

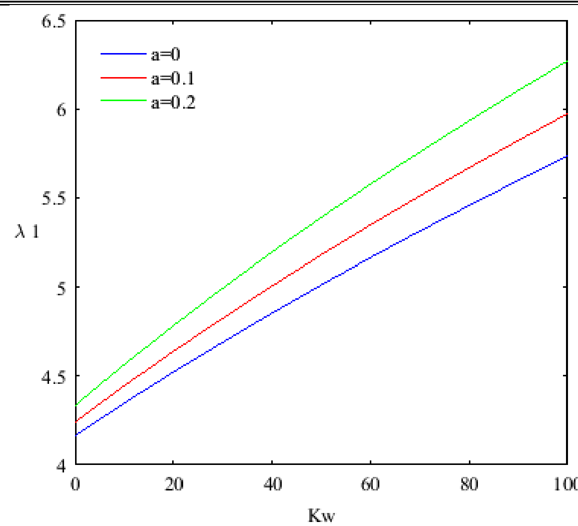
جدول (۴): مقایسه فرکانس اول تیر تابعی مدرج با شاخص توانی مختلف و تکیه‌گاه ساده در دمای مرجع بدون اثرات تخلخل و بستر الاستیک $T_c = T_m$

L/h	روش حل		شاخص توانی (p)				
			۰	۰/۲	۰/۵	۱	۲
۵	ابراهیمی و جعفری	حل ناویر	۵/۱۵۲	۴/۸۰۸	۴/۴۱۰	۳/۹۹۰	۳/۶۲۶
	سیمسک	معادلات لاگرانژ	۵/۱۵۲	۴/۸۰۶	۴/۴۰۸	۳/۹۹۰	۳/۶۳۴
	مقاله حاضر	مربعات دیفرانسیلی	۵/۱۴۹	۴/۸۰۴	۴/۴۰۷	۳/۹۸۸	۳/۶۲۴
۲۰	ابراهیمی و جعفری	حل ناویر	۵/۴۶۰	۵/۰۸۱	۴/۶۵۱	۴/۲۰۵	۳/۸۳۶
	سیمسک	معادلات لاگرانژ	۵/۴۶۰	۵/۰۸۲	۴/۶۵۱	۴/۲۰۵	۳/۸۳۶
	مقاله حاضر	مربعات دیفرانسیلی	۵/۴۶۰	۵/۰۸۱	۴/۶۵۱	۴/۲۰۵	۳/۸۳۶

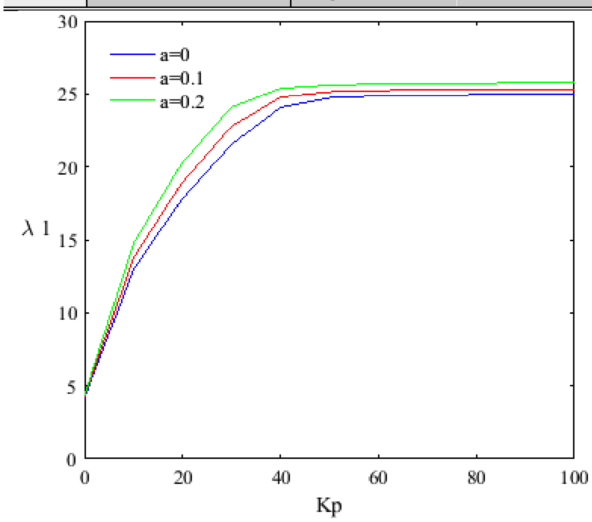
جدول (۵): مقایسه فرکانس اول تیر متخلخل تابعی مدرج با شاخص توانی و بارهای حرارتی مختلف و تکیه‌گاه ساده برای نسبت لاغری ۲۰.

