مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۸/ شماره ۱/ صفحه ۲۱-۴۰

نشریه علمی مکانیک هوافضا

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.1.2.0

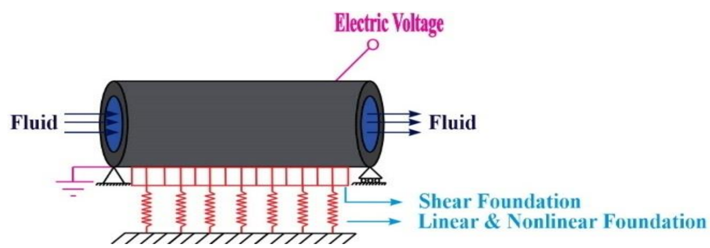
# پاسخ غیرخطی و پایداری نانولوله‌های فلکسوالکتریک حامل سیال تحت میدان دمایی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی

**ابراهیم محمودپور[1*]، علی پارسا[2]، محمد پارسا[2]**

[1] استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، واحد بروجرد، دانشگاه آزاد اسلامی، بروجرد، ایران

[2] کارشناسی ارشد، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد خرم‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، خرم‌آباد، ایران

## چکیده گرافیکی




## برجسته‌ها

- با افزایش ولتاژ، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند.
- با افزایش ضریب فلکسوالکتریک، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند.

## چکیده

در این مقاله روش مقیاس های چندگانه برای حل معادلات ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی نانولوله‌های فلکسوالکتریک حامل سیال لزج، تحت میدان دمایی واقع بر روی فونداسیون الاستیک غیرخطی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی ارائه شده است. با فرض تئوری تیر اولر- برنولی با تکیه‌گاه ساده و هندسه غیرخطی ون‌کارمن، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات غیرخطی استخراج شده است. یک ولتاژ الکتریکی به سطح بالای نانولوله اعمال می‌شود که شرایط میدان الکتریکی مدار بسته را ایجاد می‌کند. در پایان، اثر پارامترهای مختلف مانند تغییرات دما، ولتاژ الکتریکی و ... بر روی قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. همچنین، اثر ضریب فلکسوالکتریک بر رزنانس اولیه، زیرهارمونیک و فوق هارمونیک بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که ضریب فلکسوالکتریک باعث می شود که در رزنانس اولیه و فوق هارمونیک، در ابتدا سیستم رفتار سخت شونده از خود نشان می دهد و پدیده پرش کاملا مشخص است. اما با افزایش آن،  سیستم رفتار نرم شونده از خود نشان می دهد.

## مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۰۲

بازنگری: ۱۳۹۹/۱۲/۲۰

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۲۸

ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۲/۲۸

*نویسنده مسئول:

E.Mahmoudpour@iaub.ac.ir

کلید واژه ها:

ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی

نانولوله فلکسوالکتریک حامل سیال

میدان دمایی

## ۱- مقدمه

مسئله ارتعاشات و پایداری نانولوله‌های کربنی از اهمیت قابل‌توجهی برخوردار است و کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های

تجهیزات نانومقیاس از قبیل نانوفیبرها [۱]، نانوساختارها [۲]، نانوکامپوزیت‌ها [۳-۸] و نانومحرک‌ها [۹-۱۱] دارد.
برای بررسی ارتعاشات نانوساختارها، محققان از تئوری‌های مختلفی استفاده کرده‌اند. محققان زیادی با استفاده از تئوری غیرموضعی ارینگن رفتار نانوساختارها را بررسی کردند و برخی از محققان به این نتیجه رسیدند که برای پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار مکانیکی نانوساختارها بایستی تئوری غیرموضعی ارینگن را به تئوری گرادیان کرنش اضافه کرد که به آن تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی می‌گویند. آن‌ها دریافتند که با افزایش پارامتر غیرموضعی، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند ولی با افزایش پارامتر گرادیان کرنش، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند.
شوشتری و داستانی [۱۲]، ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانوصفحه تک‌لایه بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی را بررسی نمودند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر غیرموضعی، فرکانس نیز کاهش می‌یابد.
اتابخشیان و همکاران [۱۳]، ارتعاشات یک سیستم نانولوله کوپل شده هوشمند با یک جریان داخلی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی را بررسی نمودند. نتایج نشان می‌دهد که پایداری سیستم به‌شدت وابسته به پتانسیل الکتریکی است، به‌طوری‌که افزایش پتانسیل الکتریکی مثبت، به‌طور قابل‌توجهی پایداری سیستم را افزایش می‌دهد.
مهرالیان و همکاران [۱۴]، کالیبراسیون تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی را با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بر اساس ارتعاشات مقیاس کوچک نانولوله‌ها را بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر گرادیان کرنش، مقدار فرکانس افزایش می‌یابد.
مرجن و فرج‌پور [۱۵]، به بررسی مکانیک غیرخطی لوله‌های نانومقیاس با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر گرادیان کرنش، ماکزیمم دامنه ارتعاش نیز افزایش می‌یابد.
تغییرات درجه حرارت بر فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی جریان اثر به‌سزایی دارد. ضریب انبساط حرارتی برای دماهای بالا، مثبت در نظر گرفته می‌شود که این امر موجب کاهش فرکانس‌ها و سرعت جریان بحرانی می‌شود ولی برای دماهای پایین، منفی در نظر گرفته می‌شود که موجب افزایش فرکانس‌ها و سرعت جریان بحرانی می‌گردد.

لیانگ و همکاران [۱۶]، تأثیر دما بر روی فرکانس آزاد و کمانش میکروتیرها را بررسی نمودند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش دما باعث کاهش فرکانس‌ها می‌گردد و میزان کاهش فرکانس در شرایط مرزی ساده بیشتر از شرایط مرزی گیردار است.
رفیعی‌پور و همکاران [۱۷]، به بررسی تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند روی بستر الاستیک وینکلر- پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما، نسبت فرکانس‌ها افزایش می‌یابد که این افزایش در شرایط مرزی ساده نسبت به گیردار بیشتر است.
پوراشرف و انصاری [۱۸]، ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط‌های حرارتی با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی و غیرموضعی را بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که با کاهش اختلاف دما، ماکزیمم دامنه افزایش می‌یابد.
رمضان‌نژاد و کشاورزپور [۱۹]، به بررسی تحلیل رزونانس اولیه نانولوله کربنی تک‌لایه انحنادار روی بستر ویسکوالاستیک در محیط حرارتی تحت بار هارمونیک پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که کاهش تغییرات دما در وضعیت دمای بالا و پایین باعث کمتر و بیشتر شدن پرش در دامنه تحریک می‌شود.
فلکسوالکتریسیتی مربوط به پدیده کوپل الکترومکانیکی خاص بین پولاریزاسیون و گرادیان‌های کرنش است که با اعمال یک گرادیان کرنش به دی‌الکتریک‌ها می‌توان یک پولاریزاسیون الکتریکی با شکستن تقارن معکوس ایجاد کرد.
ابراهیمی و براتی [۲۰] اثرات سطح روی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های فلکسوالکتریک بر اساس تئوری غیرموضعی را بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که برای شرایط مرزی مختلف، مقدار فرکانس بدون بعد برای نانولوله‌های فلکسوالکتریک بیشتر از نانولوله‌های بدون اثر فلکسوالکتریک است.
براتی [۲۱]، ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های فلکسوالکتریک را موردبررسی قرار داد. برای مواد غیرپیزوالکتریک، الاستیسیته غیرموضعی با الاستیسیته سطحی می‌تواند به‌طور مؤثر برای بررسی رفتار مکانیکی نانوساختارها مورداستفاده قرار گیرد؛ اما در مورد نانوساختارهای پیزوالکتریک، یکی دیگر از واقعیت‌های مهم این است که اثر

فلکسوالکتریک باید برای تحلیل دقیق اندازه آن‌ها در نظر گرفته شود. فلکسوالکتریسیتی در نانوساختارهای پیزوالکتریک را می‌توان به‌عنوان کوپل پولاریزاسیون الکتریکی گرادیان کرنش تفسیر کرد.

یک نانوسیال که در یک نانولوله کربنی جریان دارد تمایل دارد که نانولوله را از حالت مستقیم خارج کند و به‌طور هم‌زمان مودهای ارتعاش عرضی نانولوله کربنی را تحریک کند. همان‌طور که سرعت جریان افزایش می‌یابد، نانولوله کربنی انعطاف‌پذیرتر می‌شود و فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. جریان سیال اساساً یک عامل مؤثر در کاهش فرکانس طبیعی است.

وانگ و نی [۲۲]، ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌های کربنی حامل سیال را بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که مود کوپل شده فلاتر در سرعت جریان بالاتر رخ می‌دهد.

رشیدی و همکاران [۲۳]، مدل جدیدی برای ارتعاشات نانولوله‌های حامل نانوجریان را بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد نادسن، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند و پدیده دیورژانس زودتر رخ می‌دهد که این امر باعث کم کردن محدوده پایداری است.

حسینی و زندی [۲۴]، به تحلیل استاتیکی و دینامیکی نانولوله حامل سیال تحت تحریک الکترواستاتیک پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش سرعت، جابه‌جایی استاتیکی نانولوله حامل سیال افزایش می‌یابد.

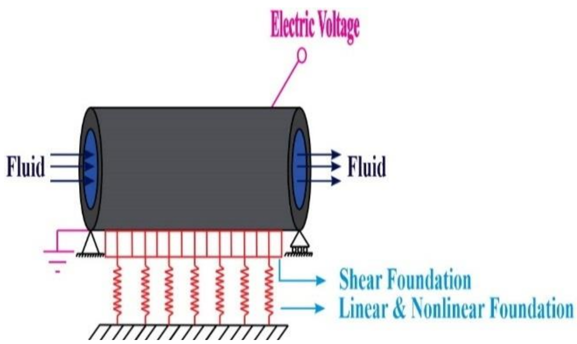
قربان‌پور آرانی و همکاران [۲۵]، به تحلیل ارتعاشات غیرموضعی غیرخطی نانولوله کربنی دوجداره حامل سیال با استفاده از مدل پوسته پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش مدول برشی، نسبت فرکانس‌ها افزایش می‌یابد و پدیده دیورژانس دیرتر رخ می‌دهد.

