



مقایسه عملکرد قانون هدایت بر اساس بسط مرتبه بالای برداری و روش SDRE برای مأموریت فرود عمودی بوستر

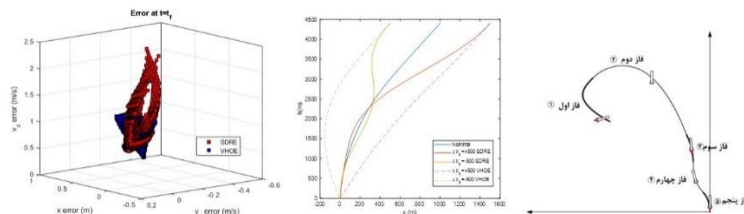
مرتضی شرفی^۱، ناصر رهبر^{۲*}، علی محرم پور^۳، عبدالرضا کاشانی نیا^۳

^۱ دانشجوی دکتری، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
^۲ دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
^۳ استادیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

چکیده گرافیکی

برجسته‌ها

- عبارات مرتبه بالا تاثیر بسزایی در عملکرد قانون هدایت دارند.
- روش معادله ریکاتی وابسته به حالت تمایل به همگرایی به مسیر نامی دارد.
- در روش بسط مرتبه بالای برداری مسیر و فرامین بهینه جدید با توجه به انحرافات اولیه جایگزین می شوند.



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۰۳

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۴/۰۲

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۳۱

ارائه برخط: ۱۴۰۱/۰۵/۲۴

*نویسنده مسئول:

rahbar_nas@mut.ac.ir

کلید واژه ها:

بسط مرتبه بالای برداری

کنترل بهینه غیرخطی

فرود بوستر

هدایت بهینه

SDRE

چکیده

در این پژوهش، هدف اصلی مقایسه عملکرد روش بسط مرتبه بالای برداری و روش معادله ریکاتی وابسته به حالت (SDRE) برای مسئله فرود عمودی بوستر است. برای این منظور ابتدا مرور کاملی از مراجع در رابطه با روش‌های مختلف مرتبه بالا و همچنین روش SDRE ارائه شده است و سپس روش بسط مرتبه بالای برداری و نحوه به‌کارگیری آن در مسائل کنترل بهینه ارائه شده است. پس‌از آن، روش SDRE شرح داده می‌شود و در ادامه مسئله هدایت برای فرود بوستر عمود نشین با هر دو روش حل شده است. به‌منظور ارزیابی عملکرد هر دو روش در این مسئله، شبیه‌سازی‌های متنوعی با در نظر گرفتن انحرافات اولیه مختلف پیاده‌سازی شده است. برای این منظور، انحرافات اولیه در ارتفاع، برد، سرعت افقی و عمودی در نظر گرفته شده است و تمام ترکیب‌های مختلف این انحرافات شبیه‌سازی می‌شوند. پس از مطالعه نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها که شامل ۳۷۷۳ اجرای مختلف است، تفاوت‌های عملکردی و دقت در نقطه فرود مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است. به علاوه، با استخراج داده‌های آماری نتایج شبیه‌سازی کیفیت هر دو روش مورد بررسی دقیق قرار گرفته و برتری روش بسط مرتبه بالای برداری نشان داده شده است. به طور خاص نشان داده شده است که مقدار میانگین تابع هزینه در روش بسط مرتبه بالای برداری تقریباً به اندازه نصف تابع هزینه در روش SDRE است.

۱- مقدمه

مسئله فرود دقیق در مأموریت‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به فرود کنترل شده محموله‌های علمی و انسانی بر روی سیارات دیگر، بازگرداندن آن‌ها به زمین و وسایل پرتاب با قابلیت استفاده مجدد نام برد. توانایی فرود نرم بوستر ماهواره‌برها اساساً در صنعت فضایی برای کاهش هزینه‌ها تأثیر به‌سزایی دارد [۱]. برای اکتشاف در یک سیاره، فرود آمدن در نزدیکی یک سایت مورد نظر علمی، پایگاه یا ایستگاه‌های سوخت‌گیری الزامی است. بدیهی است که داشتن یک‌روال هدایت فرود مقاوم و قابل اعتماد برای زیرساخت‌های حمل‌ونقل فضایی آینده یک ضرورت خواهد بود. هر مسئله فرود دقیق با یک مرحله ورود از جو به نقطه‌ای که قرار است فرود صورت گیرد شروع می‌شود.

دو روش مرسوم مورد توجه در مسئله هدایت، انواع روش‌های بسط مرتبه بالا و همچنین روش SDRE هستند. روش‌های بسط مرتبه بالا با مدل‌سازی غیرخطی پیاده‌سازی می‌شوند حال آن‌که در روش SDRE مدل‌سازی مسئله به روش خطی‌سازی ظاهری است. روش SDRE از این جهت دارای اهمیت در مسئله فرود بوستر است که با اضافه کردن عبارات غیرخطی در خطی‌سازی ظاهری، تعقیب مسیر نامی با کیفیت بسیار بالاتری انجام می‌شود. از طرفی دیگر، در روش‌های بسط مرتبه بالا، این ویژگی شایان توجه است که

با اندازه‌گیری انحرافات اولیه می‌توان به‌طور کلی مسیر و فرمان هدایت بهینه را با مقادیر جدید جایگزین کرد. در ادامه این پژوهش پیاده‌سازی و مقایسه این دو روش مورد توجه قرار می‌گیرد.

در [۲] مسئله هدایت و فرود عمودی ماه نشین مطالعه شده است و در [۳] نویسندگان مقاله، فرود یک مریخ نشین را مورد توجه قرار داده‌اند. اما اخیراً، به لطف ظهور بوسترهای با قابلیت استفاده مجدد عمود نشین، توجهات به این سو جلب شده است. در [۴] برای طراحی مسیر با حداقل سوخت مأموریت فرود بوستر از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات بهره گرفته شده و در تحقیق دیگر، [۵] این مسئله مستقیماً با روش شبه طیفی حل شده است. یکی از مهم‌ترین موضوعات در مأموریت یک بوستر با قابلیت استفاده مجدد، طراحی و استخراج مسیر فرود است. برای حل این دسته از مسائل یکی از روش‌های مشهور، روش شبه طیفی است که شامل گستره متنوعی از انواع مختلف با توابع پایه متفاوت است. به‌طور کلی می‌توان این روش‌ها را با عنوان بسط مرتبه بالا شناخت که تنوع گسترده‌ای دارند. از جمله می‌توان به روش کلاسیک تئوری اغتشاشات، روش بسط مرتبه بالا با استفاده از جبر دیفرانسیلی، بسط مرتبه بالای برداری و یا پیاده‌سازی بسط مرتبه بالا به روش توابع مولد اشاره کرد. در [۶] بحث مفصل و کاملی در خصوص تئوری همیلتون-جاکوبی و تبدیل کانونیکال فضای فاز و ویژگی‌های آن،

مزیت استفاده از بسط مرتبه بالای جبر دیفرانسیلی را برای مسئله اجتناب از برخورد نشان داده است. در این تحقیق، برای شش جسم مختلف آنالیز پیش‌بینی انحراف از مسیر مرجع در نتیجه اغتشاشات ذکر شده با استفاده از بسط مرتبه ۴ جبر دیفرانسیلی انجام شده است. سپس این مطالعه در [۱۶] تکمیل شده و در این تحقیق احتمال برخورد با استفاده از آنالیز مونت کارلو با استفاده از بسط مرتبه بالای جبر دیفرانسیلی محاسبه می‌شود.

نگرشی متفاوت از بسط مرتبه بالا با عنوان بسط مرتبه بالای برداری VHOE در [۱۷-۱۹] معرفی شده است. در [۲۰] با در نظر گرفتن مسئله هدایت بهینه مانور با کمک نیروی آئرو دینامیک مورد توجه قرار گرفته است. این روش از ساختار ریاضی مورد نیاز جهت انجام محاسبات با معرفی متغیرهای حساسیت و الگوریتم‌های اختصاصی پیاده‌سازی شده است. استفاده از روش معادله ریکاتی وابسته به حالت روشی کارآمد، آنالین و محبوب است که در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این روش برخلاف روش LQR برای مسائل غیرخطی که قابل تبدیل به فرم شبه-خطی باشند با حفظ عوامل غیرخطی در حالت‌ها، به کار می‌رود. یکی دیگر از خصوصیات این روش در اختیار قرار دادن ماتریس‌های وزنی وابسته به حالت است. در واقع می‌توان گفت روش SDRE تعمیمی از روش LQR به سیستم‌های غیرخطی با رویکرد آنالین است. در روش SDRE همه عوامل غیرخطی بایستی حفظ شوند و سیستم غیرخطی به فرم ساختار خطی (غیر منحصربه‌فرد) شامل ماتریس‌های ضرایب وابسته به حالت تبدیل شوند، سپس یک شاخص عملکرد غیرخطی با ساختار شبه مربعی کمینه می‌شود. در نهایت معادله ریکاتی جبری به صورت آنالین به منظور به دست آوردن قانون کنترلی نزدیک به بهینه حل می‌شود. در این الگوریتم در واقع ضرایب معادلات شبه حالت با توجه به نقطه مورد نظر در فضای حالت تغییر می‌کند. می‌توان گفت روش SDRE شباهت زیادی به روش LQR دارد با این تفاوت که یک روش کنترلی غیرخطی است. در سال ۱۹۶۲، پیرسون [۲۱] فرمول‌بندی وابسته به زمان و حالت سیستم‌های غیرخطی مرتبط با مسائل کنترل بهینه غیرخطی با افق

جهت فرموله کردن مسئله و حل آن با کمک توابع مولد ارائه شده است. مبحث تکمیلی در خصوص توابع مولد در [۷] ارائه شده است که تمرکز اصلی در این تحقیق، استفاده از این روش برای حل مسائل دینامیک فضایی است. در این مقاله بیان شده که با حل توابع مولد، می‌توان مقادیر اولیه متغیرهای شبه حالت مسئله را بر اساس پارامترهای مشخص (یعنی به شکل پارامتریک) استخراج کرد.