a	بارهای حرارتی	مرجع	شاخص توانی (p)						
			۰	**۰/۱**	**۰/۲**	**۰/۵**	**۱**	**۲**	**۵**
						ΔT=۲۰			
۰	**UTR**	ابراهیمی	۶/۳۰۳	۵/۵۵۸	۵/۰۷۲	۴/۲۷۸	۳/۷۲۷	۳/۳۳۱	۳/۰۱۴
		مقاله حاضر	۶/۳۰۱	۵/۵۵۶	۵/۰۷۱	۴/۲۷۶	۳/۷۲۶	۳/۳۳۰	۳/۰۱۴
	LTR	ابراهیمی	۶/۳۵۸	۵/۶۱۵	۵/۱۳۲	۴/۳۴۰	۳/۷۸۹	۳/۳۹۰	۳/۰۷۱
		مقاله حاضر	۶/۳۳۷	۵/۵۹۵	۵/۱۲۹	۴/۳۲۰	۳/۷۸۱	۳/۳۸۸	۳/۰۷۰
	NLTR	ابراهیمی	۶/۳۵۸	۵/۶۱۶	۵/۱۳۴	۴/۳۴۳	۳/۷۹۲	۳/۳۹۴	۳/۰۷۴
		مقاله حاضر	۶/۳۴۶	۵/۶۰۹	۵/۱۳۱	۴/۳۴۱	۳/۷۹۱	۳/۳۹۳	۳/۰۷۳
۰/۱	**UTR**	ابراهیمی	۶/۸۸۹	۵/۹۱۱	۵/۳۰۸	۴/۳۶۹	۳/۷۴۴	۳/۳۰۸	۲/۹۶۸
		مقاله حاضر	۶/۸۸۰	۵/۹۰۷	۵/۳۰۳	۴/۳۶۶	۳/۷۴۱	۳/۳۰۶	۲/۹۶۶
	LTR	ابراهیمی	۶/۹۳۷	۵/۹۶۲	۵/۳۶۱	۴/۴۲۴	۳/۷۹۹	۳/۳۶۱	۳/۰۲۰
		مقاله حاضر	۶/۹۲۹	۵/۹۵۸	۵/۳۵۸	۴/۴۲۰	۳/۷۹۶	۳/۳۵۹	۳/۰۱۸
	NLTR	ابراهیمی	۶/۹۳۷	۵/۹۶۳	۵/۳۶۳	۴/۴۲۷	۳/۸۰۳	۳/۳۶۵	۳/۰۲۲
		مقاله حاضر	۶/۹۳۰	۵/۹۵۷	۵/۳۵۹	۴/۴۲۳	۳/۷۹۹	۳/۳۶۲	۳/۰۲۱
۰/۲	**UTR**	ابراهیمی	۷/۸۲۴	۶/۴۱۸	۵/۶۲۷	۴/۴۷۸	۳/۷۵۸	۳/۲۷۴	۲/۹۰۸
		مقاله حاضر	۷/۸۲۱	۶/۴۱۶	۵/۶۲۵	۴/۴۷۷	۳/۷۵۷	۳/۲۷۴	۲/۹۰۸
	LTR	ابراهیمی	۷/۸۶۵	۶/۴۶۳	۵/۶۷۵	۴/۵۲۷	۳/۸۰۷	۳/۳۲۱	۲/۹۵۳
		مقاله حاضر	۷/۸۵۹	۶/۴۵۸	۵/۶۷۰	۴/۵۲۳	۳/۸۰۵	۳/۳۱۹	۲/۹۵۳
	NLTR	ابراهیمی	۷/۸۹۴	۶/۴۶۴	۵/۶۷۶	۴/۵۳۰	۳/۸۱۰	۳/۳۲۴	۲/۹۵۵
		مقاله حاضر	۷/۸۸۴	۶/۴۵۸	۵/۶۷۰	۴/۵۲۵	۳/۷۹۷	۳/۳۲۱	۲/۹۵۳
						ΔT=۴۰			
۰	**UTR**	ابراهیمی	۶/۰۳۳	۵/۲۹۲	۴/۸۱۰	۴/۰۲۲	۳/۴۷۶	۳/۰۸۴	۲/۷۷۲
		مقاله حاضر	۶/۰۲۹	۵/۲۸۹	۴/۸۰۸	۴/۰۲۱	۳/۴۷۵	۳/۰۸۴	۲/۷۷۲
	LTR	ابراهیمی	۶/۲۱۳	۵/۴۸۰	۵/۰۰۲	۴/۲۱۸	۳/۶۷۱	۳/۲۷۶	۲/۹۵۹

