



تحلیل کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و ضخیم تحت بار محوری و فشار خارجی بر مبنای

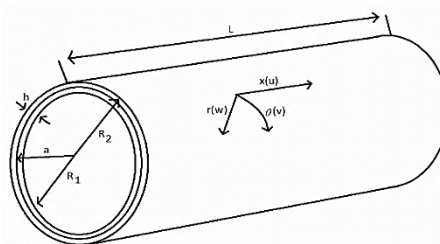
نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم

محمد کمالی‌روستا^۱ ID، احمد مامندی^{۲*} ID

^۱ کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

^۲ دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- مدل‌سازی پوسته تحت بار کمانشی در نرم‌افزار المان محدود ANSYS انجام شده است.
- دقت نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل برای پیش‌بینی بار کمانشی ناشی از بار محوری و فشار خارجی پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم با یکدیگر و با منابع موجود مقایسه شده‌اند.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۱۱

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۱۱

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۳

ارائه برخط: ۱۴۰۰/۱۰/۲۰

*نویسنده مسئول:

ahmad.mamandi@iau.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

پوسته استوانه‌ای

جدار نازک

جدار ضخیم

کمانش محوری

کمانش محیطی

نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول

نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم

چکیده

در این مقاله، معادلات تعادل کوپل حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای جدار نازک و ضخیم بر مبنای نظریه‌های کلاسیک غشایی و تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) و مرتبه سوم (TSDT) در نظریه الاستیسیته سه‌بعدی برای شرایط مرزی ساده با توجه شکل موده‌های کمانشی برای جابجایی‌های محوری، محیطی و شعاعی پوسته تحت بارهای محوری فشاری و فشار خارجی استخراج شده‌اند. سپس، دستگاه معادلات حاکم بر میدان تغییر مکان‌های طولی، محیطی و شعاعی پوسته با روش حل عددی برای محاسبه بار بحرانی کمانش محوری و محیطی پوسته حل شده‌اند. همچنین، برای صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده، مدل‌سازی غیرخطی پوسته تحت بار کمانشی در نرم‌افزار المان محدود ANSYS انجام شده است. دقت نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل برای پیش‌بینی بار کمانشی ناشی از بار محوری و فشار خارجی پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم با یکدیگر و با منابع موجود مقایسه شده‌اند.

۱- مقدمه

سازه‌ها، معیار مقاومت در برابر کمانش نیز به‌عنوان اصلی‌ترین معیار پایداری الاستیک در ملاحظات طراحی پوسته‌ها مدنظر قرار گرفته است. پدیده کمانش زمانی اتفاق می‌افتد که انرژی کرنشی که به‌صورت غشایی در جسم ذخیره شده قابلیت تبدیل به انرژی خمشی را پیدا کند. در این حالت با افزایش تغییر شکل خمشی بسیار زیاد سازه امکان خرابی و یا ویرانی آن پیش‌بینی می‌گردد؛ بنابراین تخمین بارهای کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای در شرایط مختلف کاربرد داشته و پیش‌بینی رفتار کمانشی این سازه‌ها می‌تواند به طراحی بهینه و جلوگیری از واماندگی آن‌ها، کمک فراوانی نماید. در زیر به برخی از مقالات چاپ‌شده در زمینه تحلیل کمانش پوسته‌های جدار نازک و ضخیم اشاره شده است.

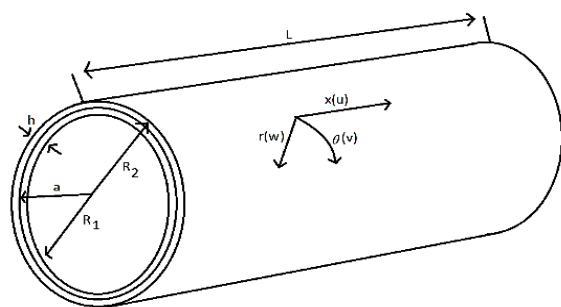
کمانش پوسته در حالت دوبعدی و کرنش صفحه‌ای تحت فشار جانبی خارجی و بار کمانشی محوری برای پوسته‌های جدار نازک و ضخیم در [۱ و ۲] ارائه شده‌اند. دنیلسون و سیموند [۳] تحقیقات گسترده‌ای برای مواد همسانگرد تحت بار فشاری محوری انجام دادند. همچنین به تحلیل سه‌بعدی پوسته‌های جدار ضخیم ارتوتروپی کلی برای که علاوه بر در نظر گرفتن یک ساختار ارتوتروپی کلی برای مواد، یک فرمولاسیون کلاسیک دیگر یعنی فرمولاسیون تیموشنکو و گر را مورد مطالعه قرار دادند. فلوگه [۴] تحقیقات گسترده‌ای در زمینه کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و نظریه کلاسیک و مرتبه بالا انجام داد. کاردوماتس [۵] با استفاده از حل الاستیسیته استاندارد، مسائل کمانش را برای پوسته‌های ارتوتروپ تحت فشار خارجی در حالت دوبعدی و با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته‌ها مورد مطالعه قرار داد. برای بررسی اثر ضخامت، او پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم به‌طور عرضی همسانگرد تحت فشار محوری را بررسی کرد. میرفخرایی و ردیکاپ [۶] تحلیل کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک را با استفاده از روش حل عددی کوادریچر تفاضلی (DQM) انجام دادند. ردیکاپ و ماکول [۷] با استفاده از روش DQ بار کمانش پنل استوانه‌ای را بر اساس نظریه کلاسیک پوسته بررسی کردند. در سال ۲۰۱۴، اکبری