در [۸] رویکردی جالب برای حل مسئله آرایش چندین فضاپیما به کمک توابع مولد ارائه شده است. در این تحقیق روش بسط توابع غیرخطی حول نقطه تعادل معادلات شرح داده شده است و مشخص می‌شود که برای حل مسئله مورد نظر باید ضرایب یک سری تیلور مشخص را یافت. یک روش دیگر برای هدایت مقاوم در هدایت مسائل فضایی بر اساس روش بسط مرتبه بالای جبر دیفرانسیلی در [۹] بررسی و پیشنهاد شده است. این بار در [۱۰] روشی مشابه با مراجع قبلی برای چند مثال مختلف پیاده‌سازی شده است به علاوه آن که استخراج معادلات حاکم بر دینامیک مسئله هدایت مورد نظر ارائه شده است. در مطالعه‌ای دیگر، با روش جبر دیفرانسیلی در [۱۱] این بار مسئله مورد نظر با مقادیر محدود شده‌ی اندازه نیروی پیشران مدل شده است. یکی از کاربردهای جالب توجه دیگر بسط مرتبه بالا و استفاده از جبر دیفرانسیلی در [۱۲] آمده است. در این مطالعه با در نظر گرفتن این نکته که در یک مسئله دوره‌ای (پریودیک) با استفاده از بسط مرتبه بالا برای گستره قابل توجهی از شرایط اولیه و پارامترهای مسئله، یک حل برای یک دوره استخراج شده و از آنجا که حل معادلات فارغ از مقدار عددی شرایط اولیه و پارامترهای مسئله معتبر است، این حل در شروع دوره جدید نیز مجدداً مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک کاربرد متفاوت دیگر از بسط مرتبه بالا و استفاده از جبر دیفرانسیلی در محاسبات آن، در [۱۳] مطالعه شده که در آن مسئله مورد نظر انتقال یک فضاپیما از نقطه لاگرانژی به سمت ماه و برخورد آن به ماه جهت متلاشی کردن فضاپیما است. گاهی تغییر و انحراف در زمان نهایی مسئله نیز محتمل است که تأثیر غیرقابل چشم‌پوشی‌ای در حل معادلات دینامیک مسئله خواهد گذاشت. در [۱۴] این موضوع مورد مطالعه قرار گرفته است. یک تحقیق در [۱۵]

مورد دوم، آن‌ها به‌اشتباه ادعا کردند که استفاده از کنترل فیدبک SDRE برای مسئله تنظیم غیرخطی، به راه‌حلی منجر می‌شود که هم به‌صورت بهینه و هم به‌صورت سراسری پایدار است که متأسفانه مثال‌های ساده‌ای وجود دارد که با این ادعا در تضاد است [۳۰، ۳۱]. در حالت کلی به‌صورت چند متغیره، SDRE فیدبکی دارای خاصیت زیر بهینه مطلوبی است که شرط لازم پونت‌ریاگین برای بهینه بودن همواره برآورده می‌شود.

روش SDRE برای حل مسائل مستقل ITHNOC در طیف گسترده‌ای از کاربردهای غیرخطی و همچنین زمینه‌های مطالعاتی بسیار متنوع در علوم مختلف و نیز مهندسی کنترل بکار رفته است که می‌توان به حوزه‌های موشکی، هواپیمایی، وسایل نقلیه هوایی بدون سرنشین، ماهواره‌ها و فضاپیماها، کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، خودروسازی، سیستم‌های بیولوژیکی و زیست پزشکی، کنترل فرایند، رباتیک و ... اشاره کرد.

در [۳۲، ۳۳] از این روش برای طراحی خودخلبان کانال طولی جسم پرنده استفاده شده است. در [۳۴] این روش برای طراحی خودخلبان یک جسم پرنده چابک در ترکیب با روش H_∞ به‌کاررفته است. در [۳۵] محققین از این روش برای طراحی یک خودخلبان هیبریدی برای یک جسم پرنده هوا به هوا به‌صورت بلادرنگ استفاده کرده‌اند. در [۳۶] طراحی خودخلبان برای یک جسم پرنده با کنترل دوگانه (تیل و کانارد) با وزن‌های وابسته به حالت موردبررسی قرارگرفته است. در [۳۷] یک رویکرد عمومی برای طراحی خودخلبان یک موشک غیرخطی مقاوم سه محوره معرفی شده است. در [۳۸، ۳۹] یک قانون هدایت برای مسیرهای مختلف توسعه داده شده است. در [۴۰] یک طراحی کاملاً یکپارچه هدایت و کنترل برای اجسام پرنده چابک، برای بهبود میانگین و انحراف معیار خطا صورت گرفته است. در [۴۱] یک فیلتر هدایت برای یک موشک قاره‌پیمای بالستیک با استفاده از اطلاعات حسگرهای فعال و غیرفعال سمت، برد و ارتفاع طراحی شده است.

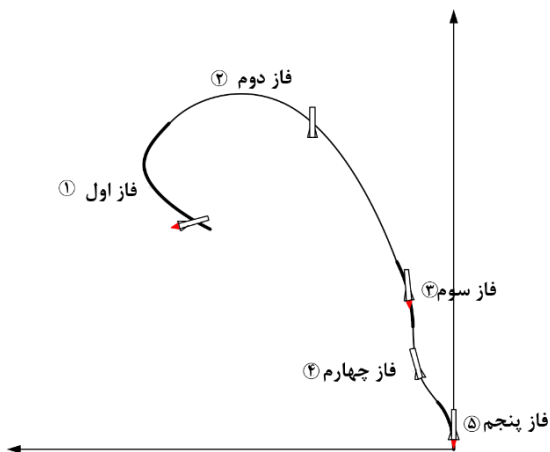
در [۴۲-۴۴] کنترل موقعیت فضاپیما به‌صورت یک جسم صلب با استفاده از روش SDRE موردبررسی قرارگرفته است. در [۴۵] هدایت فاز میانی یک فضاپیمای مافوق صوت

زمان محدود را پیشنهاد کرد و همچنین پیشنهاد کرد که سیستم‌های غیرخطی، به‌عنوان یک سیستم شبه LTI برای تقریب مسائل کنترل بهینه غیرخطی در هر لحظه از زمان در نظر گرفته شود. سپس مسئله حاصل با استفاده از تکنیک QR، به‌صورت نقطه‌ای در فضای حالت حل شود. مسئله زمان بی‌نهایت نیز در این چارچوب به‌عنوان راه‌حل حالت ماندگار معادله دیفرانسیل ریکاتی وابسته به حالت در نظر گرفته شده است.

ویژگی‌های بهینه، زیر بهینه و پایداری تنظیم‌کننده‌های غیرخطی SDRE برای مسائل ITHNOC (کنترل بهینه غیرخطی با افق زمان بی‌نهایت) توسط چندین نویسنده در دهه‌های گذشته مورد مطالعه قرارگرفته‌اند. پیشینه این رویکرد، به نیم‌قرن پیش برمی‌گردد، الگوریتم مشهور SDRE در نتیجه مشارکت‌های پیشگامانه در این زمینه توسط کلاتیر و همکاران [۲۲-۲۴] مراسم و کلاتیر [۲۵] و کلاتیر و استنسبری در [۲۶] در بیش از دو دهه محبوبیت زیادی به‌ویژه در جامعه هوافضا به دست آورد. ورنلی و کوک [۲۷] کاربرد قانون کنترل پیشنهاد شده توسط پیرسون [۲۱] را به کلاس کلی‌تری از سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان، گسترش دادند. علاوه بر این، پایداری مجانبی قانون کنترل در یک محدوده به‌اندازه کافی کوچک در اطراف مبدأ تحت محدودیت‌های خفیف نشان داده شد. با این حال، شرایط برای پایداری مجانبی در مقیاس بزرگ را نمی‌توان ایجاد کرد. ارلر و وادالی [۲۸] ساختار ریاضی سیستم‌هایی که با روش SDRE کنترل شده بودند را برای مسائل مربوط به تنظیم‌کننده‌های غیرخطی با معیارهای عملکرد درجه دوم، تجزیه و تحلیل کردند. آن‌ها نشان دادند که حل یک معادله جبری ریکاتی (ARE) ابزاری برای دستیابی به یک راه‌حل غیر بهینه برای مسئله ITHNOC است. در اصل، SDRE به‌عنوان یک روش وابسته به زمان تلقی می‌شد و وابستگی به حالت آن به‌صراحت تأیید یا تجزیه و تحلیل نشد. بنکس و مهنا [۲۹] یک فرم فیدبک از معادلات دیفرانسیل SDRE را به کار بردند و نشان دادند که تحت مرزهای مشخصی بر روی مشتقات توابع ماتریس وابسته به حالت (SDC) که دینامیک غیرخطی را تعریف می‌کنند، پایدار است و سپس فیدبک حاصل از یک SDRE جبری را مطالعه کردند، اما در

۲- شرح مسئله

در این پژوهش، مسئله‌ی فاز نهایی فرود بوستر مدنظر قرار گرفته است (شکل ۱). مأموریت بازگشت بوستر شامل فازهای متعددی است. این فازها می‌تواند با موتورهای روشن یا خاموش در نظر گرفته شود؛ اما در این تحقیق، نویسندگان تنها فاز پایانی را مدنظر قرار داده‌اند. فرض شده است که در این مسئله، موتور بوستر همواره فعال بوده، جهت و اندازه نیروی پیشران قابل کنترل است. هدف ارضای شرایط نهایی با دقت بالا در نقطه فرود است. به همین خاطر مسئله هدایت به شکل یک مسئله کنترل بهینه با شرایط نهایی مقید مدل خواهد شد.



شکل (۱): تصویر شماتیک مراحل فرود بوستر [۵]

۲-۱- مدل ریاضی برای شبیه‌سازی

در این پژوهش فرض شده است جسم ذره‌ای است و زمین تخت است. مدل ریاضی دینامیک بوستر به فرم معادله ۱ ارائه شده است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= -\frac{D}{m} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} + \frac{L}{m} \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} + \frac{T_x}{m} \\ \dot{v}_z &= -\frac{D}{m} \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} - \frac{L}{m} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} + g + \frac{T_z}{m} \\ \dot{\alpha} &= \alpha_{rate} \end{aligned} \quad (1)$$

مدل دینامیکی مسئله، در دستگاه متصل به زمین استخراج شده است که مرکز آن در نقطه فرود، محور اول آن به سمت راست و محور سوم آن به سمت پایین است. در این

انجام شده است. در [۴۶] تخمین نرخ زاویه‌ای ماهواره با استفاده از اندازه‌گیری‌های برداری به دست آمده از حسگرها مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۴۷] کنترل چندعامله پرواز چندین ماهواره یا فضاپیما با ترکیب روش SDRE بررسی شده است.