		مقاله حاضر	۶/۲۰۷	۵/۴۷۵	۴/۹۹۴	۴/۲۱۳	۳/۶۶۷	۳/۲۷۳	۲/۹۵۷
	NLTR	ابراهیمی	۶/۲۱۳	۵/۴۸۲	۵/۰۰۶	۴/۲۲۴	۳/۶۷۸	۳/۲۸۳	۲/۹۶۴
		مقاله حاضر	۶/۲۰۵	۵/۴۷۵	۵/۰۰۱	۴/۲۱۹	۳/۶۷۵	۳/۲۸۰	۲/۹۶۲
۰/۱	UTR	ابراهیمی	۶/۶۴۱	۵/۶۷۱	۵/۰۷۳	۴/۱۴۰	۳/۵۲۱	۳/۰۹۰	۲/۷۵۵
		مقاله حاضر	۶/۶۳۸	۵/۶۶۹	۵/۰۷۰	۴/۱۳۷	۳/۵۱۹	۳/۰۸۸	۲/۷۵۳
	LTR	ابراهیمی	۶/۸۰۱	۵/۸۳۸	۵/۲۴۳	۴/۳۱۴	۳/۶۹۵	۳/۲۶۰	۲/۹۲۰
		مقاله حاضر	۶/۷۹۲	۵/۸۳۰	۵/۲۳۶	۴/۳۰۸	۳/۶۸۹	۳/۲۵۶	۲/۹۱۷
	NLTR	ابراهیمی	۶/۸۰۱	۵/۸۴۰	۵/۲۴۷	۴/۳۲۰	۳/۷۰۲	۳/۲۶۷	۲/۹۲۵
		مقاله حاضر	۶/۷۹۲	۵/۸۳۳	۵/۲۴۱	۴/۳۱۴	۳/۶۹۷	۳/۲۶۴	۲/۹۲۳
۰/۲	UTR	ابراهیمی	۷/۵۹۵	۶/۲۰۲	۵/۴۱۸	۴/۲۷۷	۳/۵۶۳	۳/۰۸۴	۲/۷۲۳
		مقاله حاضر	۷/۵۹۰	۶/۱۹۷	۵/۴۱۵	۴/۲۷۵	۳/۵۶۱	۳/۰۸۲	۲/۷۲۱
	LTR	ابراهیمی	۷/۷۳۶	۶/۳۴۹	۵/۵۶۸	۴/۴۳۰	۳/۷۱۵	۳/۲۳۲	۲/۸۶۷
		مقاله حاضر	۷/۷۲۸	۶/۳۴۴	۵/۵۶۴	۴/۴۲۶	۳/۷۱۱	۳/۲۲۹	۲/۸۶۵
	NLTR	ابراهیمی	۷/۷۳۶	۶/۳۵۱	۵/۵۷۲	۴/۴۳۷	۳/۷۲۲	۳/۲۳۹	۲/۸۷۱
		مقاله حاضر	۷/۷۲۷	۶/۳۴۶	۵/۵۶۶	۴/۴۳۳	۳/۷۱۸	۳/۲۳۶	۲/۸۶۹



شکل (۲): نمودار اثر ثابت وینکلر بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ساده، $\frac{L}{h}$=۵، ΔT=۱۰۰ و p=۰/۵



شکل (۳): نمودار اثر ثابت پاسترناک بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ساده، $\frac{L}{h}$=۵، ΔT=۱۰۰ و p=۰/۵