امروزه در بخش‌های مختلف مهندسی استفاده از پوسته‌های استوانه‌ای در سازه‌های جدار نازک و ضخیم بسیار معمول است. این پوسته‌ها در ساخت مخازن، سازه‌های دریایی و قطعات استفاده شده در صنایع هوافضایی، صنایع دریایی، صنایع نظامی و نفت و گاز به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. این پوسته‌های استوانه‌ای در سازه‌های زیرسطحی دریایی و هوافضایی مانند بدنه زیردریایی‌ها، بدنه موشک‌ها و راکت‌ها نیز به کار می‌روند. این پوسته‌ها معمولاً تحت تأثیر فشار هیدرواستاتیک و یا فشار و نیروی پسای ناشی از جریان سیال خارجی پیرامون خود قرار می‌گیرند. از سوی دیگر این پوسته‌ها تحت تأثیر نیروی پیشران حرکتی می‌توانند قرار داشته باشند. عکس‌العمل این نیروی پیشران حرکتی به همراه نیروی پسای ناشی از جریان سیال خارجی و یا فشار بیرونی وارد بر پوسته می‌تواند موجب کمانش محوری و یا محیطی بر روی سازه پوسته استوانه‌ای گردد؛ بنابراین پیش‌بینی بار بحرانی کمانشی سازه پوسته تحت تأثیر این نوع بارگذاری‌ها و شناخت موده‌های کمانشی دارای اهمیت بسیاری در تحلیل سازه و از منظر طراحی آن می‌باشد. از آنجایی‌که فرایندهای طراحی مهندسی نیاز به ارزیابی ایمنی کارکرد سازه دارد، بسیاری از محققان در سال‌های اخیر تلاش کرده‌اند عواملی را که باعث ایجاد پدیده کمانش که تحت اثر نیروهای فشاری ایجاد می‌شود بررسی کنند. در این راستا، برای تحلیل می‌توان از روش‌های تحلیلی و عددی بهره برد. در حقیقت به علت انحنای صفحه میانی، پوسته‌ها دارای مقاومت زیادی برای هر دو بارگذاری داخل صفحه‌ای و خمشی می‌باشند. کاربردهای گسترده پوسته‌های استوانه‌ای در زمینه‌های مختلف مهندسی موجب گشته تحلیل مقاومت پایداری این سازه‌ها مورد توجه محققان زیادی قرار بگیرد. از جمله مسائل پایداری مطرح شده در مورد پوسته، ظرفیت تحمل بار نهایی محوری و یا محیطی فشاری یا همان پدیده کمانش کلی سازه است. در گذشته، معیار مقاومت در برابر تسلیم در اغلب طراحی‌ها سازه‌ها به‌عنوان معیار اصلی مورد توجه قرار می‌گرفت؛ اما به‌تدریج با مطالعات انجام شده و شناخت رفتار مکانیکی

سپس، بر مبنای نظریه الاستیسیته سه بعدی معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم با در نظر گرفتن بار کمانشی فشاری یکنواخت خارجی و شرایط مرزی استخراج شده‌اند. در ادامه، بر مبنای نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) و مرتبه سوم (TSDT) و شکل پاسخ هارمونیک با توجه به شرط مرزی، معادلات حاکم بر حسب دامنه‌های کمانش بازنویسی می‌گردند. در روش حل تحلیلی از حل غیربندیی معادله دترمینانی حاکم بر دامنه‌های کمانش، فشار کمانشی بحرانی محاسبه می‌گردد. نتایج به دست آمده از تحلیل برای محاسبه بار کمانشی پوسته‌های جدار نازک و ضخیم بر مبنای نظریه‌های FSFT و TSDT با استفاده از کدهای کامپیوتری تهیه شده در محیط برنامه ریاضی MATLAB و حل عددی FEM با استفاده نرم افزار المان محدود ANSYS با یکدیگر و با مراجع موجود مقایسه و بررسی شده‌اند.

۲- استخراج معادلات حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای تحت بار محوری

در شکل ۱، پوسته استوانه‌ای به طول L و ضخامت h ، شعاع درونی و بیرونی به ترتیب R_1 و R_2 و شعاع سطح میانی پوسته $R (=a)$ نشان داده شده است.



شکل (۱): هندسه پوسته استوانه‌ای و دستگاه

مختصات استوانه‌ای

فرض می‌شود که پوسته استوانه‌ای تحت نیروی محوری فشاری F در دو انتهای خود و بار متقارن محوری به صورت فشار جانبی یکنواخت P قرار دارد. دستگاه مختصات استوانه‌ای $r\theta x$ بر روی سطح میانی پوسته قرار گرفته و

الشتی و احمدی [۸] کمانش پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از ماده FG را با استفاده از روش DQ و بر مبنای چندجمله‌ای شو مورد تحقیق قرار دادند. در سال ۲۰۱۵، ساطوری و همکاران [۹]، کمانش پوسته استوانه‌ای از ماده FG با تقویت کننده‌های طولی را بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۷، علی بیگلو و همکاران [۱۰] تحلیل استاتیکی و ارتعاشی پوسته استوانه‌ای ارتوتروپ را بر اساس معادلات الاستیسیته با استفاده از روش حل DQ بررسی نمودند. در سال ۲۰۱۸، مالکی و احمدی [۱۱]، تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای ارتوتروپ با وجود عیب هندسی را با استفاده از روش DQ مطالعه نمودند.