خدامی و همکاران [۲۶]، به بررسی ارتعاشات غیرموضعی و ناپایداری نانولوله نیترید- بورن دوجداره حامل سیال لزج پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر غیرموضعی، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند.

در پژوهش‌های گوناگونی ارتعاشات نانولوله‌های حامل سیال بررسی شده‌اند همچنین به نانوتیرهای فلکسوالکتریک هم پرداخته شده است ولی تابه‌حال ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های فلکسوالکتریک حامل سیال تحت میدان دمایی واقع بر روی فونداسیون الاستیک غیرخطی با تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی بررسی نشده است. در این مقاله، از روش بالانس هارمونیک برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرخطی یک نانولوله فلکسوالکتریک حامل سیال تحت میدان دمایی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی استفاده شده است. یک ولتاژ الکتریکی به سطح بالای نانولوله اعمال شده است که یک شرایط میدان الکتریکی مداربسته را معرفی می‌کند. فلکسوالکتریسیتی، تأثیر زیادی بر رفتار ارتعاشی نانولوله‌های پیزوالکتریک دارد. همچنین به بررسی اثر پارامترهایی همچون ماکزیمم دامنه ارتعاش، تغییرات دما، اثر فلکسوالکتریک، پارامتر گرادیان کرنش، پارامتر غیرموضعی و عدد نادسن بر روی قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و بررسی پدیده‌های دیورژانس و فلاتر در نانولوله‌های فلکسوالکتریک حامل سیال پرداخته شده است.

## ۲- معادلات حاکم

شکل ۱ یک نانولوله فلکسوالکتریک حامل سیال واقع بر روی فونداسیون الاستیک غیرخطی را نشان می‌دهد. نانولوله دارای طول L، سطح مقطع A، ممان اینرسی I، چگالی ρ و مدول یانگ E می‌باشد.




**شکل ۱:** یک نانولوله فلکسوالکتریک حامل سیال واقع بر روی فونداسیون الاستیک غیرخطی.

روابط تعادل تیر اولر- برنولی به‌صورت زیر هستند [۲۷]:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+f(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۲)$$

که در آن $I_0$ اینرسی محوری بوده و $f(x,t)$ برآیند بارگذاری جانبی، تغییرات مومنتوم ناشی از حرکت سیال و فونداسیون الاستیک می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{ext}=f_0 Cos(\Omega t) \quad (۳\text{- الف})$$

$$f_{fluid}=m_f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\left(VCF.u_{avg,no-slip}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\left(VCF.u_{avg,no-slip}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (۳\text{- ب})$$

$$f_{foundation}=K_L w+K_{NL}w^3-K_S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۳\text{- پ})$$

$$I_0=\rho A \quad (۳\text{- ت})$$

که در آن $m_f$ جرم واحد طول سیال است. $u_{avg,slip}$ و $u_{avg,no-slip}$ به ترتیب، سرعت میانگین سیال با شرایط مرزی لغزشی و بدون لغزشی هستند. VCF ضریب تصحیح سرعت است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$VCF=\frac{u_{avg,slip}}{u_{avg,no-slip}}=(1+a_k.kn)(4.\left(\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\right).\left(\frac{kn}{kn+1}\right)+1) \quad (۴)$$

که در آن kn عدد نادسن و $\sigma_v=0.7$ ضریب تطابق مومنتم مماسی است. $a_k$ یک ضریبی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$a_k=\frac{2}{\pi}a_0(tan^{-1}(a_1.kn^B)) \quad (۵)$$

که در آن $a_1=4$ و $B=0.4$ پارامترهای تجربی هستند و $a_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$a_0=\frac{64}{3\pi(1-4/b)} \quad (۶)$$

که در آن $b=-1$ یک ضریب لغزشی کلی می‌باشد.

براتی [۲۱]، نشان داد که مؤلفه تنش محوری در تیر فلکسوالکتریک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{xx}=\alpha_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)-\alpha_2 V+\left(\alpha_3-\alpha_4\left(\frac{e^{\lambda z}+e^{-\lambda z}}{e^{\frac{h}{2}\lambda}-e^{-\frac{h}{2}\lambda}}\right)+\alpha_5\left(\frac{e^{\lambda z}-e^{-\lambda z}}{e^{\frac{h}{2}\lambda}-e^{-\frac{h}{2}\lambda}}\right)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۷)$$

که در آن:

$$\alpha_1=\left(E-\frac{{d_{31}}^2\kappa}{1+a_{33}\kappa}\right)I \quad (۸\text{-الف})$$

$$\alpha_2=\frac{d_{31}}{a_{33}} \quad (۸\text{-ب})$$

$$\alpha_3=\frac{d_{31}f_{31}b}{a_{33}} \quad (۸\text{-پ})$$

$$\alpha_4=\frac{d_{31}f_{31}b^2}{2\lambda b_{33}} \quad (۸\text{-ت})$$

$$\alpha_5=\frac{{f_{31}}^2 b^2}{2b_{33}} \quad (۸\text{-ث})$$

که در آن $\lambda=\sqrt{(1+a_{33}\kappa)/b_{33}\kappa}$ و V ولتاژ الکتریکی است. b قطر نانولوله است که برابر با $2R_o$ است. که در آن $\kappa=\kappa_0\kappa_b$. در اینجا، ضریب نفوذ هوا و زمینه به ترتیب $\kappa_0=8.85\times10^{-12}CV^{-1}m^{-1}$ و $\kappa_b=6.62$ هستند.

از آنجایی‌که تغییرات اینرسی محوری ناچیز است بنابراین می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. حال معادله‌های (۱) و (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}=0 \quad \rightarrow \quad N_{xx}=Constant \quad (۹)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+f(x,t)+N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۱۰)$$

طبق معادله (۷)، مؤلفه‌های نیروی محوری و گشتاور خمشی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$N_{xx}=\int\int_A \sigma_{xx}\,dA=\alpha_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)b \quad (۱۱)$$

$$-\alpha_2(Vb)+\frac{f_{31}d_{31}b}{a_{33}(1+a_{33}\kappa)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$M_{xx}=\int\int_A z\sigma_{xx}\,dA=\alpha_1 I\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{{f_{31}}^2 b}{a_{33}(1+a_{33}\kappa)}-\frac{{f_{31}}^2 b^2}{2\lambda b_{33}}\left(\frac{e^{\lambda\frac{h}{2}}+e^{-\lambda\frac{h}{2}}}{e^{\lambda\frac{h}{2}}-e^{-\lambda\frac{h}{2}}}\right)+\frac{b_{33}{d_{31}}^2 b\kappa^2}{(1+a_{33}\kappa)^2}\qquad (۱۲)$$

## ۲-۱- تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش غیرموضعی

بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی، معادله ساختاری در نانوساختارها به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M^{NSG}=\left(1-{L_s}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M^L\qquad (۱۳)$$

که بالانویس‌های L و NSG به ترتیب معرف تئوری محلی و غیرموضعی گرادیان می‌باشند. می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$M^{NSG}=\mu^2\frac{\partial^2 M^{NSG}}{\partial x^2}+\left(1-{L_s}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M^L\qquad (۱۴)$$

با استفاده از معادله (۱۰)، می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 M^{NSG}}{\partial x^2}=-f(x,t)-N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\qquad (۱۵)$$

با جایگزینی معادله (۱۵) در معادله (۱۴) می‌توان نوشت:

$$M^{NSG}=\mu^2\left(-f(x,t)-N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\left(1-{L_s}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M^L\qquad (۱۶)$$

که در آن $M^L$ گشتاور موضعی است.

می‌توان کشش غیرخطی $N_{xx}$ را بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی گرادیان کرنش به‌صورت زیر بازنویسی نمود [۲۹]:

$$N_{xx}=\left(\frac{EA-\left(\frac{A\kappa {d_{31}}^2}{1+a_{33}\kappa}\right)}{L}\right)\left(\int_0^L\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-L_s^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right)\right\}dx\right)-\frac{bd_{31}}{a_{33}}V\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\qquad (۱۷)$$

برای افزودن اثر دما می‌توان به صورت زیر عمل کرد [۲۱]:

$$N_{th}=\left(EA-\left(\frac{A\kappa {d_{31}}^2}{1+a_{33}\kappa}\right)\right)\left(\frac{\alpha\Delta T}{1-\nu}\right)\qquad (۱۸)$$

که در آن $\alpha=10\times10^{-6}$ ضریب انبساط حرارتی و $\Delta T$ تغییرات دما می‌باشد.

با جایگزینی معادله (۱۶) در معادله (۱۰)، معادله ارتعاشات آزاد غیرخطی نانولوله فلکسوالکتریک حامل سیال تحت میدان دمایی واقع بر روی فونداسیون الاستیک غیرخطی به دست می‌آید:

$$\left(1-{L_s}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D^*\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left\{\frac{bd_{31}}{a_{33}}V\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+K_L w+K_{NL}w^3-K_S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_{th}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+m_f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\left(VCF.u_{avg,no-slip}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\left(VCF.u_{avg,no-slip}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{EA-\left(\frac{A\kappa {d_{31}}^2}{1+a_{33}\kappa}\right)}{L}\right)\left(\int_0^L\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-L_s^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right)\right\}dx\right)+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-F(x,t)\right\}=0\qquad (۱۹)$$

که در آن:

$$D^* = \left(E - \frac{{d_{31}}^2\kappa}{(1+a_{33}\kappa)}\right)(I) - \frac{{f_{31}}^2 b^2}{a_{33}(1+a_{33}\kappa)} - \frac{{f_{31}}^2 b^3}{2\lambda b_{33}}\left(\frac{e^{\lambda\frac{h}{2}}+e^{-\lambda\frac{h}{2}}}{e^{\lambda\frac{h}{2}}-e^{-\lambda\frac{h}{2}}}\right) + \frac{b_{33}{d_{31}}^2\kappa^2 b^2}{(1+a_{33}\kappa)^2} \quad (۲۰)$$

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرخطی نانوتیر مدل اولر- برنولی، ارتعاشات آزاد جسم بررسی می‌گردد؛ لذا از ترم $F(x,t)$ در معادله (۱۹) که همان بارگذاری خارجی می‌باشد صرف‌نظر می‌گردد.