در [۴۸، ۴۹] نویسندگان با کاهش بار محاسباتی تحلیلی در حل معادلات ریاضی جبری یک نوع کارآمد و جدید از روش SDRE را ارائه کرده‌اند. در این پژوهش‌ها تمرکز اصلی بر روی معرفی روشی کارآمدتر برای ایجاد ضرایب وابسته به حالت بوده است که در مراحل اولیه طراحی حائز اهمیت است. ابتدا روش معرفی شده بر روی یک مثال معیار جرم و فتر پیاده‌سازی شده و در ادامه این روش بر روی یک ربات دو چرخ پیاده‌سازی شده است که باعث چابکی و تحرک بیشتر این ربات شده است.

تا بدین جا کاربرد و معرفی اولیه‌ای از دو روش مرتبه بالا و همین‌طور روش SDRE ارائه شد. این دو روش اگرچه شباهت‌های ساختاری دارند، ولی عملاً متفاوت هستند. خصوصاً اینکه روش SDRE یک روش تعقیب مسیر است حال آنکه روش‌های مرتبه بالا می‌توانند به شکل یک مسئله کنترل یا هدایت بهینه زمان نهایی محدود تعریف شود که در آن برخی از شرایط نیز مقیدند. در این مقاله هر دو روش برای مسئله فرود عمودی بوستر پیاده‌سازی شده و مقایسه‌ی عملکرد دو روش ارائه خواهد شد. به‌طور ویژه، برای اولین بار در این پژوهش روش بسط مرتبه بالای برداری پیاده‌سازی شده است. همچنین برای پیاده‌سازی روش SDRE نیز از مفاهیم ریاضیاتی مرتبط با روش بسط مرتبه بالای برداری، از جمله بسط برداری و نگاشت‌های مرتبه بالا استفاده شده است.

در ادامه این پژوهش، ابتدا مسئله مورد نظر تعریف شده و مدل‌سازی ریاضی آن در بخش ۲ ارائه می‌شود. پس از آن، مرور مختصری بر روش بسط مرتبه بالای برداری ارائه می‌شود و سپس در بخش ۴ روش SDRE مختصراً شرح داده خواهد شد. سپس در بخش ۶ نتایج شبیه‌سازی در ۸ سناریوی مختلف و همچنین شبیه‌سازی مونت کارلو ارائه خواهد شد. در پایان دستاوردهای این پژوهش در بخش آخر ارائه شده است.

در رابطه ۳ عبارت ρ معرف چگالی اتمسفر است که با مدل استاندارد COESA محاسبه شده است. باید خاطر نشان کرد، اگرچه، مدل دینامیکی مسئله از نوع مدل جسم ذره‌ای است، اما به دلیل حضور نیروهای آئرو دینامیک، متغیر حالت برای زاویه حمله در نظر گرفته شده و نرخ تغییرات آن به عنوان یک متغیر کنترلی لحاظ شده است. نهایتاً در رابطه ۱، g بیان کننده جاذبه است که به فرم رابطه ۵ ارائه می‌شود.

$$g = g_0 \left(\frac{R_E}{R_E - z} \right)^2 \quad (5)$$

در این رابطه، R_E برابر ۶۳۷۸ کیلومتر، شعاع زمین است. مدل آئرو دینامیک ارائه شده از [۵] گرفته شده است که در آن پارامترهای مربوط به مدل سازی به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} C_{D_0} &= 9.4 \\ C_{D_\alpha} &= 6.5 \frac{1}{deg} \\ C_{L_\alpha} &= 4 \frac{1}{deg} \\ s &= 10.752 m^2 \end{aligned} \quad (6)$$

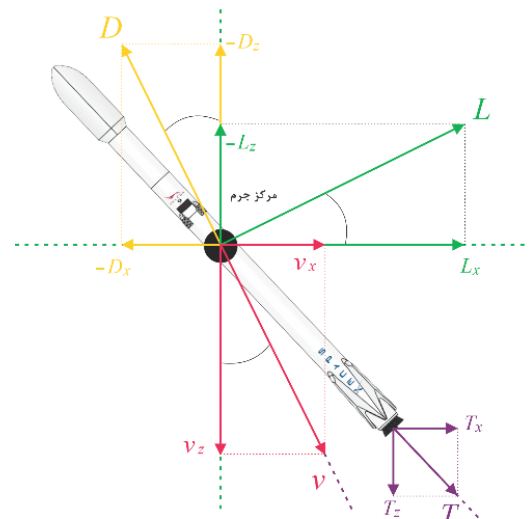
۲-۲- مدل ریاضی برای حل مسئله فرود

از روابط ۱ تا ۶ در ادامه این تحقیق برای پیاده سازی شبیه سازی های فرود استفاده خواهد شد؛ اما به منظور استخراج مسیر و فرمان هدایت بهینه از فرضیات زیر بهره گرفته شده است:

- ۱) جاذبه ثابت و برابر با $g = g_0$ است.
 - ۲) چگالی ثابت و برابر با $\rho = \rho_0$ و برابر ۱/۲۲۵ کیلوگرم بر مترمکعب است.
 - ۳) جرم ثابت و برابر با $m = m_0$ است.
- در نتیجه روابط دینامیکی ساده به فرم رابطه ۱ به عنوان مدل مرجع برای حل مسئله فرود مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در حالی که $T'_x = \frac{T_x}{m_0}$ و $T'_z = \frac{T_z}{m_0}$ هستند. به علاوه، متغیرهای D' و L' به شکل رابطه ۷ تعریف شده و اما پارامترهای مدل آئرو دینامیک مشابه قبل به فرم رابطه ۷ می‌باشند.

$$D' = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 s (C_{D_0} + C_{D_\alpha} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})) \quad (7)$$

رابطه، x و z به ترتیب برابر با برد و قرینه ارتفاع هستند. به طور مشابه v_x و v_z به ترتیب مؤلفه های افقی و عمودی بردار سرعت هستند. از آنجاکه نیروهای آئرو دینامیک برا و پسا در دینامیک دخیل اند، α به عنوان زاویه حمله در نظر گرفته شده است. همچنین T_x و T_z به ترتیب نیروی پیشران در راستای افق و عمودی است و متغیر α_{rate} ، نرخ تغییرات زاویه حمله است. این سه متغیر اخیر، متغیر کنترلی مسئله هدایت هستند. مدل سازی دینامیکی مسئله بر اساس شکل ۲ انجام شده است.



شکل (۲): مدل سازی دینامیکی مسئله

همچنین m جرم متغیر بازمان بوستر است که با رابطه ۲ مدل می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -\frac{T}{I_{sp} g_0} \\ T &= \sqrt{T_x^2 + T_z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن I_{sp} برابر ۳۲۰، معرف ضربه ویژه موتور و g_0 برابر ۹/۸۱ است. نهایتاً در رابطه ۱، L و D به ترتیب نیروی برا و پسا هستند که به شکل رابطه ۳ مدل شده اند [۵].

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho v^2 s (C_{D_0} + C_{D_\alpha} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})) \\ L &= \frac{1}{2} \rho v^2 s C_{L_\alpha} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن v ، به فرم رابطه ۴ محاسبه می‌شود.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \quad (4)$$

کمک مفاهیم بخش اول است. در ادامه مرور مختصری بر هر بخش ارائه می‌شود.

۳-۱- بسط برداری و نگاشت‌های مرتبه بالا

فرض کنید، توان i ام عبارت ریاضی $(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ به شکل

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2 + \dots + v_n)^i &= c_1 v_1^i + c_2 v_1^{i-1} v_2^1 \\ &+ c_3 v_1^{i-1} v_3^1 + \dots \\ &+ c_{\mathcal{R}(n,i)} v_n^i \end{aligned} \quad (10)$$

قابل ارائه است که در آن طبق تعریف $\mathcal{R}(n, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ می‌باشد. حال اگر v_1 تا v_n ، المان‌های بردار ستونی \mathbf{v} در نظر گرفته شود، می‌توان با تفکیک عبارات در رابطه فوق، معادله ۱۰ را به شکل

$$\langle \mathbf{v} \rangle^i = \begin{bmatrix} c_1 v_1^i \\ c_2 v_1^{i-1} v_2^1 \\ c_3 v_1^{i-1} v_3^1 \\ \vdots \\ c_{\mathcal{R}(n,i)} v_n^i \end{bmatrix} \quad (11)$$

بازنویسی کرد. اپراتور $\langle \cdot \rangle^i$ ، یک بردار به‌عنوان ورودی دریافت کرده و خروجی آن عبارات تفکیک‌شده بسط مرتبه i ام همان بردار است. برای محاسبه $\langle \mathbf{v} \rangle^i$ از نگاشت $\Phi_v^{i,j}$ استفاده می‌شود که می‌توان به کمک آن مقدار بسط مرتبه i ام بردار \mathbf{v} را به شکل ضرب ماتریس در بردار $\langle \mathbf{v} \rangle^{i-j} = \Phi_v^{i,j} \langle \mathbf{v} \rangle^{i-j}$ به دست آورد درحالی‌که المان‌های نگاشت $\Phi_v^{i,j}$ بر اساس المان‌های بردار $\langle \mathbf{v} \rangle^j$ قابل محاسبه هستند.