از بررسی مقالات چاپ شده پیشین و بررسی کلی تر توسط نویسندگان این مقاله ملاحظه گردیده که نظریه‌های مختلف در پیش‌بینی بار کمانشی پوسته‌ها دقت متفاوتی دارند. در این پژوهش، با استفاده از نظریه الاستیسیته به ارائه و بازنویسی معادلات حاکم بر مسئله کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و ضخیم و بررسی دقت نظریه‌های FSFT و TSDT در روش‌های حل تحلیلی با استفاده از روش محاسبه دترمینان معادله مشخصه و حل عددی با استفاده از FEM پرداخته شده است. با توجه به ماهیت سه بعدی مسئله کمانش پوسته‌ها، برای دست یافتن به معادلات کمانشی از تانسور مرتبه دوم کرشلف-پیولا استفاده شده است. در روابط به دست آمده برای پوسته‌های ضخیم، تنش‌های شعاعی و برش‌های عرضی که اغلب در روابط ارائه شده توسط دیگر محققان نادیده گرفته شده، مورد توجه قرار گرفته و تأثیر آنها در پیش‌بینی بار کمانشی برای پوسته‌های جدار ضخیم بررسی شده است. معادلات حاکم بر کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک بر اساس نظریه کلاسیک پوسته‌ها استخراج شده و در حل تحلیلی با جایگذاری شکل پاسخ مودهای کمانشی با توجه به شرایط مرزی ساده در نظر گرفته شده برای پوسته در معادلات حاکم از معادله دترمینانی شکل مودها، بار محوری کمانش به دست می‌آید.

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{N_{\theta x}}{\partial \theta} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + RN_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

$$RN_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_\theta + R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \left(\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} \right) \right], \quad (6)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

$$N_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right],$$

$$M_{x\theta} = -D(1-\nu) \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right),$$

با تعریف نیروی محوری کمانشی فشاری به صورت $N_x = F$ و پارامترهای بی بعد زیر:

$$\alpha = h^2 / 12R^2, \quad \phi = F(1-\nu^2) / Eh, \quad (7)$$

در نهایت معادلات دیفرانسیل تعادل کوپل شده حاکم بر کمانش پوسته جدار نازک برحسب مشتقات جزئی تغییر مکان‌ها به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{R(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R \partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ + \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{R \partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + R(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - R \phi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad (8) \\ -R \phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} - \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{R \partial \theta^2} + (2-\nu) R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right. \\ \left. + R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2R \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right] &= 0, \end{aligned}$$

برای حل دستگاه سه معادله و سه مجهول (8) شکل پاسخ جابجایی‌های طولی، محیطی و شعاعی به‌عنوان نمونه برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتها به صورت زیر فرض می‌گردند [6]:

$$u = \sum_{m,n} A_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \cos \frac{m\pi x}{L}, \quad v = \sum_{m,n} B_{mn} \cos \frac{n\pi\theta}{\beta} \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (9)$$

$$w = \sum_{m,n} C_{mn} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

با تعریف پارامتر $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$ و گرفتن مشتق‌های مرتبه اول و

دوم برای جابجایی‌ها و جایگذاری آن‌ها در معادلات تعادل (8)، انجام ساده‌سازی و کمی عملیات ریاضی، سه معادله

مؤلفه‌های بردار تغییر مکان (جابجایی) هر نقطه بر سطح میانی پوسته در سه راستای طولی x ، محیطی θ و شعاعی $r (= z)$ به ترتیب u ، v و w می‌باشند.

۱-۲- معادلات کلاسیک حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای جدار نازک تحت بار محوری فشاری

برای یک پنل جدا شده از سطح پوسته استوانه‌ای جدار نازک ($h/R \leq 1/20$) در اثر بارگذاری متقارن محوری جانبی (فشار خارجی/داخلی) و بار محوری، تحت برآیندهای نیروهای درون صفحه‌ای لبه‌ای N_{ij} و گشتاورهای خمشی لبه‌ای M_{ij} و نیروهای برشی لبه‌ای Q_i ($i, j = x, \theta, z$)، معادلات دیفرانسیل تعادل نیرویی در جهات x ، y و z عبارت‌اند از [۱ و ۲]:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + P_x R = 0, \quad \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta + P_y R = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\theta + P_z R = 0$$

و معادلات دیفرانسیل تعادل گشتاورها پیرامون محورهای x و y عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - R Q_\theta = 0, \quad R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - R Q_x = 0, \quad (2)$$

معادله تعادل ششم از رابطه $\sum M_z = 0$ منجر به یک اتحاد می‌شود که اطلاعات جدیدی ارائه نمی‌کند. با فرض نازک بودن پوسته استوانه‌ای ($M_{x\theta} = M_{\theta x}$, $N_{x\theta} = N_{\theta x}$) و همچنین با فرض $P_x = P_y = P_z = 0$:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} - Q_\theta = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\theta = 0,$$