برای ساده‌سازی تحلیل، پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$V_{avg} = \sqrt{\frac{m_f}{EI}}.L.u_{avg,no-slip} \quad (۲۱\text{-الف})$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{m_f+m_c}{EI}}.L^2.\omega \quad (۲۱\text{-ب})$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{L} \quad (۲۱\text{-پ})$$

$$L_S{}^* = \frac{L_s}{L} \quad (۲۱\text{-ت})$$

$$K_L{}^* = \frac{K_L.L^4}{EI} \quad (۲۱\text{-ث})$$

$$K_{NL}{}^* = \frac{K_{NL}.r^2.L^4}{EI} \quad (۲۱\text{-ج})$$

$$K_S{}^* = \frac{K_S.L^2}{EI} \quad (۲۱\text{-چ})$$

شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی برای نانولوله با تکیه‌گاه ساده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۳۰]:

$$w(x,t)_{x=0} = 0\ ,\ \left\{\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\}_{x=0} = 0 \ \text{:کلاسیک} \quad (۲۲\text{-الف})$$

$$w(x,t)_{x=L} = 0\ ,\ \left\{\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\}_{x=L} = 0 \ \text{:کلاسیک} \quad (۲۲\text{-ب})$$

$$\left\{\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\}_{x=0} = 0\ ,\left\{\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right\}_{x=L} = 0 \ \text{:غیرکلاسیک} \quad (۲۳)$$

## ۳- روش حل

با استفاده از روش گالرکین معادله دیفرانسیل پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. برای این منظور خیزتیر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۱].

$$w(x,t) = q(t).\emptyset(x) \quad (۲۴)$$

که $\emptyset(x)$ شکل مود تیر و $q(t)$ تابع زمانی مجهول می‌باشد. حال با استفاده از روش گالرکین و جاگذاری رابطه (۲۴) در معادله (۱۹) و ضرب معادله حاصل در $\emptyset(x)$ و انتگرال‌گیری در طول تیر، معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$\ddot{q}(t) + \beta^2 q(t) + \tilde{\beta}_3 q^3(t) = \tilde{f}\cos(\Omega t) \quad (۲۵)$$

### ۳-۱- روش مقیاس‌های چندگانه

برای بررسی پاسخ سیستم از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود. به همین خاطر پس از تغیر متغیرهای $\tilde{f} = \varepsilon f$ و $\tilde{\beta}_3 = \varepsilon\beta_3$ (که $\varepsilon$ یک پارامتر بدون بعد کوچک می‌باشد) معادله (۲۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [۳۲].

$$\ddot{q}(t) + \beta^2 q(t) + \varepsilon\beta_3 q^3(t) = \varepsilon f\cos(\Omega t) \quad (۲۶)$$

حال با توجه به روش مقیاس‌های چندگانه، مقیاس‌های زمانی $T_n$ به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad n = 1,2,3 \quad (۲۷)$$

با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای می‌توان نوشت [۳۲]:

$$\frac{d}{dt} = D_\circ + \varepsilon D_1 \quad (۲۸)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_\circ^2 + 2\varepsilon D_\circ D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_\circ D_2) \quad (۲۹)$$

که $D_n = \partial/\partial T_n \quad n = 1,2,3$ می‌باشد. با توجه به تکنیک اغتشاشات و با استفاده از بسط پوانکاره، می‌توان پاسخ سیستم را به صورت زیر نوشت:

$$q(t;\varepsilon) = q_0(T_\circ,T_1,T_2) + \varepsilon q_1(T_\circ,T_1,T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_\circ,T_1,T_2) \quad (۳۰)$$

با جاگذاری روابط (۲۷) تا (۳۰) در معادله (۲۶) و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مشابه ε روابط زیر به دست می‌آید:

$$D_\circ^2 q_0 + \beta^2 q_0 = 0 \tag{۳۱}$$

$$D_\circ^2 q_1 + \beta^2 q_1 = -2D_\circ D_1 q_0 - \beta_3 {q_0}^3 + f cos(\Omega T_\circ) \tag{۳۲}$$

معادله (۳۱) یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم بوده که حل همگن آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$q_0(t) = A(T_1)\exp(i\beta T_\circ) + \bar{A}(T_\circ)\exp(i\beta T_\circ) \tag{۳۳}$$

که $\bar{A}$ مزدوج مختلط می‌باشد.

### ۳-۲- ارتعاشات آزاد

با صرف‌نظر از بارگذاری خارجی $(f = 0)$ و جاگذاری $q_0(t)$ در معادله (۳۲) دامنه پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q(t) = \mathrm{a} \times \cos\left(\beta t + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 t\right) + \frac{1}{32}\varepsilon a^3 \cos(3\beta t + \frac{9}{8}\varepsilon a^2 t) \tag{۳۴}$$

که $\omega_{nl} = \sqrt{\beta + \frac{3}{8}\varepsilon a^2}$ فرکانس‌های غیرخطی سیستم می‌باشند.

### ۳-۳- ارتعاشات اجباری

#### ۳-۳-۱- رزنانس اولیه

در رزنانس اولیه فرض می‌شود که فرکانس تحریک نزدیک فرکانس طبیعی خطی سیستم است. به همین خاطر فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\Omega = \beta + \varepsilon\sigma \tag{۳۵}$$

که σ پارامتر انحرافی می‌باشد. با جاگذاری روابط (۳۵) و (۳۳) در معادله (۳۲) و برابر صفر قرار دادن ترم‌های سکولار رابطه (۳۶) به‌دست می آید.

$$-2i\beta D_1 A - 3\beta_3 A^2 \bar{A} + \frac{f}{2}\exp(i\sigma T_1) = 0 \tag{۳۶}$$

معادله (۳۶) یک معادله دیفرانسیل در فرم مختلط می‌باشد. بدین منظور A به صورت قطبی معرفی می‌شود.

$$A(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1)\exp(i\varphi(T_1)) \tag{۳۷}$$

که a وφ توابع حقیقی از $T_1$ می‌باشند. با جاگذاری رابطه (۳۷) در معادله (۳۶) و جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی، دستگاه معادلات (۳۸) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dT_1} = \dfrac{f}{2\beta}\sin(\sigma T_1 - \varphi) \\ \dfrac{d\varphi}{dT_1} = \dfrac{3\beta_3 a^2}{8\beta} - \dfrac{f}{2a\beta}\cos(\sigma T_1 - \varphi) \end{cases} \tag{۳۸}$$

با معرفی متغیر $\Psi = \sigma T_1 - \varphi$ دستگاه معادلات (۳۸) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dT_1} = \dfrac{f}{2\beta}\sin(\Psi) \\ \dfrac{d\varphi}{dT_1} = \sigma - \dfrac{3\beta_3 a^2}{8\beta} - \dfrac{f}{2a\beta}\cos(\Psi) \end{cases} \tag{۳۹}$$

با فرض شرایط پایدار یعنی $da/dT_1 = d\Psi/dT_1 = 0$ و حذف Ψ در دستگاه معادلات (۳۹) پاسخ فرکانسی سیستم به دست می آید:

$$(\frac{3\beta_3 a^2}{8\beta} - \sigma)^2 = (\frac{f}{2a\beta})^2 \tag{۴۰}$$

#### ۳-۳-۲- رزنانس فوق هارمونیک

در حالت سوپرهارمونیک فرکانس تحریک حدود، یک‌سوم فرکانس طبیعی خطی سیستم می‌باشد.

$$3\Omega = \beta + \varepsilon\sigma \tag{۴۱}$$

با استفاده از روش مشابه برای حالت رزنانس اولیه، پاسخ فرکانسی نانوتیر فلکسوالکتریک حامل سیال در حالت سوپرهارمونیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\sigma - \frac{3\beta_3 a^2}{8\beta} - \frac{3\beta_3 \lambda^2}{\beta})^2 = (\frac{\beta_3 \lambda^3}{a\beta})^2 \tag{۴۲}$$

که $\lambda = 1/(2(1-\Omega^2))$ می‌باشد.

### ۳-۳-۳- رزنانس زیرهارمونیک

در حالت زیرهارمونیک فرکانس تحریک حدود سه برابر فرکانس طبیعی خطی سیستم است.

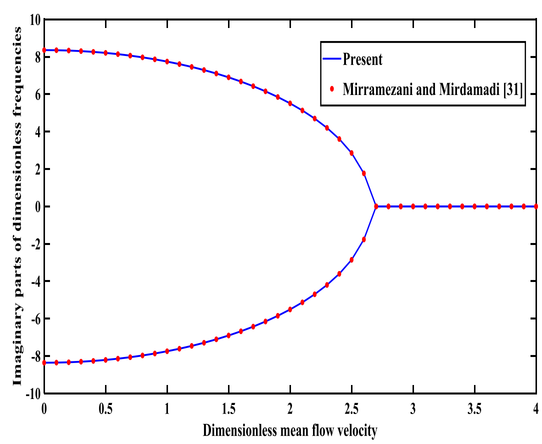
$$\Omega = 3\beta + \varepsilon\sigma \tag{۴۳}$$

با استفاده از روش مشابه برای حالت رزنانس اولیه، پاسخ فرکانسی در حالت زیر هارمونیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\sigma - \frac{9\beta_3 a^2}{8\beta} - \frac{9\beta_3 \lambda^2}{\beta})^2 = (\frac{9\beta_3 \lambda a}{4})^2 \tag{۴۴}$$

## ۴- اعتبارسنجی

نتایج مقایسه فرکانس طبیعی یک نانولوله کربنی حامل سیال در پژوهش حاضر به‌منظور اعتبارسنجی با نتایج میرمضانی و میردامادی [۳۳] در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع [۳۳] با یکدیگر مطابقت بسیار خوبی دارند.