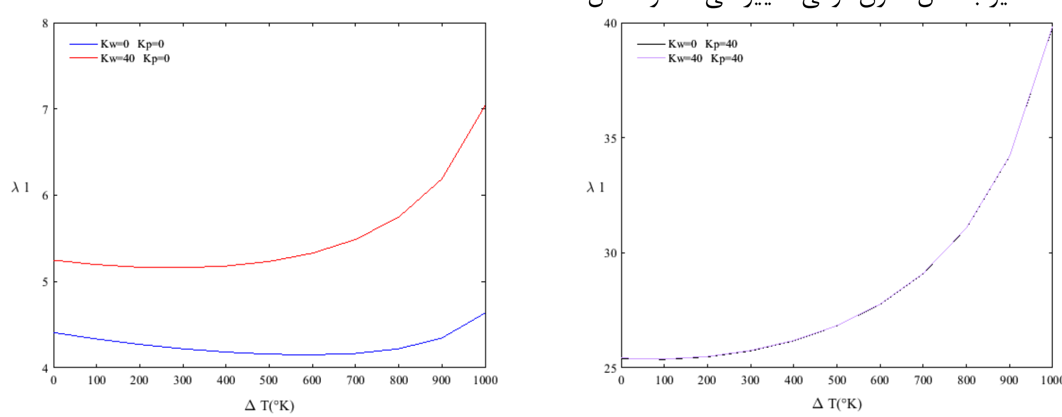
اثر نوع میدان حرارتی روی فرکانس‌ها در شکل **۷** نمایش داده شده است. تیر با یک توزیع تخلخل یکنواخت در معرض سه بار حرارتی یکنواخت، خطی و غیرخطی برای مقادیر ثابت کسر حجمی تخلخل، شاخص توانی و نسبت لاغری قرار گرفته است. ملاحظه می‌شود فرکانس‌ها برای حالت توزیع دمای یکنواخت با اختلاف دماهای مختلف بزرگ‌تر از دو حالت دیگر بوده و شیب تغییرات کاهشی فرکانس کوچک‌تر است؛ که این موضوع به دلیل انعطاف‌پذیری بیشتر تیر ناشی از بالاتر بودن دمای نقاط مختلف در راستای ضخامت تیر است.

شکل **۸** تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد تیر تابعی مدرج با یک توزیع تخلخل یکنواخت نسبت به دما، برای مقادیر مختلف نسبت لاغری و مقادیر ثابت کسر حجمی تخلخل و شاخص قانون توانی نمایش داده شده است. در اینجا تیر در معرض افزایش دمای یکنواخت قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، در نسبت‌های لاغری بزرگ‌تر، کمانش حرارتی در اختلاف دمای پایین‌تر اتفاق می‌افتد؛ بنابراین، مقایسه فرکانس‌ها باید زیر دمای بحرانی انجام شود. همچنین از شکل مشخص است که فرکانس‌های طبیعی در یک اختلاف دمای معین برای نسبت لاغری کوچک‌تر، بزرگ‌تر بوده و این ناشی از سختی بیشتر تیر با نسبت لاغری کوچک‌تر می‌باشد.

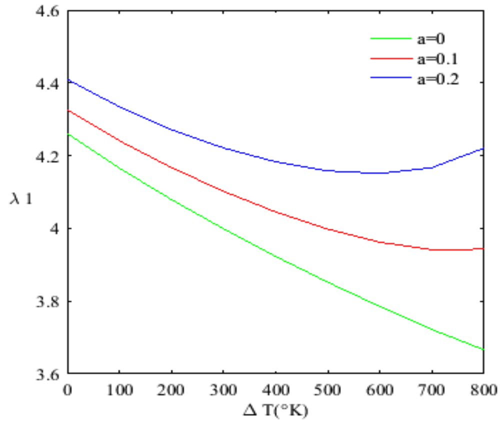
۸- نتیجه‌گیری

کار ارائه شده بر روی رفتار دینامیکی تیرهای متخلخل تابعی مدرج با بستر الاستیک دو پارامتری در یک محیط حرارتی تمرکز کرده است. خواص ماده وابسته به دما بوده و در جهت ضخامت تیر با مدل قانون توانی تغییر می‌کند و شامل تخلخل یکنواخت است. بارهای حرارتی یکنواخت، خطی و غیرخطی در را راستای ضخامت تیر اعمال می‌شود. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی برای بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ضخیم به‌کار گرفته می‌شود. معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و شرایط انتهایی تیر با تکیه‌گاه ساده استخراج می‌شود. روش مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات حاکم مورداستفاده قرار گرفت. اثرات چندین پارامتر نظیر شاخص قانون توانی، نوع بار حرارتی، شاخص تخلخل، نسبت لاغری تیر روی فرکانس‌های طبیعی تیر موردبررسی قرار گرفت. نتایج عددی به‌دست‌آمده در پژوهش و تحقیق حاضر نشان می‌دهد که:

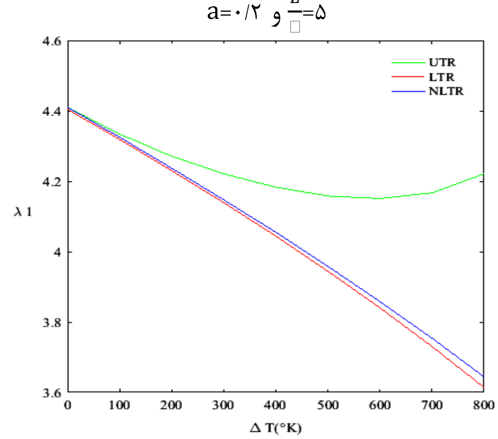
- افزایش در شاخص ماده (p) منجر به کاهش فرکانس می‌شود.
- فرکانس طبیعی هنگامی‌که تیر کوتاه‌تر یا ضخیم‌تر می‌شود میل به افزایش دارد.



شکل (۴): نمودار اثر ترکیب پارامترهای وینکلر و پاسترناک بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ساده، اختلاف دماهای مختلف، $\frac{L}{h}$=۵، a =۰/۲ و p=۰/۵

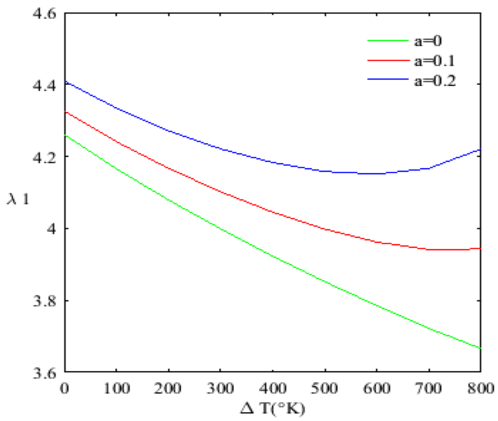


شکل (۵): نمودار اثر اختلاف دماهای مختلف بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ساده، $\frac{L}{h}$=۵ و a=۰/۲

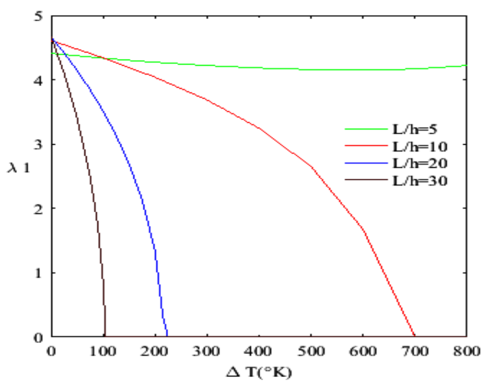


شکل (۷): نمودار اثر میدان حرارتی بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ثابت، اختلاف دماهای مختلف، $\frac{L}{h}$=۵، a=۰/۲ و p=۰/۵

- افزایش دما باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. این موضوع ناشی از کاهش صلبیت ماده است.
- فرکانس طبیعی برای افزایش دمای یکنواخت نسبت به افزایش دمای خطی و غیرخطی بزرگ‌تر است.
- برای یک توزیع یکنواخت تخلخل افزایش در تخلخل، باعث افزایش در فرکانس طبیعی می‌شود. اگرچه این روند برای مقادیر بالای شاخص گرادیان p عکس می‌شود. این رفتار وابسته به شاخص گرادیان p است.
- تغییرات سختی بستر الاستیک اثرات قابل‌توجهی روی فرکانس‌های طبیعی تیر می‌گذارد. افزایش در هر دو پارامتر الاستیک، سختی کل سیستم را افزایش داده و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.