از رابطه (3)، در پنل استوانه‌ای مؤلفه‌های نیروی برشی Q_θ و Q_x به دست می‌آیند:

$$Q_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \right), \quad Q_x = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

از روابط (1) تا (4) می‌توان رابطه (5) را نتیجه گرفت. اکنون روابط $N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta}$ برحسب جابجایی‌ها مطابق با رابطه (6) به دست می‌آیند:

با بهره‌گیری از تعریف تانسور گرین:

$$E = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u \cdot \nabla u^T] \quad (12)$$

و با در نظر گرفتن ترم‌های خطی، مؤلفه‌های تانسور گرین در روابط کرنش-جابجایی و چرخش-جابجایی به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{w}{r}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \varepsilon_{rx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \omega_{r\theta} &= \frac{-1}{2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right), \\ \omega_{\theta x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \omega_{rx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری روابط تغییر مکان (۱۱) در روابط (۱۳) برای کرنش‌ها می‌توان نوشت [۱۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r, \theta, x) &= \varepsilon_{rr}^{\circ} + \xi \varepsilon'_{rr}, \quad \varepsilon_{xx}(r, \theta, x) = \varepsilon_{xx}^{\circ} + \xi \varepsilon'_{xx}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta, x) &= \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} + \xi \varepsilon'_{\theta\theta}, \quad \gamma_{r\theta}(r, \theta, x) = \gamma_{r\theta}^{\circ} + \xi \gamma'_{r\theta}, \\ \gamma_{rx}(r, \theta, x) &= \gamma_{rx}^{\circ} + \xi \gamma'_{rx}, \quad \gamma_{x\theta}(r, \theta, x) = \gamma_{x\theta}^{\circ} + \xi \gamma'_{x\theta}, \\ \omega_{r\theta}(r, \theta, x) &= \omega_{r\theta}^{\circ} + \xi \omega', \quad \omega_{\theta x}(r, \theta, x) = \omega_{\theta x}^{\circ} + \xi \omega'_{\theta x}, \\ \omega_{rx}(r, \theta, x) &= \omega_{rx}^{\circ} + \xi \omega'_{rx} \end{aligned} \quad (14)$$

که ε_{ij}° و ω_{ij}° به ترتیب کرنش و چرخش در حالت تعادل اولیه و ε'_{ij} و ω'_{ij} به ترتیب کرنش و چرخش در حالت تغییر یافته (ثانویه) می‌باشند. برای ماده همسانگرد روابط تنش-کرنش عبارت‌اند از [۱۱]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (2G + \lambda)\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= (2G + \lambda)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{rr}), \\ \sigma_{xx} &= (2G + \lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{rr}), \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}, \quad \tau_{rx} = G\gamma_{rx}, \quad \tau_{x\theta} = G\gamma_{x\theta}, \end{aligned} \quad (15)$$

که ثابت‌های لامه عبارت‌اند از:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (16)$$

برای توابع تنش‌ها مانند کرنش‌ها می‌توان نوشت که:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, x) &= \sigma_{rr}^{\circ} + \xi \sigma'_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, x) = \sigma_{\theta\theta}^{\circ} + \xi \sigma'_{\theta\theta}, \\ \sigma_{xx}(r, \theta, x) &= \sigma_{xx}^{\circ} + \xi \sigma'_{xx}, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta, x) = \tau_{r\theta}^{\circ} + \xi \tau'_{r\theta}, \\ \tau_{rx}(r, \theta, x) &= \tau_{rx}^{\circ} + \xi \tau'_{rx}, \quad \tau_{x\theta}(r, \theta, x) = \tau_{x\theta}^{\circ} + \xi \tau'_{x\theta}, \end{aligned} \quad (17)$$

معادلات تعادل با در نظر گرفتن ترم‌های تانسور تنش مرتبه دوم کرشهف-پیولا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{div}(\sigma \cdot F^T) = 0, \quad \sigma = (\det F) F^{-1} T (F^{-1})^T \quad (18)$$

جبری خطی برحسب سه مجهول دامنه‌های شکل موده‌های کمانش A_{mn} , B_{mn} و C_{mn} به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_{mn}[\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}(\frac{n\pi}{\beta})^2] + B_{mn} \frac{n\pi\lambda}{2\beta}(1+\nu) + C_{mn}\nu\lambda &= 0, \\ A_{mn} \frac{n\pi\lambda}{2\beta}(1+\nu) + B_{mn}[\lambda^2((1-\nu)(\frac{1}{2} + \alpha)) - \phi] \\ + (\frac{n\pi}{\beta})^2(1+\alpha) + C_{mn} \frac{n\pi}{\beta}[1 + \alpha((\frac{n\pi}{\beta})^2 + \lambda^2)] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

شرط کمانش متقارن محوری پوسته یعنی بار بحرانی کمانش در راستای طولی از حل غیربندیی معادلات (۱۰) و از برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب مجهول A_{mn} , B_{mn} و C_{mn} به ازای $m=1, n=0$ محاسبه می‌شود. کمترین پاسخ به دست آمده برای کمیت بی‌بعد ϕ بار کمانشی محوری بحرانی پوسته می‌باشد. با کدنویسی در محیط برنامه ریاضی MATLAB، پاسخ عددی دامنه‌های کمانش محاسبه می‌شوند. سپس، با برگشت نتایج به دست آمده در روابط (۹) شکل موده‌های کمانش (در هر مود m, n) نیز به دست می‌آیند.