رابطه ۱۲ برگرفته از مثال ۱ در مرجع ۴ است که یک عملیات ریاضی بر اساس نگاشت و بسط مرتبه بالا برای محاسبه بسط مرتبه دوم یک بردار با ۳ المان را نمایش می‌دهد.

$$L' = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 v^2 s}{m_0} C_{L\alpha} \sin 2\alpha$$

اکنون، به‌منظور پیاده‌سازی مدل ارائه‌شده در روابط ۱ و ۷ در تئوری کنترل بهینه، تابع هزینه به شکل رابطه ۸ در نظر گرفته می‌شود:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (T_x'^2 + T_z'^2 + R_\alpha \alpha^2 + R_{\alpha_{rate}} \alpha_{rate}^2) dt \quad (8)$$

$$R_{\alpha_{rate}} = 7.5 \left(\frac{180}{\pi} \right)^2$$

$$R_\alpha = 0.03 \left(\frac{180}{\pi} \right)^2$$

که در این مسئله زمان نهایی t_f است. نهایتاً به‌منظور حل این مسئله، باید شرایط اولیه و نهایی نیز تعیین شوند. این پارامترها در رابطه ۹ بیان‌شده‌اند [۵]:

$$\begin{aligned} x_i &= 1000 \text{ m}, & x_f &= 0 \text{ m} \\ z_i &= -4400 \text{ m}, & z_f &= -1 \text{ m} \\ v_{x_i} &= -136.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}, & v_{x_f} &= 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_{z_i} &= 375.88 \frac{\text{m}}{\text{s}}, & v_{z_f} &= 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \alpha_i &= 0 \text{ rad}, & \alpha_f &= 0 \text{ rad}, m_0 = 4.7e + 4 \text{ kg} \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه بالا زیروند i معرف شرایط اولیه و f معرف شرایط نهایی است. به‌این ترتیب برای حل مسئله کنترل بهینه جهت استخراج حل مرجع می‌توان از پارامترهای داده‌شده در رابطه ۱۰ استفاده کرد که مقادیر نامی اولیه و نهایی متغیرهای حالت را نشان می‌دهند. در این بخش، مدل‌سازی ریاضی برای شبیه‌سازی و حل مسئله هدایت ارائه شد. در دو بخش بعد مرور مختصری بر روش بسط مرتبه بالای برداری و روش SDRE ارائه می‌شود که ابزارهای اصلی حل مسئله در این تحقیق هستند.

۳-۲- مروری بر روش بسط مرتبه بالای برداری

پس از ارائه مدل ریاضی در این بخش مفاهیم کلیدی روش بسط مرتبه بالای برداری ارائه می‌شود که برگرفته از [۱۷-۱۹] است. شرح روش بسط مرتبه بالای برداری برای حل مسئله کنترل بهینه، شامل ۲ بخش کلی است. بخش اول، شامل مروری مختصر بر بسط برداری و بخش دوم، دربردارنده نحوه پیاده‌سازی مسئله کنترل بهینه مرتبه بالا با

در اینجا، فرض بر آن است که در مسئله کنترل بهینه رابطه ۱۳، شرایط اولیه و نهایی متغیرهای حالت مقید شده‌اند. هدف استخراج $\delta\lambda$ و δs برای مقادیر عمومی $\delta s(0) = \delta s_0$ است با شرط این که $\delta s(t_f) = \delta s_f = 0$ باشد.

برای یک مقدار مشخص δs_0 ، می‌توان رابطه ۱۵ را که یک مسئله مقدار مرزی با مقادیر جدا از هم است، با استفاده از روش‌های عددی حل کرد؛ اما در صورت تغییر δs_0 ، مسئله برای این مقدار جدید باید مجدداً حل شود. برای برطرف کردن این مشکل فرض می‌شود که $\delta\lambda$ و δs به شکل توابعی نامعین از δs_0 قابل تعریف هستند:

$$\begin{aligned} \delta s &= \delta s(\delta s_0) \\ \delta\lambda &= \delta\lambda(\delta s_0) \end{aligned} \quad (16)$$

در نتیجه برای δz نوشته می‌شود:

$$\delta z = \delta z(\delta s_0) \quad (17)$$

اکنون مشابه با فرض در نظر گرفته شده برای بسط رابطه ۱۴، در اینجا نیز رابطه فوق برحسب سری تیلور بازنویسی می‌شود:

$$\delta z = \sum_{i=1}^m \Psi_i \langle \delta s_0 \rangle^i \quad (18)$$

که در این رابطه Ψ_i ، ماتریس ضرایب سری تیلور است که نامعین و متغیر با زمان می‌باشد. این ضرایب با اصطلاح حساسیت شناخته می‌شوند. به بیان دیگر، با به دست آوردن این ضرایب، به ازای مقادیر مختلف δs_0 می‌توان δz را محاسبه کرده و این ضرایب، حساسیت انحراف متغیرهای حالت و شبه حالت را در نتیجه انحراف اولیه متغیر حالت نشان می‌دهند.

برای به دست آوردن حساسیت‌ها، رابطه ۱۸ در رابطه ۱۵ جایگذاری می‌شود. پس از انجام محاسبات و معادل قرار دادن عبارات با توان‌های برابر، می‌توان دید که δs_0 از محاسبات حذف شده و مجموعه معادلات زیر برای محاسبه حساسیت‌های مرتبه i ام قابل ارائه هستند:

$$\dot{\Psi}_i = \Delta_1 \Psi_i + \Omega_i \quad (19)$$

که در آن، عبارت Ω_i ناهمگن دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ماتریسی ارائه شده برای حساسیت‌هاست. برای $i = 1$ ، این بخش ناهمگن برابر با صفر است و برای مقادیر $i > 1$ ، این مقدار برحسب مقادیر حساسیت‌ها محاسبه شده از مراتب

$$\begin{aligned} \langle v \rangle^2 &= \Phi_v^{2,1} \langle v \rangle^1 \rightarrow \begin{bmatrix} v_1^2 \\ 2v_1 v_2 \\ 2v_1 v_3 \\ v_2^2 \\ 2v_2 v_3 \\ v_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 \\ v_3 & 0 & v_1 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & v_3 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

۲-۳- حل مسئله کنترل بهینه مرتبه بالا

فرض کنید مسئله کنترل بهینه به شکل

$$\dot{x} = f(s, \lambda) \quad (13)$$

$$\dot{\lambda} = g(s, \lambda)$$

قابل نوشتن است. در این مدل فرض شده است که فرمان‌های کنترل بهینه به شکل صریح برحسب متغیرهای حالت و شبه حالت قابل محاسبه و جایگذاری در مسئله هستند. در رابطه ۱۳، s و λ به ترتیب بردار متغیر حالت و شبه حالت با n امان هستند. همچنین توابع f و g تا مرتبه دلخواه m مشتق پذیرند. اکنون با فرض اینکه $z = [s \ \lambda]^T$ است، مجموعه معادلات بالا را می‌توان به شکل رابطه ۱۴ خلاصه کرد.

$$\dot{z} = h(z) \quad (14)$$

در گام بعد، با فرض مشخص بودن مقادیر حل نامی برای s و λ سمت راست و چپ رابطه فوق تا مرتبه دلخواه m با سری تیلور حول حل نامی بسط داده شده و سپس مقادیر مربوط به حل نامی از طرفین معادله حذف می‌شود. در نتیجه:

$$\delta \dot{z} = \sum_{i=1}^m \Delta_i \langle \delta z \rangle^i \quad (15)$$

در رابطه ۱۵، بسط سری تیلور با کمک بسط برداری شرح شده در ابتدای این بخش، نوشته شده است؛ بنابراین Δ_i در این رابطه، ماتریسی با امان‌های متغیر با زمان است که در بردارنده ضرایب سری تیلور متناسب با بردار $\langle \delta z \rangle^i$ است. علاوه بر آن، $\delta z = [\delta s \ \delta \lambda]$ است که طبق تعریف نشان دهنده انحرافات متغیرهای حالت و شبه حالت از مقادیر نامی است.

برای آن که LQR از فرم خطی به فرم غیرخطی تعمیم داده شود بایستی $f(s, u)$ به صورت رابطه ۲۳ نوشته شود:

$$\dot{s}(t) = A(s)s + B(s)u \quad (23)$$

به این فرم، فرم شبه خطی گفته می‌شود. فرم شبه خطی، بدان معناست که یک سیستم غیرخطی را بتوان به فرم یک سیستم خطی بیان کرد با این تفاوت که A و B در اینجا تابعی از متغیرهای حالت یعنی s هستند. نمایش به فرم شبه خطی یکتا نیست؛ یعنی، ماتریس‌های A و B یکتا نیستند. در کل اگر بتوان A_1, A_2 ای یافت که $A_1(s)s = g(s)$ و $A_2(s)s = g(s)$ آنگاه به صورت زیر، $A(s, \alpha)$ نیز می‌تواند به عنوان یک A انتخاب شود:

$$\begin{cases} A_1(s)s = g(s) \\ A_2(s)s = g(s) \end{cases} \quad (24)$$

$$\rightarrow A(s, \alpha) = \alpha A_1(s) + (1 - \alpha)A_2(s)$$

که α می‌تواند هر پارامتر دلخواهی باشد؛ بنابراین، این پارامتر یک درجه آزادی مهم ایجاد می‌کند و همان‌گونه که بیان شد برای آن که معادله ریکاتی جواب یکتا داشته باشد بایستی ماتریس‌های A و B کنترل‌پذیر باشند؛ بنابراین می‌توان α را به گونه‌ای تنظیم کرد که A و B همواره به ازای تمام s ها کنترل‌پذیر بشود.

برای سیستم شبه خطی $\dot{s}(t) = A(s)s + B(s)u$ اگر به ازای تمام s ها مقادیر ویژه A پایدار باشد این بدان معنی نیست که کل سیستم $\dot{s}(t)$ پایدار است. در سیستم‌های خطی A و B تابع s نیستند و از روی مقادیر ویژه A می‌توان گفت که سیستم پایدار است یا خیر. اما برای یک سیستم شبه خطی نمی‌توان از روی مقادیر ویژه A در مورد پایداری تصمیم‌گیری کرد. برای کنترل بهینه سیستم غیرخطی همانند LQR تابع هزینه را به صورت رابطه ۲۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{s^T Q s + u^T R u\} dt \quad Q \geq 0, R > 0 \quad (25)$$

در این صورت همچون LQR سیگنال کنترلی از حل حالت ماندگار معادله جبری ریکاتی به فرم رابطه ۲۶ به دست خواهد آمد:

$$u(t) = -R^{-1}(s)B^T(s)P(s)s(t) \quad (26)$$

با این تفاوت که B, R و P تابعی از s هستند و در معادله جبری ریکاتی نیز ماتریس‌های A, B, R, Q, P وابسته به s

پایین‌تر محاسبه می‌شود. جزئیات بیشتر در رابطه با نحوه محاسبات در مرجع ۲۴ ارائه شده است.