**شکل ۲:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله کربنی حامل سیال
$(\mu^* = 0.2, \mathrm{Kn} = 0)$

## ۵- نتایج و بحث

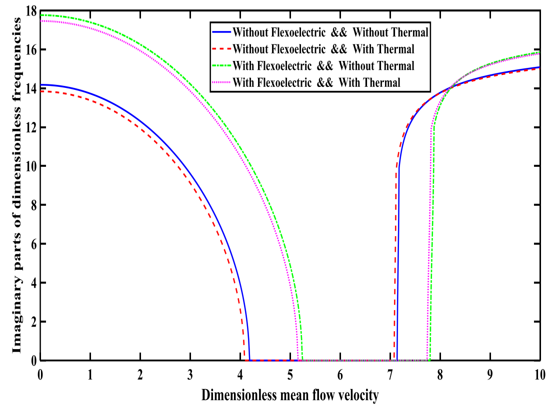
به‌دلیل وجود ترم سیال، فرکانس‌ها دارای دو قسمت حقیقی و موهومی خواهند بود که قسمت موهومی فرکانس‌ها، همان فرکانس‌های طبیعی و قسمت حقیقی فرکانس‌ها همان فرکانس‌های میرایی هستند و تابع سرعت سیال داخل نانولوله می‌باشند. با افزایش سرعت سیال، فرکانس‌های طبیعی کم شده تا به صفر می‌رسند که اصطلاحاً سیستم دچار ناپایداری دیورژانس می‌گردد. در این لحظه، یک ناپایداری ساختاری استاتیکی اتفاق افتاده که ناپایداری کمانشی نام دارد و به‌موجب آن نانولوله ارتعاش نخواهد کرد و دچار ناپایداری استاتیکی می‌شود، سپس با افزایش بیشتر سرعت سیال، نانولوله دچار ناپایداری دینامیکی می‌شود که به آن پدیده فلاتر گویند که این حالت در اثر کوپل شدن، مود اول و دوم به هم، رخ می‌دهد.

نانولوله فلکسوالکتریک ساخته شده از $\mathrm{BaTiO_3}$ دارای خواص $c_{11} = 167.55 \times 10^9 \mathrm{Pa}$، $L = 20 \times b$ و چگالی $\rho = 6.02 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$، $h = 0.34 \times 10^{-9} \mathrm{m}$، $R_i = 2.9 \times 10^{-9} \mathrm{m}$ می‌باشد [۲۱و ۳۴].

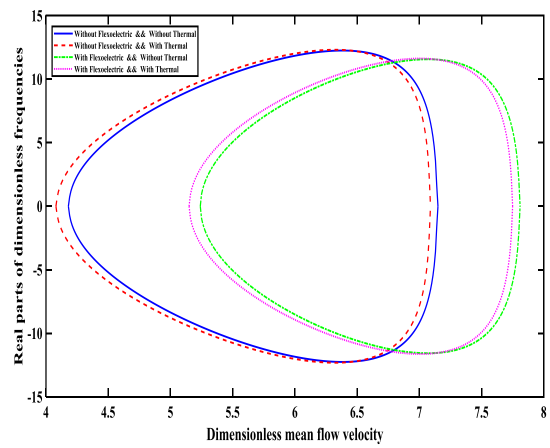
ضرایب دی‌الکتریک و پیزوالکتریک عبارت‌اند از $d_{31} = 3.5 \times 10^8 \,\mathrm{v/m}$، $a_{33} = 0.79 \times 10^8 \,\mathrm{vm/C}$، $b_{33} = 1 \times 10^{-9} \,\mathrm{Jm^3/C^2}$. ضریب فلکسوالکتریک $f_{31} = 1 - 10 \,\mathrm{v}$ می‌باشد. چگالی سیال و عدد نادسن $\rho_f = 0.79 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$ و $\mathrm{Kn} = 0.01$ می‌باشند.

### ۵-۱- تأثیر ضریب فلکسوالکتریک و حرارت بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس غیرخطی بدون بعد با اثرات فلکسوالکتریک و حرارت در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است.



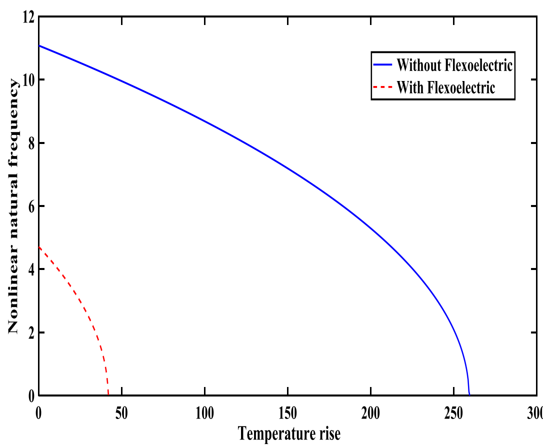

**شکل ۳:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای اثرات فلکسوالکتریک و حرارت.




**شکل ۴:** قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای اثرات فلکسوالکتریک و حرارت.

همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود زمانی که نانولوله بدون اثرات فلکسوالکتریک و حرارت است نسبت به زمانی که فقط دارای اثر حرارت است دارای فرکانس غیرخطی بدون بعد بیشتری است این بدان معنی است که با اضافه کردن اثر حرارت، سختی نانولوله کمتر شده و نانولوله دچار کاهش فرکانس‌ها و سرعت بحرانی می‌شود که در نهایت موجب کاهش محدوده پایداری می‌شود. حال با افزودن تنها اثر فلکسوالکتریک می‌توان شاهد بیشترین فرکانس غیرخطی بدون بعد بود ولی بازهم با افزودن اثر حرارت می‌توان شاهد کاهش فرکانس بود که این بدان معنی است که با افزودن اثر فلکسوالکتریک می‌توان بیشترین مقدار فرکانس را نسبت به زمانی که اثر فلکسوالکتریک لحاظ نمی‌شود را داشت. در واقع با افزودن اثر فلکسوالکتریک سختی سازه بیشتر شده که با این کار می‌توان محدوده پایداری را بزرگ‌تر کرد ولی با افزودن دما، مقدار فرکانس و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

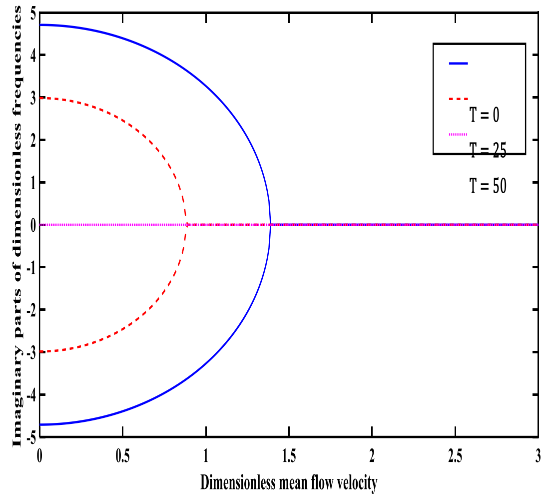
باید توجه داشت که با افزایش دما، فرکانس‌های غیرخطی کاهش می‌یابند و این افزایش دما بایستی تا جایی صورت گیرد که کمانش حرارتی رخ ندهد، به همین دلیل در شکل ۵ به این موضوع پرداخته شده است.



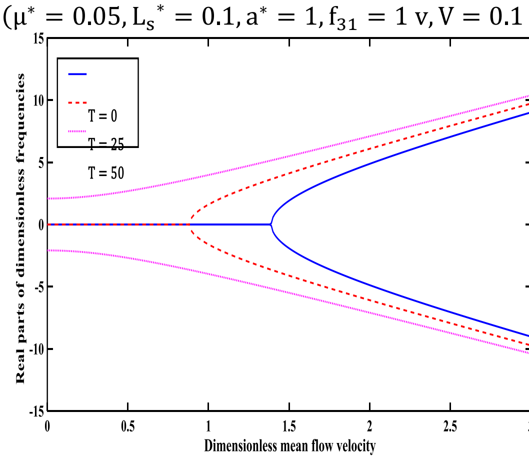

**شکل ۵:** فرکانس‌های طبیعی غیرخطی بدون بعد نانولوله با و بدون اثر فلکسوالکتریک با افزایش دما

$(\mu^* = 0.05, L_s{}^* = 0.1, a^* = 1, f_{31} = 1\ v, V = 0.1\ v)$

همان‌طور که در شکل ۵ دیده می‌شود برای نانولوله بدون فلکسوالکتریک برای مقادیر تغییرات دمای بالاتر از °۲۵۹/۷۵ پدیده کمانش حرارتی رخ می‌دهد و برای نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر تغییرات دمای بالاتر از°۴۲ پدیده کمانش حرارتی رخ می‌دهد که در این پژوهش برای تمامی نتایج برای جلوگیری از این اتفاق تغییرات دما کمتر از °۴۲ در نظر گرفته شده است.