۲-۲- معادلات تعادل الاستیسیته سه‌بعدی حاکم بر میدان جابجایی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم

برای موقعیت ثانویه نقاط پوسته استوانه‌ای با فرض یک تغییر کوچک نسبت به حالت تعادل اولیه، توابع تغییر مکان در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱]:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, x) &= u^{\circ}(r, \theta, x) + \xi u'(r, \theta, x), \\ v(r, \theta, x) &= v^{\circ}(r, \theta, x) + \xi v'(r, \theta, x), \\ w(r, \theta, x) &= w^{\circ}(r, \theta, x) + \xi w'(r, \theta, x), \end{aligned} \quad (11)$$

که $u^{\circ}(r, \theta, x)$, $v^{\circ}(r, \theta, x)$ و $w^{\circ}(r, \theta, x)$ نشان‌دهنده وضعیت تعادل اولیه و $u'(r, \theta, x)$, $v'(r, \theta, x)$ و $w'(r, \theta, x)$ بیانگر موقعیت ثانویه هر نقطه بر روی سطح میانی پوسته استوانه‌ای به ترتیب در راستاهای محوری، محیطی و شعاعی می‌باشند؛ همچنین، ξ ضریب ثابت بی‌بعدی است که برای حالت تعادل ثانویه در نظر گرفته می‌شود.

معادلات دیفرانسیل تعادل کمانشی پوسته‌ها به دست می‌آید. عبارات مرتبه صفر برحسب ضریب ξ برای حالت تعادل اولیه به کار می‌روند. با ننگه‌داشتن عبارات مرتبه اول برحسب ضریب ξ ، در سه راستا، سه معادله به دست می‌آیند. فرض می‌شود که در حالت بارگذاری اولیه مقادیر کرنش برشی، تنش برشی و چرخش صفر است ($\varepsilon_{ij}^{\circ} = \tau_{ij}^{\circ} = \omega_{ij}^{\circ} = 0, i \neq j$) اما خیلی کوچک به طوری که برابر با مقدار یک در نظر گرفته می‌شوند:

$$1 = 1 + \varepsilon_{xx}^{\circ} = 1 + \varepsilon_{rr}^{\circ} = 1 + \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ}, \quad (22)$$

معادلات تعادل پوسته‌ها در حالت کلی تحت بار محوری و فشار یکنواخت جانبی (فشار خارجی و یا داخلی) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rr}' \varepsilon_{rr}' + \sigma_{rr}') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}[\tau_{r\theta}' + \sigma_{\theta\theta}'(\varepsilon_{r\theta}' + \omega_{r\theta}')] \\ & + \frac{\partial}{\partial x}[\tau_{rx}' + \sigma_{xx}'(\varepsilon_{rx}' + \omega_{rx}')] \\ & + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}' + \sigma_{rr}' \varepsilon_{rr}' - \sigma_{\theta\theta}' - \sigma_{\theta\theta}' \varepsilon_{\theta\theta}') = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial r}[\tau_{r\theta}' + \sigma_{rr}'(\varepsilon_{r\theta}' - \omega_{r\theta}')] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{\theta\theta}' \varepsilon_{\theta\theta}' + \sigma_{\theta\theta}') \\ & + \frac{\partial}{\partial x}[\tau_{\theta x}' + \sigma_{xx}'(\varepsilon_{\theta x}' - \omega_{\theta x}')] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{r}[\sigma_{rr}'(\varepsilon_{r\theta}' - \omega_{r\theta}') + 2\tau_{r\theta}' + \sigma_{\theta\theta}'(\varepsilon_{r\theta}' + \omega_{r\theta}')] = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial r}[\tau_{rx}' + \sigma_{rr}'(\varepsilon_{rx}' - \omega_{rx}')] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}[\sigma_{\theta\theta}'(\varepsilon_{\theta x}' + \omega_{\theta x}') + \tau_{\theta x}'] \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}' + \sigma_{xx}' \varepsilon_{xx}') + \frac{1}{r}[\tau_{rx}' + \sigma_{rr}'(\varepsilon_{rx}' - \omega_{rx}')] = 0, \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که برای پوسته‌های جدار نازک در معادله بالا از ترم‌های کرنش در برابر چرخش صرف‌نظر می‌گردد. با انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل (۲۳) در راستای ضخامت پوسته رابطه (۲۴) به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری از تمامی ترم‌های معادلات (۲۴) و یا (۲۳) و در نظر گرفتن شرایط مرزی در دیواره‌های (سطوح جانبی) پوسته؛ یعنی فشار خارجی یا بار محوری به صورت $\sigma_{rr}'(a - \frac{h}{2}) = 0$ و $\sigma_{rr}'(a + \frac{h}{2}) = -P$ (۲۵) به دست می‌آیند:

که در آن F گرادیان تغییر مکان به صورت $F = I + grad \vec{V}$ تعریف شده که در آن بردار تغییر مکان I و تانسور یکه می‌باشد. با توجه به هندسه مسئله و مختصات استوانه‌ای در نظر گرفته شده و تعریف عملگر گرادیان به صورت:

$$\begin{aligned} u &= w \hat{e}_r + v \hat{e}_\theta + u \hat{e}_x, \nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} &= \hat{e}_\theta, \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r, \\ \Rightarrow I + \nabla u &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v) & 1 + \frac{1}{r}(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w) & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19) \\ F &= (I + \nabla u)^T, \end{aligned}$$