بنابراین برای محاسبه ماتریس‌های حساسیت، با شروع از $i = 1$ می‌توان Ψ_1 را محاسبه کرده و در مرحله بعد پس از محاسبه Ω_2 بر حسب Ψ_1 مقدار Ψ_2 را محاسبه کرد. در نتیجه این مراحل را می‌توان تا محاسبه Ψ_m ادامه داد. در نهایت، با داشتن حساسیت‌ها، با توجه به رابطه ۲۲، می‌توان مقادیر $\delta\lambda$ و δs را به ازای هر δs_0 محاسبه کرد.

در این بخش مرور مختصری بر روش بسط مرتبه بالای برداری بیان و مفهوم بسط برداری شرح داده شد و نحوه پیاده‌سازی مسئله کنترل بهینه و محاسبه حساسیت‌ها مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، در بخش ۴، به بررسی روش SDRE پرداخته می‌شود.

۴- مروری بر روش SDRE

با استفاده از معادلات همپلتونین می‌توان برای سیستم‌های غیرخطی، سیگنال کنترلی بهینه را به دست آورد؛ اما علاوه بر این که معادلات خیلی پیچیده می‌شوند بایستی معادلات را به صورت آفلاین حل کرد و بایستی به صورت حلقه باز سیگنال کنترلی بهینه به سیستم اعمال شود. در ادامه برای سیستم‌های غیرخطی یک روش بهینه آنلاین به نام الگوریتم SDRE که به نوعی تعمیم LQR به سیستم‌های غیرخطی است بیان می‌شود. تنظیم‌کننده خطی درجه دوم (LQR) برای سیستم‌های خطی به فرم رابطه ۲۰ بیان می‌شود:

$$\dot{s}(t) = As(t) + Bu(t)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{s^T Q s + u^T R u\} dt \quad Q \geq 0, R > 0 \quad (20)$$

$$u(t) = -R^{-1}B^T P s(t)$$

که P از معادله جبری ریکاتی معادله ۲۱ به دست می‌آید.

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (21)$$

اثبات می‌شود که اگر A و B کنترل‌پذیر و Q مثبت معین باشد، جواب یکتا برای معادله جبری ریکاتی وجود دارد. در اینجا هدف آن است که LQR را به یک سیستم غیرخطی تعمیم دهیم. در حالت کلی سیستم غیرخطی به فرم رابطه ۲۲ بیان می‌شود:

$$\dot{s}(t) = f(s, u) \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= A(s)s + B(s)u \\ u(t) &= -R^{-1}B^T P(s)s(t) \\ \rightarrow \dot{s} &= A(s)s(t) - B(s)R^{-1}B^T P(s)s(t) \quad (31) \\ &= (A(s) - B(s)R^{-1}B^T P(s))s(t) \\ &= A_{cl}(0) + \varphi(s)\end{aligned}$$

ثابت می‌شود که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(s) = 0 \quad (32)$$

در نتیجه اگر s های نزدیک مبدأ مختصات یعنی نقطه تعادل سیستم در نظر گرفته شود آنگاه تقریباً می‌توان از $\varphi(s)$ با توجه به این که حد آن در صفر معادل صفر است صرف‌نظر کرد؛ بنابراین، در اطراف مبدأ می‌توان نوشت:

$$\dot{s}(t) \cong A_{cl}(0)s(t) \quad (33)$$

که این عبارت یک سیستم خطی است. در اینجا هر چه $\varphi(s)$ بزرگ‌تر باشد بایستی آن قدر به مبدأ مختصات نزدیک شد که $\varphi(s)$ نسبت به $A_{cl}(0)$ به اندازه‌های کوچک شود تا بتوان از آن صرف‌نظر کرد؛ بنابراین، در یک ناحیه هر چند خیلی کوچک در اطراف مبدأ مختصات، دینامیک سیستم حلقه بسته را می‌توان به صورت $\dot{s}(t) \cong A_{cl}(0)s(t)$ تقریب زد. که این عبارت یک سیستم خطی است و پایداری این سیستم توسط مقادیر ویژه $A_{cl}(0)$ مشخص می‌شود. برای محاسبه $A_{cl}(0)$ کافی است در معادله جبری ریکاتی $s(t)$ برابر $s(0)$ قرار گیرد. در این صورت $P(0)$ به دست آمده و در نهایت از روی $P(0)$ طبق فرمول کنترل بهینه $u(t) = -R^{-1}B^T P(s)t$ مقدار u استخراج می‌شود. قبلاً بیان شد که:

$$A_{cl}(x) = A(s) - BR^{-1}B^T P(s) \quad (34)$$

در نتیجه:

$$A_{cl}(0) = A(0) - BR^{-1}B^T P(0) \quad (35)$$

چون $A_{cl}(0)$ از حل یک مسئله LQR به دست می‌آید بنابراین مقادیر ویژه A_{cl} همواره پایدار هستند. بنابراین می‌توان گفت اگر سه شرط بیان شده برآورده شود آنگاه سیستم حلقه بسته به صورت محلی پایدار است. بایستی به این نکته توجه شود که هنگام شبیه‌سازی سیستم حلقه بسته باید شرایط اولیه یا $s(0)$ به نقطه تعادل یا مبدأ مختصات نزدیک باشد. ممکن است با توجه به دینامیک سیستم ناحیه جذب سیستم حلقه بسته خیلی بزرگ و یا حتی برابر کل فضای حقیقی بشود.

هستند؛ بنابراین برای آن که بتوان از LQR برای سیستم‌های شبه خطی نیز استفاده کرد از یک استراتژی استفاده می‌شود. این استراتژی به این صورت است که در زمان صفر، $s(0)$ موجود است. بنابراین $Q(s_0), R(s_0), B(s_0), A(s_0)$ می‌توان $P(s_0)$ را به دست آورد و معادله جبری ریکاتی در زمان صفر به دست می‌آید.

معادله جبری ریکاتی وابسته به حالت (SDRE) به فرم رابطه ۲۷ بیان می‌شود.

$$P(s)A(s) + A^T(s)P(s) + Q(s) - P(s)B(s)R^{-1}(s)B^T(s)P(s) = 0 \quad (27)$$

با حل معادله جبری ریکاتی در زمان $s(0)$ مقدار عبارت $P(0)$ به دست خواهد آمد. از روی $P(0)$ می‌توان $u(0)$ را طبق رابطه ۲۸ به دست آورد:

$$u(t) = -R^{-1}(s)B^T(s)P(s)s(t) \quad (28)$$

با به دست آمدن $u(0)$ مقدار آن به مسئله مورد نظر اعمال می‌شود تا حالت جدید یعنی $s(1)$ به دست آید. با به دست آمدن $s(1)$ مجدداً معادله جبری ریکاتی حل شده و $P(1)$ به دست می‌آید. با محاسبه $P(1)$ طبق رابطه فوق $u(1)$ حاصل می‌شود و همین مراحل تا آخرین زمان تکرار می‌شود. یعنی به صورت آنلاین حالت‌های s در معادله جبری ریکاتی قرار می‌گیرد تا تبدیل به یک معادله مستقل از s شود سپس با حل آن $P(s)$ به دست آمده و با جایگذاری آن در فرمول کنترل بهینه مقدار u بهینه به دست می‌آید. با به دست آمدن u بهینه و اعمال آن به مسئله مورد نظر مجدداً بر اساس s های جدیدی که به دست می‌آیند، معادله ریکاتی حل می‌شود و P به دست آمده از آن مجدداً در u جایگذاری می‌شود و این فرآیند تا آخرین زمان ادامه دارد.

طبق این الگوریتم، این استراتژی، یک روش حلقه بسته و آنلاین است که مزیت مهمی محسوب می‌شود. اگر دینامیک سیستم در حالت کلی به صورت زیر فرض شود:

$$\dot{s}(t) = A(s)s + B(s)u \quad (29)$$

برای ساده‌تر شدن فرض می‌شود که فرمول کنترل بهینه به صورت زیر است و B و R به s وابسته نیستند (هر چند می‌توان آن‌ها را وابسته به s نیز در نظر گرفت:

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(s)s(t) \quad (30)$$

با جایگذاری u در معادله ۲۹، معادله ۳۱ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \psi_1^x \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^x \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^x \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta z &= \psi_1^z \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^z \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^z \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta v_x &= \psi_1^{v_x} \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^{v_x} \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^{v_x} \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta v_z &= \psi_1^{v_z} \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^{v_z} \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^{v_z} \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta \alpha_r &= \psi_1^{\alpha_r} \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^{\alpha_r} \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^{\alpha_r} \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta \lambda_3 &= \psi_1^{\lambda_3} \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^{\lambda_3} \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^{\lambda_3} \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta \lambda_4 &= \psi_1^{\lambda_4} \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^{\lambda_4} \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^{\lambda_4} \langle \delta s_0 \rangle^3 \\
\delta \lambda_5 &= \psi_1^{\lambda_5} \langle \delta s_0 \rangle^1 + \psi_2^{\lambda_5} \langle \delta s_0 \rangle^2 + \psi_3^{\lambda_5} \langle \delta s_0 \rangle^3
\end{aligned} \quad (39)$$

حال با در نظر گرفتن انحرافات اولیه و جایگذاری رابطه ۲۶ در ۳۷ و ۳۸ می‌توان مسیر بهینه و فرمان هدایت بهینه به روش بسط مرتبه بالای برداری را استخراج کرد.