شکل (۶): نمودار اثر شاخص تخلخل بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ثابت، اختلاف دماهای مختلف، $\frac{L}{h}$=۵ و p=۰/۵



شکل (۸): نمودار اثر نسبت لاغری بر روی فرکانس اصلی تیر متخلخل تابعی مدرج با تکیه‌گاه ثابت و اختلاف دماهای مختلف، a =۰/۲ وp=۰/۵

- روش عددی ارائه شده تطابق خوبی با روش‌های حل در مقالات دیگر دارد.

۹- مراجع

[1] Tomota Y, Kuroki K, Mori T, Tamura I. Tensile deformation of two-ductile-phase alloys: Flow curves of α-γ Fe-Cr-Ni alloys. Materials Science and Engineering. 1976;24(1):85-94.

[2] Koizumi M. FGM activities in Japan. Composites Part B: Engineering. 1997;28(1-2):1-4.

[3] Aydogdu M, Taskin V. Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Materials & design. 2007;28(5):1651-6.

[4] Benatta M, Mechab I, Tounsi A, Bedia EA. Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. Computational Materials Science. 2008;44(2):765-73.

[5] Ben-Oumrane S, Abedlouahed T, Ismail M, Mohamed BB, Mustapha M, El Abbas AB. A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al2O3 S-FGM thick beams. Computational Materials Science. 2009;44(4):1344-50.

[6] Sina S, Navazi H, Haddadpour H. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. Materials & Design. 2009;30(3):741-7.

[7] Şimşek M. Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. International Journal of Engineering and Applied Sciences. 2009;1(3):1-11.

[8] Kocatürk T, Şimşek M, Akbaş ŞD. Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko beam composed of functionally graded material. Science and Engineering of Composite Materials. 2011;18(1-2):21-34.

[9] Su H, Banerjee J, Cheung C. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. Composite Structures. 2013;106:854-62.

[10] Rezaiee-Pajand M, Hozhabrossadati SM. Analytical and numerical method for free vibration of double-axially functionally graded beams. Composite Structures. 2016;152:488-98.

[11] Ghayesh MH. Vibration analysis of shear-deformable AFG imperfect beams. Composite Structures. 2018;200:910-20.

[12] Yang J, Chen Y. Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. Composite Structures. 2008;83(1):48-60.

[13] Şimşek M, Kocatürk T. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. Composite Structures. 2009;90(4):465-73.

[14] Alshorbagy AE, Eltaher MA, Mahmoud F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. Applied Mathematical Modelling. 2011;35(1):412-25.

[15] Özütok A, Madenci E. Free vibration analysis of cross-ply laminated composite beams by mixed finite element formulation. International journal of structural stability and dynamics. 2013;13(02):1250056.

[16] Pradhan K, Chakraverty S. Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. Composites Part B: Engineering. 2013;51:175-84.

[17] Chakraborty A, Gopalakrishnan S, Reddy J. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. International journal of mechanical sciences. 2003;45(3):519-39.

[18] Li X-F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. Journal of Sound and vibration. 2008;318(4-5):1210-29.

[19] Wu H, Kitipornchai S, Yang J. Free vibration and buckling analysis of sandwich beams with functionally graded carbon nanotube-reinforced composite face sheets. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2015;15(07):1540011.

[20] Wen Y, Zeng Q. A high-order finite element formulation for vibration analysis of beam-type structures. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2009;9(04):649-60.

[21] Şimşek M. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. Nuclear Engineering and Design. 2010;240(4):697-705.

[22] Zhou D. A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation. Computers & structures. 1993;47(1):83-90.

[23] Eisenberger M. Vibration frequencies for beams on variable one-and two-parameter elastic foundations. Journal of Sound and Vibration. 1994;176(5):577-84.

[24] Matsunaga H. Vibration and buckling of deep beam-columns on two-parameter elastic foundations. Journal of sound and vibration. 1999;228(2):359-76.

[25] Chen C-N. DQEM vibration analyses of nonprismatic beams resting on elastic foundations. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2002;2(01):99-115.