ماتریس S با توجه به روابط (۱۹) تعریف می‌شود:

$$S = \sigma \cdot F^T \quad (20)$$

که در شکل بسط داده شده رابطه (۲۰) مؤلفه‌های $S_{xx}, S_{x\theta}, S_{xr}, S_{\theta x}, S_{\theta\theta}, S_{\theta r}, S_{rx}, S_{r\theta}, S_{rr}$ برحسب مؤلفه‌های تنش و جابجایی به دست می‌آیند. برای استخراج معادلات تعادل در سه راستای محوری، محیطی و شعاعی مانند رابطه (۱۸) لازم است که دیورژانس ماتریس S که یک ماتریس 3×3 است محاسبه شود. بنابر تعریف دیورژانس:

$$div(S)_{e_1} = div(S e_1^T) + tr((\nabla e_1)^T S) \quad (21)$$

با بسط معادله (۲۱) می‌توان معادلات تعادل را برحسب مؤلفه‌های S در راستاهای مذکور به دست آورد. با انجام کمی عملیات ریاضی، گرفتن مشتقات مؤلفه‌های جابجایی و بازنویسی آن‌ها در ماتریس S برحسب عبارات چرخش و کرنش با استفاده از روابط (۱۲) و سپس با قرار دادن روابط به دست آمده در مؤلفه‌های ماتریس S ، تمام مؤلفه‌های آن برحسب کرنش، تنش و چرخش محاسبه می‌شود. در ادامه، با جایگذاری نه مؤلفه ماتریس S در معادلات تعادل استخراج شده، دستگاه معادلاتی برحسب تنش و مؤلفه‌های جابجایی و در نهایت برحسب تنش و کرنش در سه راستا به دست می‌آیند. پس از آن، با لحاظ کردن عبارات کرنش، تنش و چرخش از روابط (۱۴) و (۱۵) در سری معادلات به دست آمده و ننگه داشتن عبارات خطی برحسب ξ دستگاه

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + \frac{z}{a}) z \sigma'_{xx} dz, M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma'_{\theta\theta} dz, \\
 M_{\theta x} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau'_{\theta x} dz, M_{x\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + \frac{z}{a}) z \tau'_{\theta x} dz, \\
 N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma'_{\theta\theta} dz, Q_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma'_{r\theta} dz, \\
 Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + \frac{z}{a}) \tau'_{rx} dz,
 \end{aligned} \quad (26)$$

۱-۲-۲- شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای

بر اساس معادلات تعادل برحسب ترم‌های تانسور تنش مرتبه دوم پیولا-کیرشلف (رابطه ۱۸) شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(F \cdot \sigma) \cdot \bar{n} = \bar{t}, F = I + rgrd\bar{V}, \quad (27)$$

که \bar{n} بردار یکه قائم و \bar{t} بردار کشش روی سطح خارجی پوسته می‌باشند. شرایط مرزی بر روی سطح دیواره داخلی و خارجی پوسته استوانه‌ای در موقعیت تعادل در حالت ثانویه عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{rr}(a+h/2, \theta) &= \sigma'_{rr}(a-h/2, \theta) = 0, \\
 \tau'_{r\theta}(a+h/2, \theta) &= \tau'_{r\theta}(a-h/2, \theta) = 0, \\
 \tau'_{rx}(a+h/2, \theta) &= \tau'_{rx}(a-h/2, \theta) = 0,
 \end{aligned} \quad (28)$$

روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم با پوسته‌های جدار نازک تفاوت دارند و نیاز است که در پوسته‌های جدار ضخیم اثرات تنش‌های شعاعی و برش‌های عرضی در روابط حاکم در نظر گرفته شود. به‌عنوان مثال برای پوسته‌های جدار نازک تحت بارگذاری فشار خارجی جانبی P