برای حل به روش SDRE ابتدا معادلات حرکت باید با بسط سری تیلور حول مسیر نامی استخراج شده، ساده‌سازی شود. برای این کار با یاری جستن از ریاضیات ماتریسی بسط مرتبه بالا می‌توان سری تیلور مدنظر را تا مرتبه ۳ به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{s} &= A_{n_1} \langle \delta s \rangle^1 + A_{n_2} \langle \delta s \rangle^2 + A_{n_3} \langle \delta s \rangle^3 \\
&+ B_n \delta u
\end{aligned} \quad (40)$$

در این رابطه A_{n_1} تا A_{n_3} ضرایب سری تیلور تا مرتبه سوم نسبت به متغیر حالت انحرافات δs و B_n ضریب سری تیلور معادلات حرکت نسبت به متغیر کنترل انحرافات تا مرتبه ۱ ام است. اکنون با کمک نگاشت مرتبه بالا که شرح آن ارائه شد می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{s} &= \{A_{n_1} + A_{n_2} \Phi_{\delta s}^{2,1} + A_{n_3} \Phi_{\delta s}^{3,2}\} \langle \delta s \rangle^1 \\
&+ B_n \delta u
\end{aligned} \quad (41)$$

اکنون با فرض اینکه،

$$\bar{A}_n = A_{n_1} + A_{n_2} \Phi_{\delta s}^{2,1} + A_{n_3} \Phi_{\delta s}^{3,2} \quad (42)$$

می‌توان فرم خطی سازی ظاهری معادلات را به شکل رابطه ۴۳ ارائه کرد.

$$\delta \dot{s} = \bar{A}_n \delta s + B_n \delta u \quad (43)$$

و نهایتاً با تعریف یک تابع هزینه مربعی با ضرایب ثابت Q و R می‌توان فرمان‌های اصلاحی هدایت با روش SDRE را با تعریف تابع هزینه و اعمال اصل بهینگی به شکل زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \delta s^T Q \delta s + \delta u^T R \delta u \\
\delta u &= -R^{-1} B_n^T P \delta s
\end{aligned} \quad (44)$$

۵- حل با روش مرتبه بالا و SDRE

پس از مرور روش بسط مرتبه بالای برداری و SDRE و بیان کاربرد آن برای حل مسئله کنترل بهینه، در ادامه روند استخراج قانون هدایت با کمک این دو روش برای مسئله فرود ارائه می‌شود. در گام اول، حل نامی مسئله فرود با توجه به مجموعه معادلات ۷، ۸ و همچنین شرایط اولیه و نهایی داده‌شده در معادله ۹ با کمک روش عددی استخراج می‌شود. برای استخراج زمان نهایی، این پارامتر آزاد در نظر گرفته شده است و در نتیجه مقدار نامی زمان نهایی t_f برابر $30/7105$ ثانیه به دست آمده است. برای حل به روش بسط مرتبه بالای برداری، در گام بعد حساسیت‌ها تا مرتبه سوم برای این مدل، استخراج می‌شود. اکنون با توجه به،

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T_x'} &= 0 \rightarrow T_x' = -\lambda_3 \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T_z'} &= 0 \rightarrow T_z' = -\lambda_4
\end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_{rate}} = 0 \rightarrow \alpha_{rate} = -\frac{\lambda_5}{R_{\alpha_{rate}}}$$

می‌توان فرمان‌های بهینه را استخراج کرد. برای این کار، با داشتن $\delta s_0 = [\delta x_0 \quad \delta z_0 \quad \delta v_{x_0} \quad \delta v_{z_0} \quad \delta \alpha_0]^T$ می‌توان مقادیر δx ، δz ، δv_x ، δv_z ، $\delta \alpha$ و همچنین $\delta \lambda_3$ ، $\delta \lambda_4$ و $\delta \lambda_5$ را برای تمامی لحظات پرواز محاسبه کرد. پس از آن با توجه به،

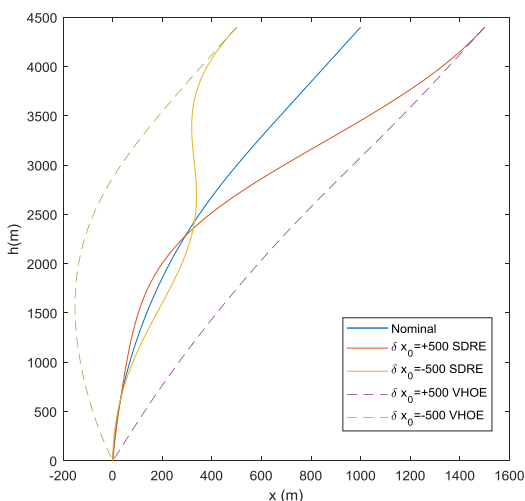
$$\begin{aligned}
x_r &= x_n + \delta x \\
z_r &= z_n + \delta z \\
v_{x_r} &= v_{x_n} + \delta v_x \\
v_{z_r} &= v_{z_n} + \delta v_z \\
\alpha_r &= \alpha_n + \delta \alpha
\end{aligned} \quad (37)$$

و

$$\begin{aligned}
T_x' &= -(\lambda_{3n} + \delta \lambda_3) \\
T_z' &= -(\lambda_{4n} + \delta \lambda_4) \\
\alpha_{rate} &= -\frac{(\lambda_{5n} + \delta \lambda_5)}{R_{\alpha_{rate}}}
\end{aligned} \quad (38)$$

مسیر مرجع و فرمان‌های هدایت متناسب با انحراف اولیه محاسبه می‌شود. در رابطه ۳۷ و ۳۸، زیروند n و r برای متغیرهای حالت و شبه حالت، به ترتیب معرف حل مرجع و حل نامی هستند. در روابط فوق می‌توان متغیرهای اصلاحی را با کمک حساسیت‌های محاسبه شده تا مرتبه ۳ به شکل زیر محاسبه کرد:

بهینه را جایگزین می‌کند. به منظور تکمیل ارزیابی و مقایسه دو روش، مجموعه‌ای از شبیه‌سازی‌ها با انحرافات اولیه متنوع برای هر دو حالت در نظر گرفته شده است. برای این کار، بازه تغییرات برای انحراف اولیه در برد از ۵۰۰- تا ۵۰۰ متر و با گام ۱۰۰ متر، برای ارتفاع از ۳۰۰- متر تا ۳۰۰ متر با گام ۱۰۰ متر، برای انحراف سرعت اولیه افقی و عمودی از ۳۰- تا ۳۰ متر بر ثانیه و با گام‌ها ۱۰ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده و تمام ترکیبات مختلف این انحرافات شبیه‌سازی شده‌اند. نتیجه شبیه‌سازی به شکل خطای نهایی در نقطه فرود در نمودارهای ۳ بعدی ۷ و ۸ ارائه شده است. در این نمودارها نمادهای قرمز مربوط به هدایت با روش SDRE و آبی، هدایت با روش مرتبه بالا است. می‌توان دید که دقت نقطه فرود در روش مرتبه بالا به مراتب بالاتر از روش SDRE هست.



شکل (۳): نمودار مقایسه مسیر حرکت با انحراف در شرایط اولیه در راستای x به اندازه ۵۰۰ متر و ۵۰۰- متر برای دو روش SDRE و VHOE

که در این رابطه P از حل لحظه‌ای معادله ریکاتی جبری حاصل می‌شود و سپس می‌توان با جمع مقدار اصلاحی فرمان هدایت با مقدار نامی، فرمان هدایت جدید را لحظه به لحظه استخراج کرد:

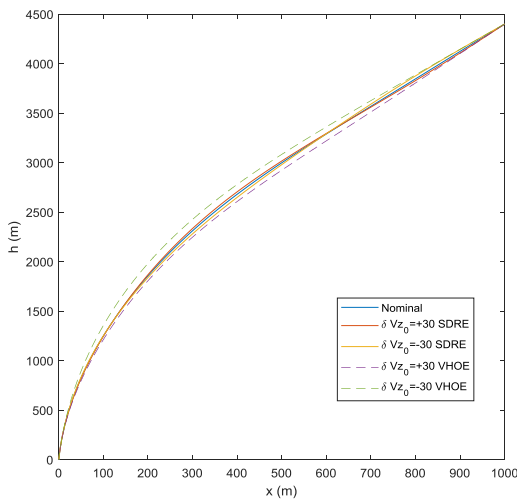
$$u_r = u_n + \delta u \quad (45)$$

در این بخش با دو روش بسط مرتبه بالای برداری و روش SDRE نحوه اصلاح و به‌روزرسانی فرمان هدایت در نتیجه انحرافات، ارائه شد. ذکر این نکته ضروری است که در روش مرتبه بالا نه تنها فرمان‌های هدایت اصلاح می‌شوند بلکه هم‌زمان مسیر حرکت اصلاحی نیز در دسترس است. در بخش بعد، فرایند فرود بوستر عمود نشین با این دو روش در شبیه‌سازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۶- تحلیل نتایج شبیه‌سازی

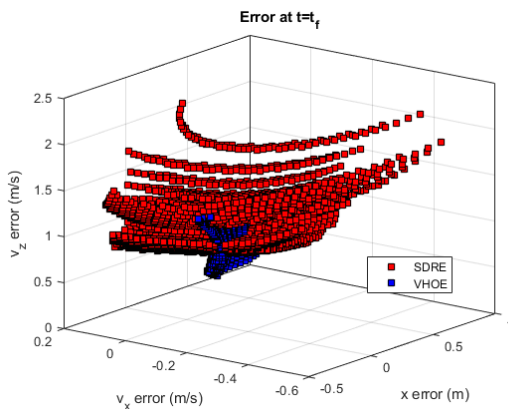
در این بخش جهت ارزیابی عملکرد دو روش بیان شده، ابتدا ۸ سناریو در نظر گرفته شده است. در سناریوی اول و دوم فرض می‌شود که انحراف اولیه تنها در برد وجود دارد و معادل با ۵۰۰ و ۵۰۰- متر است. نتایج این شبیه‌سازی‌ها برای هر دو روش مرتبه بالا و SDRE در شکل ۳ آورده شده است. همچنین در سناریوی ۳ و ۴ فرض شده که انحراف اولیه تنها در ارتفاع بوده و به ترتیب معادل با ۳۰۰ و ۳۰۰- متر است. نتایج این شبیه‌سازی در شکل ۴ ارائه شده است. می‌توان دید که در هر ۴ سناریو تفاوت کیفی میان روش مرتبه بالا و SDRE وجود دارد. روش SDRE تمایل دارد که به مسیر نامی همگرا شود حال آنکه در روش مرتبه بالا مسیر حرکت بهینه جدیدی جایگزین شده و بوستر از مسیر بهینه دیگری فرود خواهد آمد.