[26] Malekzadeh P, Karami G. A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations. Applied Mathematical Modelling. 2008;32(7):1381-94.

[27] Ying J, Lü C, Chen W. Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. Composite Structures. 2008;84(3):209-19.

[28] Thai H-T, Vo TP. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. International journal of mechanical sciences. 2012;62(1):57-66.

[29] Aghazadeh R, Cigeroglu E, Dag S. Static and free vibration analyses of small-scale functionally graded beams possessing a variable length scale parameter using different beam theories. European Journal of Mechanics-A/Solids. 2014;46:1-11.

[30] Akbaş ŞD. Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation. Research on Engineering Structures and Materials. 2015;1(1):25-37.

[31] Pradhan S, Murmu T. Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. Journal of Sound and Vibration. 2009;321(1-2):342-62.

[32] Mahi A, Bedia EA, Tounsi A, Mechab I. An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions. Composite structures. 2010;92(8):1877-87.

[33] Shen H-S, Wang Z-X. Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments. International Journal of Mechanical Sciences. 2014;81:195-206.

[34] Trinh LC, Vo TP, Thai H-T, Nguyen T-K. An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads. Composites Part B: Engineering. 2016;100:152-63.

[35] El-Megharbel A. A theoretical analysis of functionally graded beam under thermal loading. World Journal of Engineering and Technology. 2016;4(3):437-49.

[36] Thom TT, Kien ND. Free vibration analysis of 2-D FGM beams in thermal environment based on a new third-order shear deformation theory. Vietnam Journal of Mechanics. 2018;40(2):121-40.

[37] Khor K, Gu Y. Effects of residual stress on the performance of plasma sprayed functionally graded ZrO2/NiCoCrAlY coatings. Materials Science and Engineering: A. 2000;277(1-2):64-76.

[38] Seifried S, Winterer M, Hahn H. Nanocrystalline gradient films through chemical vapor synthesis. Scripta materialia. 2001;44(8-9):2165-8.

[39] Watanabe Y, Eryu H, Matsuura K. Evaluation of three-dimensional orientation of Al3Ti platelet in Al-based functionally graded materials fabricated by a centrifugal casting technique. Acta Materialia. 2001;49(5):775-83.

[40] Song C, Xu Z, Li J. Structure of in situ Al/Si functionally graded materials by electromagnetic separation method. Materials & design. 2007;28(3):1012-5.

[41] Peng X, Yan M, Shi W. A new approach for the preparation of functionally graded materials via slip casting in a gradient magnetic field. Scripta materialia. 2007;56(10):907-9.

[42] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, Lee S. Fabrication of ZrO2–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. Materials chemistry and physics. 2001;68(1-3):130-5.

[43] Rezaei A, Saidi A. Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous–cellular plates. Composites Part B: Engineering. 2016;91:361-70.

[44] Boutahar L, Benamar R. A homogenization procedure for geometrically non-linear free vibration analysis of functionally graded annular plates with porosities, resting on elastic foundations. Ain Shams Engineering Journal. 2016;7(1):313-33.

[45] Wattanasakulpong N, Ungbhakorn V. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. Aerospace Science and Technology. 2014;32(1):111-20.

[46] Ebrahimi F, Mokhtari M. Transverse vibration analysis of rotating porous beam with functionally graded microstructure using the differential transform method. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2015;37(4):1435-44.

[47] Wattanasakulpong N, Chaikittiratana A. Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method. Meccanica. 2015;50(5):1331-42.

[48] Ait Atmane H, Tounsi A, Bernard F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 2017;13(1):71-84.