$$\sigma'_{rr} = -P, \sigma'_{\theta\theta} = -Pa/h, \quad (29)$$

درحالی‌که برای یک پوسته جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی با در نظر گرفتن شرط تقارن محوری، تنش‌های σ_r و σ_θ تابعی از r بوده و به متغیر θ بستگی نداشته و تنش‌های برشی روی هر المان پوسته باید صفر در نظر گرفته شود. به‌عنوان نمونه، با در نظر گرفتن المانی در شعاع r با فرض عدم وجود نیروهای حجمی و با صرف نظر کردن از ترم‌های مرتبه دوم، معادله تعادل در راستای شعاعی عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [r \frac{\partial}{\partial r} (\sigma'_{rr} \varepsilon'_{rr} + \sigma'_{rr}) + r \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{rx} + \sigma'_{xx} (\varepsilon'_{rx} + \omega'_{rx})) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta} + \sigma'_{\theta\theta} (\varepsilon'_{r\theta} + \omega'_{r\theta})) \\
 &+ (\sigma'_{rr} + \sigma'_{rr} \varepsilon'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{\theta\theta} \varepsilon'_{\theta\theta})] dz = 0, \\
 &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [r \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{r\theta} + \sigma'_{rr} (\varepsilon'_{r\theta} - \omega'_{r\theta})) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma'_{\theta\theta} \varepsilon'_{\theta\theta} + \sigma'_{\theta\theta}) \\
 &+ r \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{\theta x} + \sigma'_{xx} (\varepsilon'_{\theta x} - \omega'_{\theta x})) + (2\tau'_{r\theta} + \sigma'_{rr} (\varepsilon'_{r\theta} - \omega'_{r\theta})) \\
 &+ \sigma'_{\theta\theta} (\varepsilon'_{r\theta} + \omega'_{r\theta})] dz = 0,
 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [r \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{rx} + \sigma'_{rr} (\varepsilon'_{rx} - \omega'_{rx})) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma'_{\theta\theta} (\varepsilon'_{\theta x} + \omega'_{\theta x}) + \tau'_{\theta x}) \\
 &+ r \frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_{xx} + \sigma'_{xx} \varepsilon'_{xx}) + (\tau'_{rx} + \sigma'_{rr} (\varepsilon'_{rx} - \omega'_{rx}))] dz = 0, \\
 &\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'_{\theta\theta} \omega'_{r\theta}) dz - N_\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'_{\theta\theta} \varepsilon'_{r\theta}) dz \\
 &- \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'_{\theta\theta} \varepsilon'_{\theta\theta}) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r (\sigma'_{xx} + \sigma'_{xx} (\varepsilon'_{xx} + \omega'_{rx})) dz = 0, \\
 &-(a + \frac{h}{2}) P (\varepsilon'_{r\theta(a+\frac{h}{2})}) dz + Q_\theta - \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'_{\theta\theta} \omega'_{r\theta}) dz \\
 &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'_{\theta\theta} \varepsilon'_{\theta\theta}) dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'_{\theta\theta} \varepsilon'_{r\theta}) dz \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r (\varepsilon'_{\theta x} + \sigma'_{xx} (\tau'_{\theta x} - \omega'_{\theta x})) dz = 0,
 \end{aligned} \quad (25)$$

برای حل مسائل کمانش پوسته استوانه‌ای با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته می‌توان از دستگاه معادلات (۲۵) استفاده کرد؛ اما برای استفاده از نظریه مراتب بالا به علت ظاهر شدن ترم‌های جدید چرخش در روابط، تعداد مؤلفه‌های تغییر مکان افزایش یافته و در نتیجه لازم است از معادلاتی افزون بر معادلات بالا (معادلات کمکی) استفاده شود. در نظریه تغییر شکل برسی مرتبه سوم به دلیل وجود آمدن دو ترم چرخش، از دو معادله تعادل گشتاورها در راستای θ و x مطابق معادلات (۲) استفاده می‌شود. به‌طوری‌که در روابط (۲۵) و (۲) گشتاورها و نیروهای برشی با توجه به در نظر گرفتن ضخامت برای پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} u(r, \theta, x) &= u_0(\theta, x) + z\phi_1(\theta, x) - \frac{4}{3h^2}z^2(\phi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}), \\ v(r, \theta, x) &= (1 + \frac{z}{a})v_0(\theta, x) + z\phi_2(\theta, x) - \frac{4}{3h^2}z^2(\phi_2 + \frac{1}{a}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}), \\ w(r, \theta, x) &= w_0(\theta, x), \end{aligned} \quad (36)$$

که u_0 ، v_0 و w_0 تغییر مکان در صفحه میانی پوسته استوانه‌ای به ترتیب در راستاهای x ، θ و r و ϕ_1 و ϕ_2 نیز به ترتیب چرخش هر مقطع حول محور x و θ می‌باشند. لازم به ذکر است که در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، تغییر مکان‌ها به شکل خطی بوده و در روابط اول و دوم از سری روابط (36) از جملات آخر آن‌ها در این نظریه صرف‌نظر می‌شود. به‌عنوان نمونه با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای پوسته ترم‌های تغییر مکان و چرخش صفحه میانی پوسته به شکل توابع هارمونیک در نظر گرفته می‌شوند [6]:

$$\begin{aligned} u_0(\theta, x) &= C \sin(m\theta) \cos(\frac{n\pi x}{L}), \\ v_0(\theta, x) &= B \cos(m\theta) \sin(\frac{n\pi x}{L}), \\ w_0(\theta, x) &= A \sin(m\theta) \sin(\frac{n\pi x}{L}), \\ \phi_1(\theta, x) &= D \cos(m\theta) \sin(\frac{n\pi x}{L}), \\ \phi_2(\theta, x) &= H \sin(m\theta) \cos(\frac{n\pi x}{L}), \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن m و n به ترتیب عدد مودهای کمانشی در راستاهای محیطی و محوری باشند. با جایگذاری روابط (37) در تنش‌های برآیند و نتایج آن در معادلات کمانشی (معادلات 25 و 26) در نهایت دستگاه معادلات خطی همگن با پنج مجهول شامل دامنه‌های مودهای کمانشی A ، B ، C ، D و H به دست می‌آید. حل بدیهی عبارت است از $A=B=C=D=H=0$ که این جواب بدیهی معادلات مطلوب نظر نیست. برای حل غیربدیهی دستگاه پنج معادله و پنج مجهول (37)، دترمینان ضرایب باید برابر صفر باشد که کمترین مقدار به‌دست‌آمده از آن یعنی بار بحرانی کمانشی جانبی (کمانش محیطی) از حل معادله دترمینانی خطی همگن با پنج مجهول A ، B ، C ، D و H به ازای $m=1, n=0$ به‌دست می‌آید. این دستگاه معادلات با کدنویسی در محیط برنامه ریاضی MATLAB به‌صورت عددی حل شده و با برگشت نتایج به‌دست‌آمده در رابطه