در ادامه ۴ سناریوی دیگر در نظر گرفته شده است. در سناریوی ۵ و ۶ فرض شده است که انحراف اولیه سرعت در راستای برد به ترتیب معادل با ۳۰ و ۳۰- متر بر ثانیه بوده و به‌طور مشابه در سناریوی ۷ و ۸ فرض شده است که انحراف سرعت در راستای عمودی معادل با ۳۰ و ۳۰- متر بر ثانیه است. نتایج این شبیه‌سازی‌ها در شکل ۵ و ۶ ارائه شده است. مجدداً تا حد زیادی می‌توان دید که روش SDRE تمایل به تعقیب مسیر دارد و روش بسط مرتبه بالای برداری مسیر

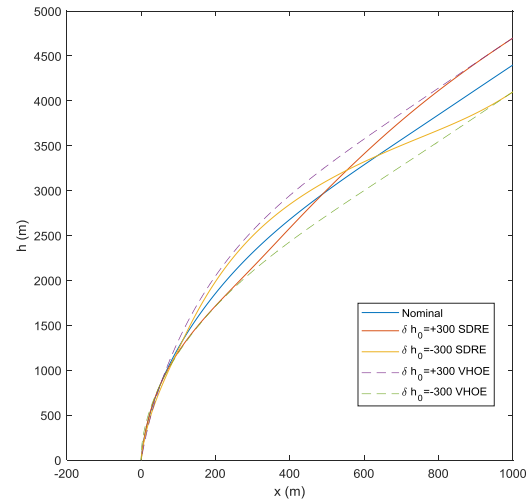


شکل (۶): نمودار مقایسه مسیر حرکت با انحراف در شرایط اولیه برای سرعت در راستای Z به اندازه ۳۰ متر و -۳۰ متر برای دو روش SDRE و VHOE

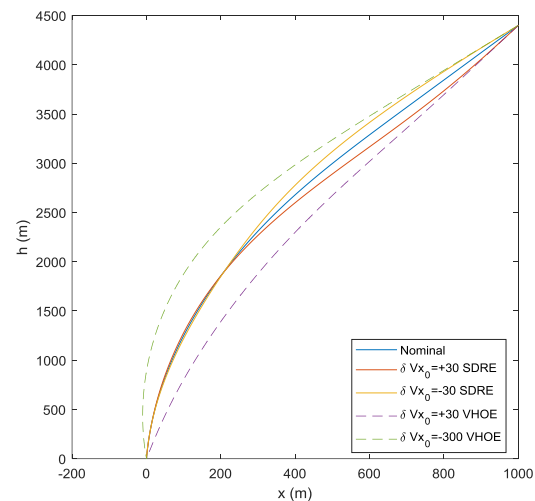
در ادامه در جداول (۱) و (۲) داده‌های آماری هر دو روش بررسی شده‌اند. ملاحظه می‌شود که مقدار میانگین تابع هزینه روش مرتبه بالا، به مراتب کمتر از روش SDRE است. با این وجود مقدار میانگین خطاها در سرعت عمودی برای روش مرتبه بالا کمتر بوده و در سایر پارامترها نتایج تا حدودی به نفع روش SDRE است. با این حال، انحراف معیار پارامترهای آماری برای خطای متغیرهای حالت نشان می‌دهند که روش مرتبه بالا به مراتب کیفیت بالاتری دارد.



شکل (۷): نمودار مقایسه توزیع خطای برد و سرعت افقی و عمودی برای دو روش SDRE و VHOE



شکل (۴): نمودار مقایسه مسیر حرکت با انحراف در شرایط اولیه در راستای Z به اندازه ۳۰۰ متر و -۳۰۰ متر برای دو روش SDRE و VHOE



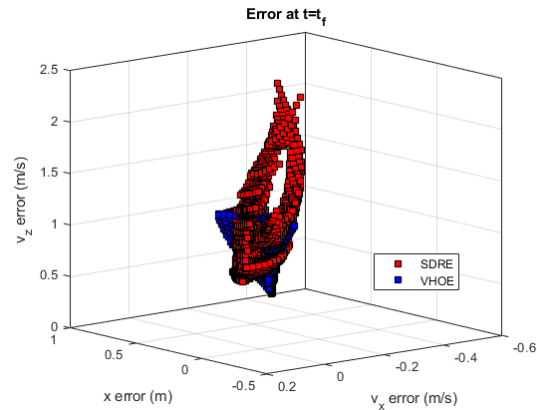
شکل (۵): نمودار مقایسه مسیر حرکت با انحراف در شرایط اولیه برای سرعت در راستای X به اندازه ۳۰ متر و -۳۰ متر برای دو روش SDRE و VHOE

بالای برداری مسیر بهینه جدید، جایگزین مسیر نامی می-شود و هیچ‌گونه تمایلی مبنی به همگرایی به مسیر نامی وجود ندارد. با این وجود با بررسی نتایج شبیه‌سازی مشاهده شد که خطای نقطه فرود روش بسط مرتبه بالای برداری به مراتب کوچک‌تر از روش SDRE است. به خصوص این موضوع مشخصاً با بررسی انحراف معیار خطا در نقطه فرود مشخص‌تر است. مقدار میانگین خطای روش SDRE در خطای برد و سرعت افقی بهتر از روش VHOE است در حالی که خطای سرعت عمودی روش VHOE کمتر از روش SDRE است. ذکر این نکته ضروری است که در هر دو روش مقدار میانگین خطاها کوچک هستند و عملاً می‌توان گفت از دیدگاه میانگین خطاها هر دو روش عملکرد مناسبی دارند؛ اما نکته دیگر انحراف معیار خطاهاست که بایستی مورد توجه قرار گیرد. انحراف معیار خطاها در روش VHOE به مراتب بهتر از روش SDRE است و برای روش SDRE، انحراف معیار تقریباً بین ۱/۵ تا ۲ برابر روش VHOE است. نکته مهم‌تر، مقدار تابع هزینه در دو روش است. با ارائه نتایج آماری دیده شد که مقدار تابع هزینه در روش SDRE بسیار بیشتر از روش مرتبه بالا است چراکه در این روش تمایل به همگرایی به مسیر نامی وجود دارد و نه جایگزینی آن با مسیری جدید و بهینه.

در مجموع عملکرد دو روش را از چند جنبه می‌توان بررسی کرد و جمع‌بندی نتایج را ارائه نمود. جنبه اول، خطاهای نقطه فرود است که مشاهده می‌شود مقدار میانگین خطاهای دو روش بسیار کوچک است و علاوه بر آن، انحراف معیار خطاهای روش VHOE از روش SDRE به مراتب کمتر است. از جنبه تابع هزینه نیز، مشاهده شد که برتری روش VHOE به روش SDRE انکارناپذیر است. در پایان می‌توان دید که روش VHOE گزینه مناسب‌تری برای حل مسئله فرود عمودی بوستر است.

۸- فهرست علائم

$f(\dots)$	تابع عمومی غیرخطی
g	شتاب جاذبه (متر بر مجذور ثانیه)
g_0	شتاب جاذبه در ارتفاع صفر (متر بر مجذور ثانیه)
m_0	جرم اولیه (کیلوگرم)



شکل (۸): نمودار مقایسه توزیع خطای برد و سرعت افقی و عمودی برای دو روش SDRE و VHOE

جدول (۱): مقایسه مقدار میانگین خطا در دو روش SDRE و VHOE

روش	$x_f err.$	$v_{x_f} err.$	$v_{z_f} err.$	J_{total}
SDRE	۰/۱۳۳۳	-۰/۰۰۶	۱/۰۱۲	۵۰۷۰/۱
VHOE	۰/۲۰۵۰	-۰/۰۰۸	۰/۹۲۷	۲۸۴۶/۱

جدول (۲): مقایسه مقدار انحراف معیار خطا در دو روش SDRE و VHOE

روش	$x_f err.$	$v_{x_f} err.$	$v_{z_f} err.$	J_{total}
SDRE	۰/۲۵۰	۰/۱۳۰	۰/۲۶۶	۲۶۹۸/۴
VHOE	۰/۱۱۲۴	۰/۰۱۲۹	۰/۱۵۷۸	۱۳۲/۵

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق، پس از مروری بر روش‌های مختلف مرتبه بالا و همچنین روش SDRE، مدل‌سازی ریاضی برای مسئله فرود یک بوستر عمود نشین با قابلیت استفاده مجدد ارائه شد. سپس روش بسط مرتبه بالای برداری و نحوه استفاده از آن در مسائل کنترل بهینه مختصراً مرور شد و در ادامه تحقیق، کلیات روش SDRE بیان و توصیف شد. پس از آن قانون هدایت برای مسئله فرود بوستر با هر دو روش بسط مرتبه بالای برداری و SDRE استخراج و در ادامه شبیه‌سازی‌های کاملی برای ارزیابی و مقایسه این دو روش انجام شد. با مشاهده نتایج می‌توان دید که روش SDRE تمایل به تعقیب مسیر مرجع دارد. حال آنکه در روش بسط مرتبه

- [3] Swaminathan S, Ghose D, editors. Real time powered descent guidance algorithm for mars pinpoint landing with inequality constraints. AIAA Scitech 2020 Forum; 2020.
- [4] Anglim KSG. Minimum-fuel optimal trajectory for reusable first-stage rocket landing using Particle Swarm Optimization: California State University, Long Beach; 2016.
- [5] Li Y, Chen W, Zhou H, Yang L. Conjugate gradient method with pseudospectral collocation scheme for optimal rocket landing guidance. Aerospace Science and Technology. 2020;104:105999.
- [6] Guibout VM, Scheeres DJ. Solving two-point boundary value problems using generating functions: Theory and Applications to optimal control and the study of Hamiltonian dynamical systems. arXiv preprint math/0310475. 2003.
- [7] Guibout VM, Scheeres DJ. Solving two-point boundary value problems using generating functions: Theory and applications to astrodynamics. Modern Astrodynamics. 2006:53-105.
- [8] Guibout VM, Scheeres DJ. Solving relative two-point boundary value problems: Spacecraft formulation flight transfers application. Journal of guidance, control, and dynamics. 2004;27(4):693-704.
- [9] Di Lizia P, Armellin R, Ercoli-Finzi A, Berz M. High-order robust guidance of interplanetary trajectories based on differential algebra. Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications. 2008;1(1):43-57.
- [10] Di Lizia P, Armellin R, Bernelli-Zazzera F, Berz M. High order optimal control of space trajectories with uncertain boundary conditions. Acta Astronautica. 2014;93:217-29.
- [11] Di Lizia P, Armellin R, Morselli A, Bernelli-Zazzera F. High order optimal feedback control of space trajectories with bounded control. Acta Astronautica. 2014;94(1):383-94.
- [12] Wittig A, Armellin R. High order transfer maps for perturbed Keplerian motion. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2015;122(4):333-58.
- [13] Vetrivano M, Vasile M. Analysis of spacecraft disposal solutions from LPO to the Moon with high order polynomial expansions. Advances in Space Research. 2017;60(1):38-56.
- [14] Sun Z-J, Di Lizia P, Bernelli-Zazzera F, Luo Y-Z, Lin K-P. High-order state transition polynomial with time expansion based on differential algebra. Acta Astronautica. 2019;163:45-55.
- [15] Morselli A, Armellin R, Di Lizia P, Zazzera FB. A high order method for orbital conjunctions