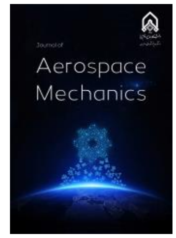
[49] Ebrahimi F, Zia M. Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded

Timoshenko beams with porosities. Acta Astronautica. 2015;116:117-25.
[50] Ebrahimi F, Salari E. Thermo-mechanical vibration analysis of nonlocal temperature-dependent FG nanobeams with various boundary conditions. Composites Part B: Engineering. 2015;78:272-90.
[51] Ebrahimi F, Jafari A. Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory. Struct Eng Mech. 2016;59(2):343-71.
[52] Bert CW, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review. 1996.
[53] Malekzadeh P, Heydarpour Y. Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment. Composite Structures. 2012;94(9):2971-81.
[54] Liang X, Wang Z, Wang L, Liu G. Semi-analytical solution for three-dimensional transient response of functionally graded annular plate on a two parameter viscoelastic foundation. Journal of Sound and Vibration. 2014;333(12):2649-63.
[55] Farid M, Zahedinejad P, Malekzadeh P. Three-dimensional temperature dependent free vibration analysis of functionally graded material curved panels resting on two-parameter elastic foundation using a hybrid semi-analytic, differential quadrature method. Materials & Design. 2010;31(1):2-13.
[56] Zahedinejad P. Free vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation in thermal environment. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2016;16(07):1550029.
[57] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. 1984.
[58] Kim Y-W. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. journal of sound and vibration. 2005;284(3-5):531-49.
[59] Ebrahimi F, Jafari A. A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. Journal of Engineering. 2016;2016.

Journal of Aerospace Mechanics/ 2022/ Vol.18/ No.1/183-199

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.1.12.0



Analysis of Free Vibrations of Functionally Graded Porous Beams on Elastic Foundation in Thermal Environment Using Differential Quadrature Method

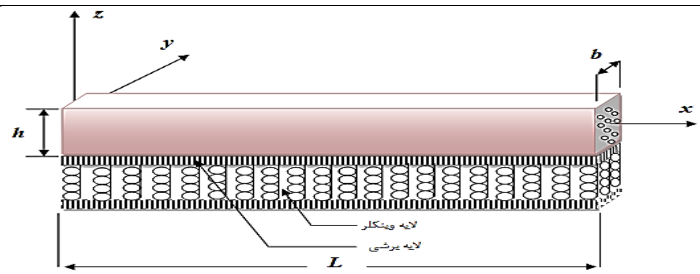
Mahdi Khakpour[1], Yousef Bazargan-Lari[2*], P. Zahedinejad[2], M. J. Kazemzadeh-Parsi[3]

[1] Ph.D. Student, Faculty of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Shiraz Branch, Shiraz, Iran
[2] Assistant Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Shiraz Branch, Shiraz, Iran
[2] Assistant Professor, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, North Texas University, Texas, USA
[3] Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Shiraz Branch, Shiraz, Iran

HIGHLIGHTS

- An increase in temperature causes a decrease in the natural frequency. This issue is caused by the reduction of material rigidity.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 3 July 2021
Received in revised form: 6 November 2021
Accepted: 7 November 2021
Available online: 10 January 2022
*Correspondence:
Bazarganlari@iaushiraz.ac.ir

How to cite this article:
M. Khakpour, Y. Bazargan-Lari, P. Zahedinejad, M. J. Kazemzadeh-Parsi. Analysis of free vibrations of functionally graded porous beams on elastic foundation in thermal environment using differential quadrature method. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; Vol 18(1):183-199.

ABSTRACT

In this paper, the free vibrations of functionally graded porous beams with simple boundary conditions on an elastic foundation in a thermal environment were studied using the theory of third-order shear deformation. The properties of the material are temperature dependent and continuously change in the direction of the thickness of the beam and according to the power law distribution of the volume fraction of the material constituents. The uniform porosity distribution at the cross section is examined. Hamilton's principle was used to obtain the governing equations of motion. In order to discretize these equations, the generalized differential quadrature method has been used. Here, the effect of various parameters such as heat field type, temperature difference, power law index, porosity volume fraction, slenderness ratio and elastic foundation parameters on the natural frequencies of a functionally graded porous beam was studied for simple boundary conditions. The results, in addition to showing these effects on the thermomechanical behavior of the beam, also confirm the accuracy of the numerical method used.

Keywords:
Free Vibration
Functionally Graded Porous Beams
Thermal Environment
Elastic Foundation
Differential Quadrature Method