**شکل ۶:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف تغییرات دما
$(\mu^* = 0.05, L_s{}^* = 0.1, a^* = 1, f_{31} = 1\ v, V = 0.1\ v)$

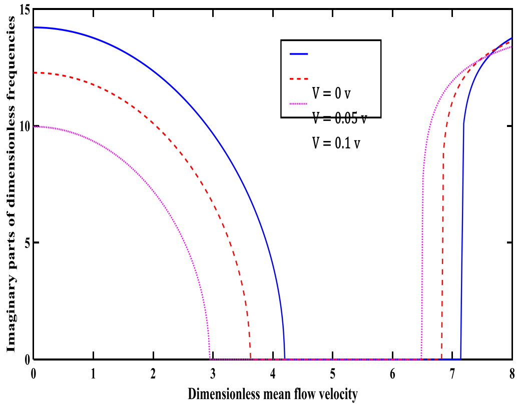



**شکل ۷:** قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف تغییرات دما.

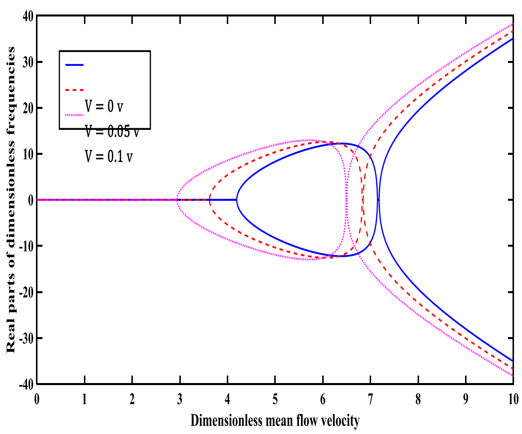
شکل‌های ۶ و ۷ اثر تغییرات دما بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود با افزایش تغییرات دما، فرکانس‌های غیرخطی کاهش می‌یابند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود. برای مقادیر تغییرات دمای بالاتر از ۴۲° پدیده کمانش حرارتی رخ می‌دهد و همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود برای مقادیر بالاتر از ۴۲° اثر پدیده ناپایداری دیورژانس از بین می‌رود.

## ۵-۲- تأثیر ولتاژ الکتریکی بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات ولتاژ الکتریکی در شکل‌های ۸ و ۹ نمایش داده شده است.




**شکل ۸:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ولتاژ الکتریکی
$(\mu^* = 0.05, L_s{}^* = 0.1, a^* = 1, f_{31} = 1\ v, \Delta T = 20\ )$

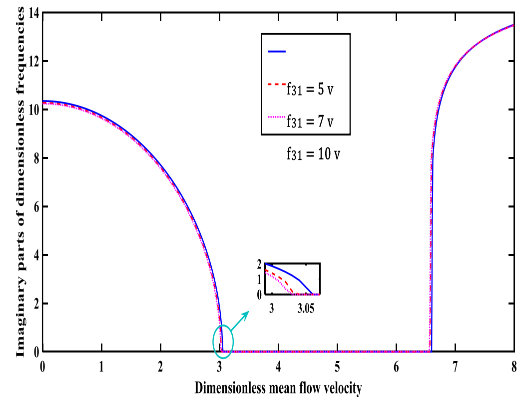



**شکل ۹:** قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ولتاژ الکتریکی.

شکل‌های ۸ و ۹ اثر ولتاژ الکتریکی بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود با افزایش ولتاژ الکتریکی، فرکانس و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.
می‌توان با اعمال ولتاژ الکتریکی به نانولوله فلکسوالکتریک، مقدار فرکانس‌ها را تنظیم کرد، بدین صورت که با زیاد کردن ولتاژ، می‌توان باعث کاهش فرکانس‌ها شد.

## ۵-۳- تأثیر ضریب فلکسوالکتریک بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات ضریب فلکسوالکتریک در شکل ۱۰ نمایش داده شده است.

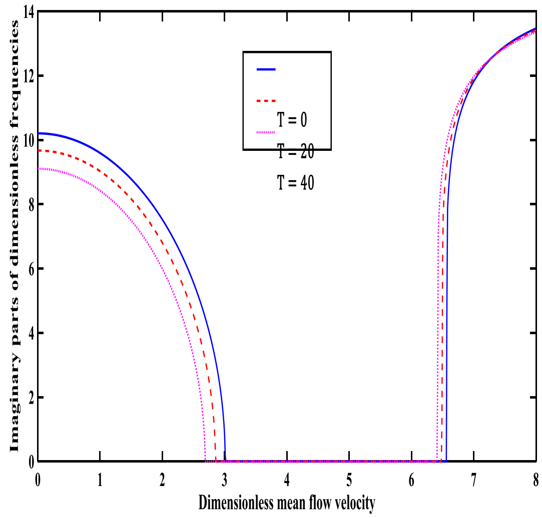



**شکل ۱۰:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

شکل ۱۰ اثر ضریب فلکسوالکتریک بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۰ دیده می‌شود با افزایش ضریب فلکسوالکتریک، فرکانس و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

## ۵-۴- تأثیر تغییرات دما بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات دما در شکل ۱۱ نمایش داده شده است.



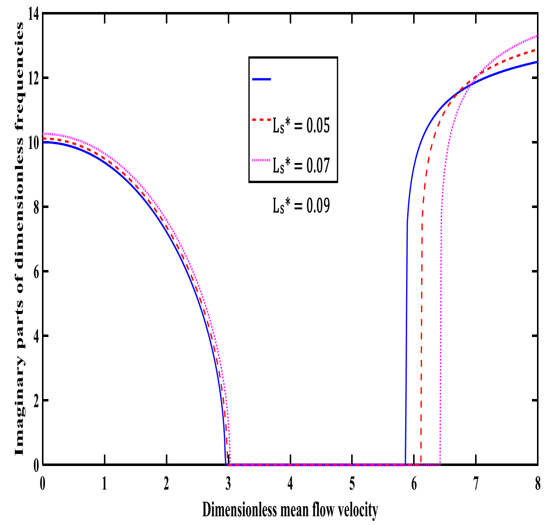

**شکل ۱۱:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف دما
$(\mu^* = 0.05, L_s{}^* = 0.1, a^* = 1, f_{31} = 1\ v, V = 0.1\ v)$

شکل ۱۱ اثر تغییرات دما بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۱ دیده می‌شود با افزایش تغییرات دما، فرکانس و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود. با افزایش دما، سختی نانولوله تحت بارگذاری حرارتی کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش فرکانس می‌گردد.

## ۵-۵- تأثیر تغییرات پارامتر گرادیان کرنش بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات پارامتر گرادیان کرنش در شکل ۱۲ نمایش داده شده است.

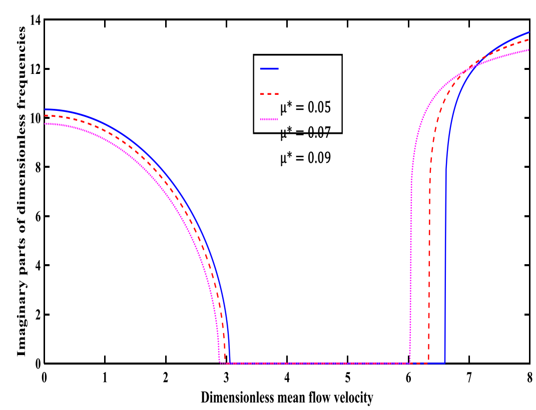
شکل ۱۲ اثر تغییرات پارامتر گرادیان کرنش بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۲ دیده می‌شود با افزایش پارامتر گرادیان کرنش، فرکانس و سرعت بحرانی افزایش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر دیرتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری بزرگ‌تر می‌شود.




**شکل ۱۲:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف پارامتر گرادیان کرنش ($\mu^* = 0.05, a^* = 1, f_{31} = 5\ \mathrm{v}, V = 0.1\ \mathrm{v}, \Delta T = 20$)

## ۵-۶- تأثیر تغییرات پارامتر غیرموضعی بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات پارامتر غیرموضعی در شکل ۱۳ نمایش داده شده است.

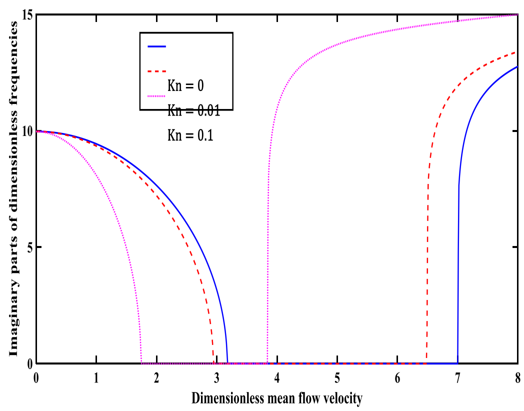



**شکل ۱۳:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر پارامتر غیرموضعی ($L_s^* = 0.1, a^* = 1, f_{31} = 1\ \mathrm{v}, V = 0.1\ \mathrm{v}$)

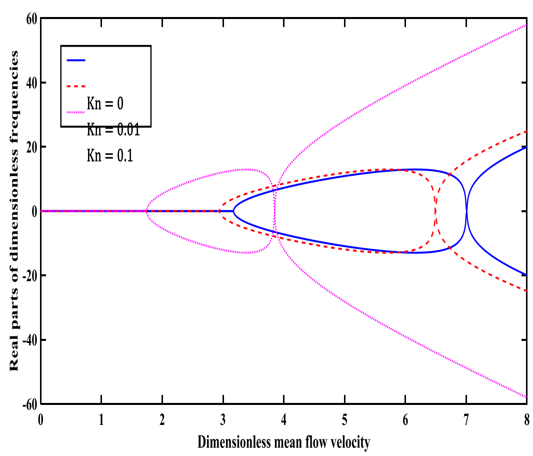
شکل ۱۳ اثر تغییرات پارامتر غیرموضعی بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۳ دیده می‌شود با افزایش پارامتر غیرموضعی، فرکانس و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود. این به این دلیل است که افزایش پارامتر غیرموضعی باعث کاهش نیروی متقابل بین اتم‌های نانولوله فلکسوالکتریک می‌شود و منجر به ساختار نرم‌تر می‌شود.

## ۵-۷- تأثیر تغییرات عدد نادسن بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات عدد نادسن در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نمایش داده شده است.