سطح مشخصه (مجذور متر)	s
زمان نهایی (ثانیه)	t_f
فرمان کنترل بهینه	u
سرعت (متر بر ثانیه)	v
سرعت افقی (متر بر ثانیه)	v_x
سرعت عمودی (متر بر ثانیه)	v_z
برد (متر)	x
قرینه ارتفاع (متر)	z
ماتریس ضریب متغیر کنترل	B
ضریب پسای مینا	C_{D0}
مشتق ضریب پسا (بر رادیان)	$C_{D\alpha}$
مشتق ضریب برا (بر رادیان)	$C_{L\alpha}$
پسا	D
پسای تغییر یافته (بر کیلوگرم)	D'
همیلتونین	H
ضریب ویژه (ثانیه)	I_{sp}
تابع هزینه	J
برا	L
برای تغییر یافته (بر کیلوگرم)	L'
شعاع زمین (متر)	R_E
وزن زاویه حمله	R_α
وزن نرخ زاویه حمله	$R_{\alpha_{rate}}$
نیروی پیشران (نیوتن)	T
نیروی پیشران در راستای افق (نیوتن)	T_x
نیروی پیشران در راستای عمود (نیوتن)	T_z
زاویه حمله (رادیان)	α
نرخ زاویه حمله (رادیان بر ثانیه)	α_{rate}
زاویه مسیر (رادیان)	γ
انحراف	δ
متغیر شبه حالت	λ
چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)	ρ
چگالی در سطح دریا (کیلوگرم بر مترمکعب)	ρ_0

۹- مراجع

- [1] Jones H, editor The recent large reduction in space launch cost 2018: 48th International Conference on Environmental Systems.
- [2] Banerjee A, Padhi R, editors. An optimal explicit guidance algorithm for terminal descent phase of lunar soft landing. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference; 2017.

- [27] Wernli A, Cook G. Suboptimal control for the nonlinear quadratic regulator problem. *Automatica*. 1975;11(1):75-84.
- [28] VADALI S, editor Examination of the optimal nonlinear regulator problem. Guidance, Navigation and Control Conference; 1988.
- [29] Banks S, Mhana K. Optimal control and stabilization for nonlinear systems. *IMA journal of mathematical control and information*. 1992;9(2):179-96.
- [30] Gong C, Thompson S. A comment on 'Stabilization and optimal control for nonlinear systems'. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 1995;12(4):395-8.
- [31] Tsiotras P, Corless M, Rotea M. Counterexample to a recent result on the stability of nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 1996;13(2):129-30.
- [32] Mracek CP, Cloutier JR, editors. Missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*; 1996.
- [33] Mracek C, Cloutier J, Cloutier J, Mracek C, editors. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method. Guidance, Navigation, and Control Conference; 1997.
- [34] Wise KA, Sedwick JL, editors. Nonlinear control of agile missiles using state dependent Riccati equations. *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat No 97CH36041)*; 1997: IEEE.
- [35] Stansbery D, Cloutier J, editors. Nonlinear, hybrid bank-to-turn/skid-to-turn missile autopilot design. *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*; 2001.
- [36] Mracek CP. SDRE autopilot for dual controlled missiles. *IFAC Proceedings Volumes*. 2007;40(7):750-5.
- [37] ÇLimen T. A generic approach to missile autopilot design using state-dependent nonlinear control. *IFAC Proceedings Volumes*. 2011;44(1):9587-600.
- [38] Cloutier J, Stansbery D, editors. All-aspect acceleration-limited homing guidance. *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*; 1999.
- [39] Ratnoo A, Ghose D. State-dependent Riccati-equation-based guidance law for impact-angle-constrained trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2009;32(1):320-6.
- [40] Vaddi S, Menon PK, Ohlmeyer EJ. Numerical state-dependent Riccati equation approach for missile integrated guidance control. *Journal of analysis: sensitivity to initial uncertainties*. *Advances in Space Research*. 2014;53(3):490-508.
- [16] Morselli A, Armellin R, Di Lizia P, Zazzera FB. A high order method for orbital conjunctions analysis: Monte Carlo collision probability computation. *Advances in Space Research*. 2015;55(1):311-33.
- [17] Moghadasian M, Roshanian J. Optimal Landing of Unmanned Aerial Vehicle Using Vectorised High Order Expansions Method. *Modares Mechanical Engineering*. 2019;19(11):2761-9.
- [18] Moghadasian M, Roshanian J. Continuous maneuver of unmanned aerial vehicle using High Order Expansions method for optimal control problem. *Modares Mechanical Engineering*. 2018;17(12):382-90.
- [19] Moghadasian M, Roshanian J. Approximately optimal manoeuvre strategy for aero-assisted space mission. *Advances in Space Research*. 2019;64(2):436-50.
- [20] Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey. *IFAC Proceedings Volumes*. 2008;41(2):3761-75.
- [21] Pearson J. Approximation methods in optimal control I. Sub-optimal control. *International Journal of Electronics*. 1962;13(5):453-69.
- [22] Cloutier JR, D'Souza CN, Mracek CP, editors. Nonlinear regulation and nonlinear H_{∞} control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory. *Proceedings of the international conference on nonlinear problems in aviation and aerospace*; 1996: Embry Riddle University.
- [23] Cloutier J, D'Souza C, Mracek C, editors. Nonlinear regulation and nonlinear H_{∞} control via the state-dependent Riccati equation technique: Part2 Examples. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*; 1996.
- [24] Cloutier JR, editor State-dependent Riccati equation techniques: an overview. *Proceedings of the 1997 American control conference (Cat No 97CH36041)*; 1997: IEEE.
- [25] Mracek CP, Cloutier JR. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. *International Journal of robust and nonlinear control*. 1998;8(4-5):401-33.
- [26] Cloutier JR, Stansbery DT, editors. The capabilities and art of state-dependent Riccati equation-based design. *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat No CH37301)*; 2002: IEEE.

- guidance, control, and dynamics. 2009;32(2):699-703.
- [41] Ewing CM. An analysis of a new nonlinear estimation technique: The state-dependent Riccati equation method: University of Florida; 1999.
- [42] Parrish DK, Ridgely DB, editors. Attitude control of a satellite using the SDRE method. Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat No 97CH36041); 1997: IEEE.
- [43] Hammett KD, Hall CD, Ridgely DB. Controllability issues in nonlinear state-dependent Riccati equation control. Journal of guidance, control, and dynamics. 1998;21(5):767-73.
- [44] Stansbery DT, Cloutier JR, editors. Position and attitude control of a spacecraft using the state-dependent Riccati equation technique. Proceedings of the 2000 American Control Conference ACC (IEEE Cat No 00CH36334); 2000: IEEE.
- [45] Cloutier JR, Zipfel PH, editors. Hypersonic guidance via the state-dependent Riccati equation control method. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications (Cat No 99CH36328); 1999: IEEE.
- [46] Harman RR, Bar-Itzhack IY. Pseudolinear and state-dependent Riccati equation filters for angular rate estimation. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1999;22(5):723-5.
- [47] Chang I, Park S-Y, Choi K-H. Decentralized coordinated attitude control for satellite formation flying via the state-dependent Riccati equation technique. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2009;44(8):891-904.
- [48] Lin L-G, Xin M. Computational enhancement of the SDRE scheme: general theory and robotic control system. IEEE Transactions on Robotics. 2020;36(3):875-93.
- [49] Lin L-G. Computationally Improved State-Dependent Riccati Equation Scheme for Nonlinear Benchmark System. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2020;26(2):1064-75.



Comparing Performance of Vectorized High Order Expansions and SDRE Method for Vertical Landing Mission of Booster

Morteza Sharafi¹ , Nasser Rahbar^{2*} , Ali Moharrampour³ , Abdorreza Kashaninia³

¹ Ph.D. Student, Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

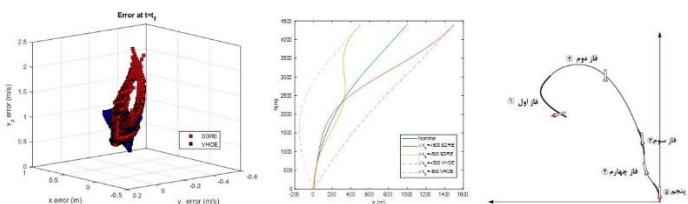
² Associate Professor, Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

³ Assistant Professor, Faculty of Electrical & Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- High order terms have significant effect on the performance of guidance law.
- SDRE method converges to the nominal path.
- In VHOE method, optimal trajectory and command are replaced with respect to the initial deviations.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 24 May 2022

Received in revised form: 23 June 2022

Accepted: 22 July 2022

Available online: 15 August 2022

*Correspondence:

rahbar_nas@mut.ac.ir

How to cite this article:

M. Sharafi, N. Rahbar, A.R. Kashaninia, A. Moharrampour. Comparing performance of vectorized high order expansions and sdre method for vertical landing mission of booster. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(3):69-85.

Keywords:

Vectorized High Order Expansions
Non-linear Optimal Control
Booster Landing
Optimal Guidance
SDRE

ABSTRACT

In this research the main goal is to compare the performance of Vectorized High Order Expansions and SDRE method for vertical landing of booster. To this end, at first a comprehensive study of references related to both Vectorized High Order and SDRE method has been performed. Then, the Vectorized High Order Expansions method and the implementation in optimal control problems has been introduced. After that, the SDRE method has been reviewed briefly, and the landing problem has been solved using both methods. To evaluate the performance, a set of various simulations have been performed for both methods and with respect to different initial deviations. By means of simulation results, the performance of both method is studied with regard to landing point errors. To achieve this, statistical results of terminal state errors have been calculated for both method with respect to different initial deviation to evaluate and compare both method, quality-wise.

* Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Imam Hossein University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.