**شکل ۱۴:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف عدد نادسن.



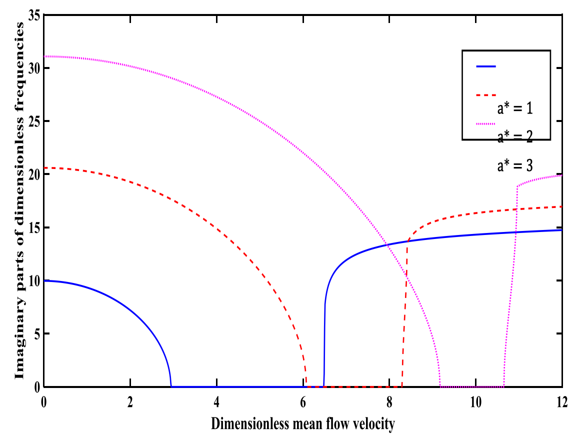

**شکل ۱۵:** قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف عدد نادسن.

شکل‌های ۱۴ و ۱۵ اثر تغییرات عدد نادسن بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۴ دیده می‌شود با افزایش عدد نادسن، فرکانس و سرعت

بحرانی کاهش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

### ۵-۸- تأثیر تغییرات ماکزیمم دامنه بدون بعد بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات ماکزیمم دامنه بدون بعد در شکل ۱۶ نمایش داده شده است.

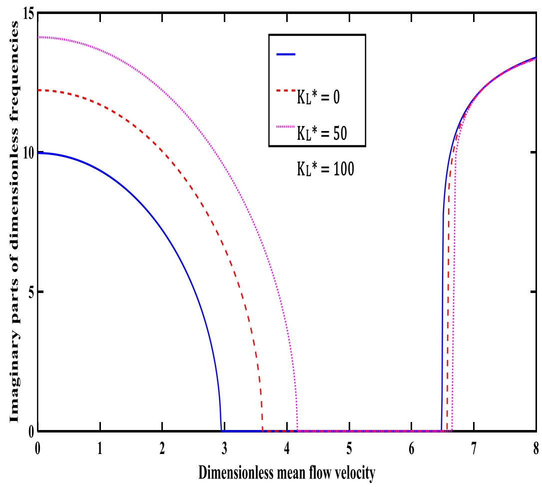



**شکل ۱۶:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ماکزیمم دامنه بدون بعد
$(\mu^* = 0.05, L_s{}^* = 0.1, f_{31} = 1\ \mathrm{v}, V = 0.1\ \mathrm{v}, \Delta T = 20\ )$

شکل ۱۶ اثر تغییرات ماکزیمم دامنه بدون بعد بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۶ دیده می‌شود با افزایش ماکزیمم دامنه بدون بعد، فرکانس و سرعت بحرانی افزایش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر دیرتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری بزرگ‌تر می‌شود. دلیل افزایش فرکانس غیرخطی، افزایش سختی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ بر اساس رابطه ون-کارمن است.

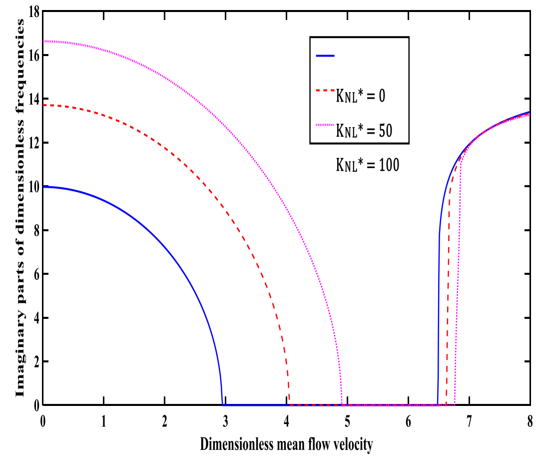
### ۵-۹- تأثیر پارامترهای فونداسیون الاستیک بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد

تغییرات قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس غیرخطی بدون بعد با تغییرات ضرایب فونداسیون خطی، غیرخطی و برشی بدون بعد به ترتیب در شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ نمایش داده شده است.

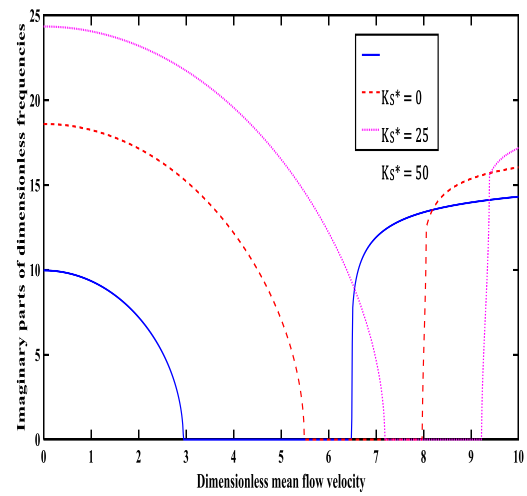



**شکل ۱۷:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ضریب فونداسیون خطی بدون بعد
$(\mu^* = 0.05, L_s{}^* = 0.1, a^* = 1, f_{31} = 1\ \mathrm{v}, V = 0.1\ \mathrm{v}, \Delta T = 20\ )$

شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ اثر تغییرات ضرایب فونداسیون خطی، غیرخطی و برشی بدون بعد بر روی فرکانس غیرخطی بدون بعد را نشان می‌دهند. حضور بستر الاستیک یک تأثیر قابل‌توجهی بر رفتار ارتعاشی نانولوله‌های فلکسوالکتریک دارد. همان‌طور که در شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ دیده می‌شود با افزایش ضرایب فونداسیون خطی، غیرخطی و برشی بدون بعد، فرکانس و سرعت بحرانی افزایش می‌یابند و دو پدیده دیورژانس و فلاتر دیرتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری بزرگ‌تر می‌شود. در واقع حضور بستر الاستیک موجب افزایش سختی نانولوله می‌شود و سرانجام باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

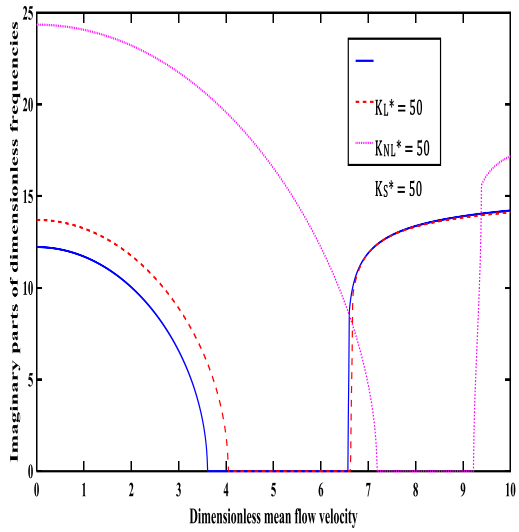



**شکل ۱۸:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ضریب فونداسیون غیرخطی بدون بعد.




**شکل ۱۹:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقادیر مختلف ضریب فونداسیون برشی.

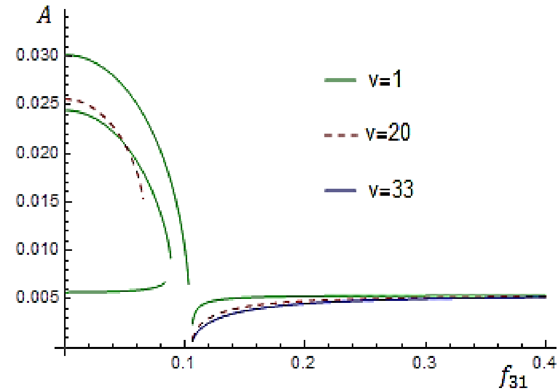
سرعت بحرانی برای ضرایب فونداسیون خطی بدون بعد، غیرخطی بدون بعد و برشی بدون بعد برای مقدار ۵۰ در شکل ۲۰ نشان داده شده است که مقادیر سرعت بحرانی به ترتیب ۳/۶۱، ۴/۰۵ و ۷/۱۹ می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود نانولوله فلکسوالکتریک با ضریب فونداسیون خطی نسبت به ضرایب فونداسیون غیرخطی و برشی، دو پدیده دیورژانس و فلاتر زودتر رخ می‌دهند و محدوده پایداری کوچک‌تر است.




**شکل ۲۰:** قسمت‌های موهومی فرکانس‌های بدون بعد نانولوله فلکسوالکتریک برای مقدار ۵۰ برای ضرایب فونداسیون خطی، غیرخطی و برشی بدون بعد.

## ۵-۱۰- تأثیر ضریب فلکسوالکتریک بر ارتعاشات اجباری

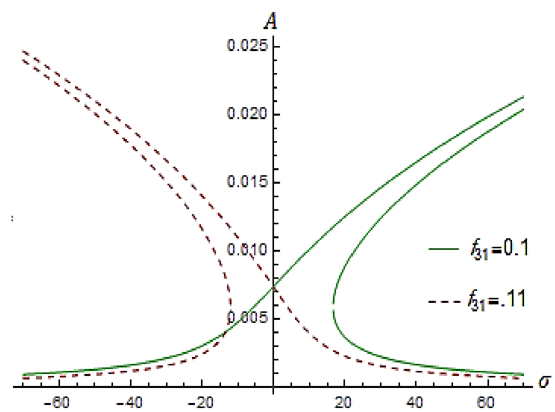
در شکل ۲۱ دامنه پاسخ برحسب تغییرات ضریب فلکسوالکتریک به ازای سه مقدار مختلف ولتاژ ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل ۲۱ مشخص است، هنگامی‌که ولتاژ $1 < V < 20$ است، اگر ضریب فلکسوالکتریک از ۰,۱ کمتر باشد، با افزایش ضریب فلکسوالکتریک دامنه کاهش می‌یابد و در یک بازه مشخص به ازای یک مقدار مشخص ضریب فلکسوالکتریک، سه جواب برای دامنه پاسخ به دست می‌آید. نقطه $f_{31} = 0.1$ نقطه عطف منحنی می‌باشد، به‌طوری‌که اگر ضریب فلکسوالکتریک بزرگ‌تر از ۰,۱ باشد، رفتار منحنی افزایشی خواهد بود. هنگامی‌که ولتاژ $20 \ll V < 33$ است، دیگر ناحیه سه جوابی وجود ندارد. و هنگامی‌که ولتاژ $33 \ll V$ است، فقط به ازای $f_{31} > 0.1$ سیستم جواب داد. لذا ضریب فلکسوالکتریک تأثیر بسزایی در پاسخ ارتعاشات اجباری سیستم دارد. و به خاطر وجود نقطه عطف در منحنی پاسخ، رفتار دوگانه از خود نشان می‌دهد.




**شکل ۲۱:** منحنی دامنه برحسب تغییرات ضریب فلکسوالکتریک به ازای سه مقدار مختلف ولتاژ.

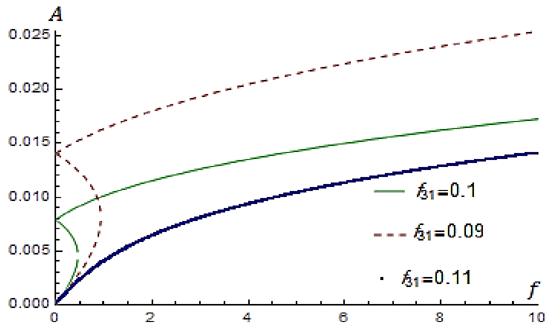
### ۵-۱۰-۱- رزنانس اولیه

شکل ۲۲ دامنه پاسخ برحسب تغییرات پارامتر انحرافی در رزنانس اولیه را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای $f_{31} = 0.1\ v$ سیستم رفتار سخت‌شونده از خود نشان می‌دهد و پدیده پرش کاملاً مشخص است؛ اما به ازای $f_{31} = 0.11\ v$ سیستم رفتار نرم‌شونده از خود نشان می‌دهد.




**شکل ۲۲:** منحنی دامنه برحسب تغییرات پارامتر انحرافی در رزنانس اولیه به ازای دو مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

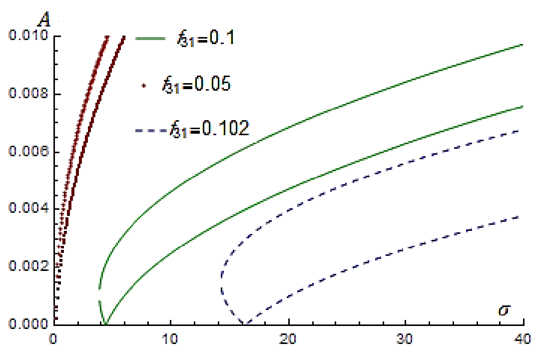
شکل ۲۳ دامنه پاسخ برحسب تغییرات نیروی تحریک در رزنانس اولیه را نشان می‌دهد. کاملاً مشخص است که به ازای $f_{31} = 0.1\ v$ پدیده پرش اتفاق می‌افتد و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک $(f_{31} = 0.09\ v)$ دامنه پاسخ افزایش می‌یابد، اما با افزایش ضریب فلکسوالکتریک $(f_{31} = 0.11\ v)$ پدیده پرش از بین رفته و ناحیه دارای پاسخ سه‌گانه ظاهر نشده و با افزایش دامنه نیروی تحریک، پیوسته دامنه پاسخ افزایش می‌یابد.




**شکل ۲۳:** منحنی دامنه برحسب تغییرات نیروی تحریک در رزنانس اولیه به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

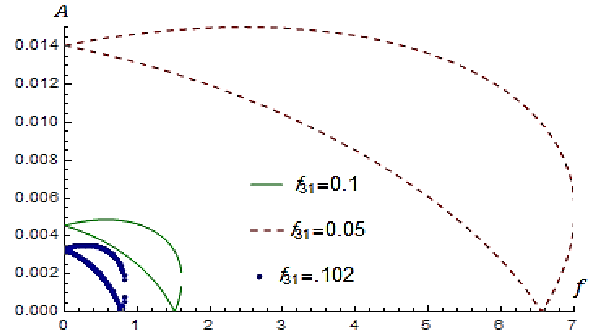
### ۵-۱۰-۲- رزنانس زیرهارمونیک

شکل ۲۴ دامنه پاسخ برحسب تغییرات پارامتر انحرافی در رزنانس زیرهارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش ضریب فلکسوالکتریک دامنه ارتعاشت کم و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاش افزایش پیدا می‌کند.




**شکل ۲۴:** منحنی دامنه برحسب تغییرات پارامتر انحرافی در رزنانس زیرهارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

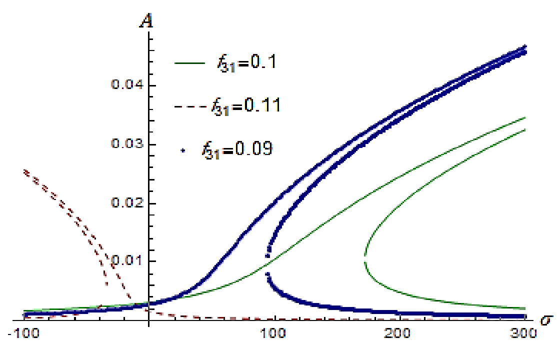
شکل ۲۵ دامنه پاسخ برحسب تغییرات نیروی تحریک در رزنانس زیرهارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب فلکسوالکتریک دامنه ارتعاشت کم و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاش افزایش پیدا می‌کند.




**شکل ۲۵:** منحنی دامنه برحسب تغییرات نیروی تحریک در رزنانس زیرهارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

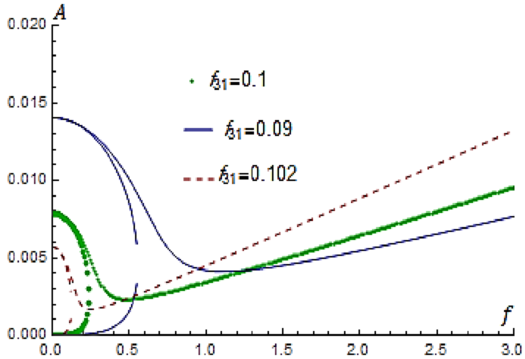
### ۵-۱۰-۳- رزنانس فوق هارمونیک

شکل ۲۶ دامنه پاسخ برحسب تغییرات پارامتر انحرافی در رزنانس فوق هارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب فلکسوالکتریک دامنه ارتعاشت کم و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاش افزایش پیدا می‌کند. در هر سه منحنی پدیده پرش اتفاق می‌افتد. ولی سیستم در $f_{31} = 0.09\ v$ رفتار سخت‌شوندگی و سیستم در $f_{31} = 0.11\ v$ سیستم رفتار نرم‌شوندگی از خود نشان می‌دهد.




**شکل ۲۶:** منحنی دامنه برحسب تغییرات پارامتر انحرافی در رزنانس فوق هارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

شکل ۲۷ دامنه پاسخ برحسب تغییرات نیروی تحریک در رزنانس زیرهارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک را نشان می‌دهد. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود با افزایش ضریب فلکسوالکتریک دامنه ارتعاشت کم و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاش افزایش پیدا می‌کند.




**شکل ۲۷:** منحنی دامنه برحسب تغییرات نیروی تحریک در رزنانس فوق هارمونیک به ازای سه مقدار مختلف ضریب فلکسوالکتریک.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، از روش مقیاس‌های چندگانه برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و پاسخ فرکانسی یک نانولوله فلکسوالکتریک حامل سیال تحت میدان دمایی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی استفاده شده است. خلاصه نتایج گرفته شده به صورت زیر می‌باشد:

- با افزایش ولتاژ الکتریکی، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

- با افزایش ضریب فلکسوالکتریک، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

- با افزایش حرارت، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند و محدوده پایداری کوچک‌تر می‌شود.

- با افزایش پارامتر گرادیان کرنش، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی افزایش می‌یابند و محدوده پایداری بزرگ‌تر می‌شود؛ اما با افزایش پارامتر غیرموضعی فرکانس‌ها و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند.

- در رزنانس اولیه با افزایش ضریب فلکسوالکتریک، سیستم رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد.

- در رزنانس زیرهارمونیک با افزایش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاشت کم و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاش افزایش پیدا می‌کند.

- در رزنانس فوق هارمونیک با افزایش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاشت کم و با کاهش ضریب فلکسوالکتریک، دامنه ارتعاش افزایش پیدا می‌کند؛ و با تغییر ضریب فلکسوالکتریک رفتار سیستم از سخت‌شونده به نرم‌شونده تغییر می‌یابد.

## فهرست علائم

| | |
|---|---|
| $A$ | سطح مقطع |
| $a_1$ | پارامتر تجربی |
| $B$ | پارامتر تجربی |
| $b$ | قطر نانولوله |
| $d_{31}$ | ضریب دی‌الکتریک |
| $E$ | مدول یانگ |
| $f(x,t)$ | برآیند بارگذاری جانبی |
| $f_{31}$ | ضریب فلکسوالکتریک |
| $I$ | ممان اینرسی |
| $I_0$ | اینرسی محوری |
| $kn$ | عدد نادسن |
| $\kappa_0$ | ضریب نفوذ هوا |
| $\kappa_b$ | ضریب نفوذ زمینه |
| $L$ | طول |
| $M^L$ | گشتاور موضعی |
| $m_f$ | جرم واحد طول سیال |
| $\mathrm{N_{xx}}$ | کشش غیرخطی |
| $u_{avg,slip}$ | سرعت میانگین سیال با شرایط مرزی لغزشی |
| $u_{avg,no-slip}$ | سرعت میانگین سیال با شرایط مرزی بدون لغزشی |
| V | ولتاژ الکتریکی |
| $VCF$ | ضریب تصحیح سرعت |
| $\alpha$ | ضریب انبساط حرارتی |
| $\Delta T$ | تغییرات دما |
| $\rho$ | چگالی |
| $\sigma_v$ | ضریب تطابق مومنتم مماسی |

## ۷- مراجع

[1] Liu J, Zhang G, Qin J, Zhang W, Xing Y, Guo D, et al. Field emission from combined structures of carbon nanotubes and carbon nanofibers. Physica B: Condensed Matter. 2010;405(11):2551-5.

[2] Homma Y, Yamashita T, Kobayashi Y, Ogino T. Interconnection of nanostructures using carbon nanotubes. Physica B: Condensed Matter. 2002;323(1-4):122-3.

[3] Lau K-T, Chipara M, Ling H-Y, Hui D. On the effective elastic moduli of carbon nanotubes for nanocomposite structures. Composites Part B: Engineering. 2004;35(2):95-101.

[4] Kim S, Jamalzadeh N, Zare Y, Hui D, Rhee KY. Considering the filler network as a third phase in polymer/CNT nanocomposites to predict the tensile modulus using Hashin-Hansen model. Physica B: Condensed Matter. 2018;541:69-74.

[5] Rafiee R. Characterization of the electrical and electromagnetic properties of CNT-based composites. Modares Mechanical Engineering. 2014;13(12):88-100.

[6] Mondali M, Yousefi M. Prediction a range for elastic modulus of CNT reinforced polymer composites using analytical method. Modares Mechanical Engineering. 2014;14(7):52-60.

[7] Koranian SE, Esmaeelzadeh Khadem S, Kokabi M. Nonlinear free vibration analysis of the polymeric nanocomposite viscoelastic plates containing carbon nanotubes. Modares Mechanical Engineering. 2017;16(11):429-38.

[8] Khansari M, Khodarahmi H, Vaziri A. Experimental study of ballistic properties of hybrid aluminum and epoxy matrix composite reinforced with carbon nanotube. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(8):126-32.

[9] Yang W, Wang X, Fang C, Lu G. Electromechanical coupling characteristics of carbon nanotube reinforced cantilever nano-actuator. Sensors and Actuators A: Physical. 2014;220:178-87.

[10] Yang W, Wang X. Nonlinear pull-in instability of carbon nanotubes reinforced nano-actuator with thermally corrected Casimir force and surface effect. International Journal of Mechanical Sciences. 2016;107:34-42.

[11] Yang W, Kang W, Wang X. Scale-dependent pull-in instability of functionally graded carbon nanotubes-reinforced piezoelectric tuning nano-actuator considering finite temperature and conductivity corrections of Casimir force. Composite Structures. 2017;176:460-70.

[12] Shooshtari A, Mobarekeh DD. Nonlinear free vibration of a single layered nanoplate based on the nonlocal elasticity. Modares Mechanical Engineering. 2014;13(15):223-36.

[13] Atabakhshian V, Shooshtari A, Karimi M. Electro-thermal vibration of a smart coupled nanobeam system with an internal flow based on nonlocal elasticity theory. Physica B: Condensed Matter. 2015;456:375-82.

[14] Mehralian F, Beni YT, Zeverdejani MK. Nonlocal strain gradient theory calibration using molecular dynamics simulation based on small scale vibration of nanotubes. Physica B: Condensed Matter. 2017;514:61-9.

[15] Ghayesh MH, Farajpour A. Nonlinear mechanics of nanoscale tubes via nonlocal strain gradient theory. International Journal of Engineering Science. 2018;129:84-95.

[16] Ke L-L, Wang Y-S, Wang Z-D. Thermal effect on free vibration and buckling of size-dependent microbeams. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2011;43(7):1387-93.

[17] Rafieipour H, Lotfavar A, Hamze SS. Nonlinear vibration analysis of functionally graded beam on Winkler-Pasternak foundation under mechanical and thermal loading via homotopy analysis method. Modares Mechanical Engineering. 2013.

[18] Pourashraf ST, Ansari R. Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environments with considering surface stress and nonlocal effects. Modares Mechanical Engineering. 2015;14(16):17-26.

[19] Keshavarzpour H. Primary resonance analysis of a curved single walled carbon nanotubes on the viscoelastic medium in thermal environment under harmonic force. Modares Mechanical Engineering. 2018;18(5):211-7.

[20] Ebrahimi F, Reza Barati M. Surface effects on the vibration behavior of flexoelectric nanobeams based on nonlocal elasticity theory. The European Physical Journal Plus. 2017;132(1):1-13.

[21] Barati MR. On non-linear vibrations of flexoelectric nanobeams. International Journal of Engineering Science. 2017;121:143-53.

[22] Wang L, Ni Q. On vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid. Computational Materials Science. 2008;43(2):399-402.

[23] Rashidi V, Mirdamadi HR, Shirani E. A novel model for vibrations of nanotubes conveying nanoflow. Computational Materials Science. 2012;51(1):347-52.

[24] Hosseini M, Zandi Baghche Maryam A. Static and dynamic analysis of nano-tube conveying fluid under electrostatic actuation. Modares Mechanical Engineering. 2017;16(11):165-76.

[25] Arani AG, Zarei MS, Amir S, Maraghi ZK. Nonlinear nonlocal vibration of embedded DWCNT conveying fluid using shell model. Physica B: Condensed Matter. 2013;410:188-96.

[26] Maraghi ZK, Arani AG, Kolahchi R, Amir S, Bagheri M. Nonlocal vibration and instability of embedded DWBNNT conveying viscose fluid. Composites Part B: Engineering. 2013;45(1):423-32.

[27] Mahmoudpour E, Hosseini-Hashemi S, Faghidian S. Nonlinear vibration analysis of FG nano-beams resting on elastic foundation in thermal environment using stress-driven nonlocal integral model. Applied Mathematical Modelling. 2018;57:302-15.

[28] Mahmoudpour E, Hosseini-Hashemi S, Faghidian S. A nonlocal strain gradient theory for nonlinear free and forced vibration of embedded thick FG double layered nanoplates. Structural Engineering and Mechanics: An International Journal. 2018;68(1):103-19.

[29] Ghayesh MH, Farajpour A. A review on the mechanics of functionally graded nanoscale and microscale structures. International Journal of Engineering Science. 2019;137:8-36.

[30] Mahmoudpour E, Hosseini-Hashemi S, Faghidian S. Nonlinear resonant behaviors of embedded thick FG double layered nanoplates via nonlocal strain gradient theory. Microsystem Technologies. 2019;25(3):951-64.

[31] Jafari AA, Jafari MS. Free and forced vibration of rotating FGM beam with piezoelectric layer. Journal of Aerospace Mechanics. 2020;16(1):1-13.

[32] Vatankhah R, Kahrobaiyan M, Alasty A, Ahmadian M. Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams. Applied Mathematical Modelling. 2013;37(18-19):8363-82.

[33] Mirramezani M, Mirdamadi HR. Effects of nonlocal elasticity and Knudsen number on fluid–structure interaction in carbon nanotube conveying fluid. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2012;44(10):2005-15.

[34] Hoseini M, Zandi Baghche Maryam A. Analytical Analysis for Free Vibration of Different Arrangements of BNNTs under Initially Stress. Journal of Aerospace Mechanics. 2019;15(3):33-46.

Journal of Aerospace Mechanics/ 2022/ Vol.18/ No.1/ 21-40

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.1.2.0

# Nonlinear Response and Stability of Flexoelectric Nanotube Conveying Fluid under Temperature Field using Nonlocal Strain Gradient Theory

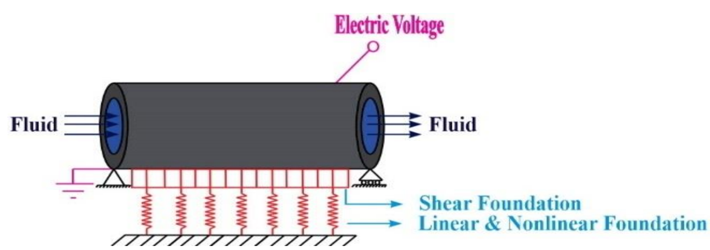
**Ebrahim Mahmoudpour[1*], Ali Parsa[2], Mohammad Parsa[2]**

[1]Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Borujerd Branch, Islamic Azad University, Borujerd, Iran
[2] MSc, Young and Elite Researchers Club, Khorramabad Branch, Islamic Azad University, Khorramabad, Iran

## HIGHLIGHTS

- As the voltage increases, the nonlinear frequencies and critical speed decrease.
- With the increase of flexoelectric coefficient, nonlinear frequencies and critical speed decrease.

## GRAPHICAL ABSTRACT




## ARTICLE INFO

*Article history:*
Article Type: Research paper
Received: 22 May 2020
Received in revised form: 10 March 2021
Accepted: 20 October 2021
Available online: 18 May 2022
*Correspondence:
E.Mahmoudpour@iaub.ac.ir

*How to cite this article:*
E. Mahmoudpour , A. Parsa, M. Parsa. Nonlinear response and stability of flexoelectric nanotubes conveying fluid under temperature field using nonlocal strain gradient theory. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(1):21-40.

*Keywords:*
Nonlinear free and forced vibrations
Flexoelectric nanotube carrying fluid
Temperature field

## ABSTRACT

In this article, the method of multiple scales is presented for solving nonlinear free and forced vibration equations of flexoelectric nanotube conveying viscous fluid under a temperature field located on a nonlinear elastic foundation using nonlocal strain gradient theory. By assuming simple Euler-Bernoulli beam theory and nonlinear Von Karman geometry, the differential equation governing nonlinear vibration is extracted. An electrical voltage is applied to the top surface of the nanotube, which introduces a closed-circuit electric field condition. Finally, the effect of various parameters such as temperature changes, electrical voltage, etc. on real and imaginary parts of natural frequencies is investigated. Also, the effect of flexoelectric coefficient on primary, subharmonic and super harmonic resonance is investigated. The results show that the flexoelectric coefficient causes that in the primary and the super harmonic resonance, the system initially shows a hardening behavior and the jump phenomenon is quite clear. But with increasing flexoelectric coefficient, the system shows softening behavior.