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (30)$$

با فرض باز و آزاد بودن انتهای استوانه ($\sigma_z = 0$)، کرنش‌ها در المان در حالت تنش صفحه‌ای از قانون هوک عبارت‌اند از:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \quad (31)$$

با در نظر گرفتن روابط بالا برحسب تنش‌ها می‌توان نوشت:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r}), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\frac{u}{r} - \nu\frac{du}{dr}), \quad (32)$$

با جایگذاری روابط (32) در معادله (30) و با استفاده از شرایط مرزی در جدارهای داخلی و خارجی پوسته استوانه‌ای به‌صورت:

$$\sigma_r(R_1) = 0, \quad \sigma_r(R_2) = -P, \quad (33)$$

برای تنش‌های شعاعی و محیطی در سطح جانبی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تنش‌ها عبارت‌اند از:

$$\sigma_{rr}^\circ = -P[1 - (\frac{R_1}{r})^2][1 - (\frac{R_1}{R_2})^2]^{-1} = F_{rr} \cdot P, \quad (34)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ = -P[1 + (\frac{R_1}{r})^2][1 - (\frac{R_1}{R_2})^2]^{-1} = F_{\theta\theta} \cdot P,$$

تنش در راستای x زمانی که بار محوری F به انتهای پوسته وارد شود عبارت است از:

$$\int_{R_1}^{R_2} \sigma_{xx}^\circ 2\pi r dr = -F \Rightarrow \sigma_{xx}^\circ = -\frac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (35)$$

در جدول 1، روابط حاکم بر شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتهای پوسته استوانه‌ای ارائه شده است.

جدول (1): روابط حاکم بر شرایط مرزی ساده پوسته استوانه‌ای

نوع تکیه‌گاه	مختصات موقعیت مرزی	شرایط مرزی تکیه‌گاه
	$x = 0, L$	$v = w = \sigma'_{xx} = 0$
ساده	$\theta = 0, \gamma$	$u = w = \sigma'_{\theta\theta} = 0$
	$\theta = 0, \gamma$	$\sigma'_{\theta\theta} = \sigma'_{r\theta} = \sigma'_{x\theta}$

۲-۲-۲- نظریه‌های FSĐT و TSĐT

در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم، تغییر مکان‌ها در حالت سه‌بعدی به شکل غیرخطی زیر تعریف می‌شوند [1 و 2]:

$$\begin{aligned}
& A[-\frac{mn\pi}{L} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda + G) dz] + B[\frac{m^2}{4a} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} P(2a+h) - \frac{1}{a} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G \\
& + \lambda) dz m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+2z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] + \\
& C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1}{a+z}) dz) m + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} m dz \\
& + \frac{P}{2} (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{1}{a+z}) dz) m^2 + \frac{1}{2} P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz m \\
& + \frac{P}{2} [(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{1}{a+z}) dz) m^2] + D[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 - \frac{z}{a+z}) dz) \\
& - \frac{P}{2} (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z}) dz) m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} z dz) m^2 \\
& + \frac{P}{2} (-\frac{1}{2}(2a+h) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (-\frac{z}{a+z}) dz) - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+z+z^2) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \\
& - \frac{P}{2} (-\frac{1}{2}(2a+h) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z}) dz) - (a + \frac{h}{2}) P] \\
& + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda z dz) \frac{mn\pi}{L} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G z dz) \frac{mn\pi}{L}] = 0,
\end{aligned} \tag{۳۸-پ}$$

و

$$\begin{aligned}
& A[-\frac{h}{2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \lambda dz) \frac{mn\pi}{aL} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} (z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{mn\pi}{L}] \\
& + B[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2(G+\lambda) \frac{z}{2z^2} dz) m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z + \frac{2z^3}{a} - \frac{z^3}{a^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] \\
& + C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (\frac{z}{a}) dz) - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1}{a+z})) m] \\
& + D[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z}) m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 - \frac{z}{a+z}) dz) \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z^2 + \frac{z^3}{a}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda (\frac{z}{a}) dz) \frac{mn\pi}{L} \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} (z^2 + \frac{z^3}{a}) dz) \frac{mn\pi}{L}] = 0,
\end{aligned} \tag{۳۸-ت}$$

و

$$\begin{aligned}
& A[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - [(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2G}{a+z} dz) m^2] \\
& - B[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G+\lambda) (\frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2}) dz) \frac{mn\pi}{L}] + C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\lambda}{a+z} (z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{n\pi}{L} \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 + \frac{z}{a}) dz) \frac{n\pi}{L}] + D[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\lambda}{a+z} (z^2 + \frac{z^3}{a}) dz) \frac{mn\pi}{L} \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G z^2 dz) \frac{mn\pi}{L}] + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) (z^2 + \frac{z^3}{a}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} \frac{z^2}{a} dz) m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 + \frac{z}{a}) dz) = 0,
\end{aligned} \tag{۳۸-ث}$$

۲-۲-۲-۲-۲ TSDT حاکم در نظریه

معادلات نهایی برای کمناش پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری جانبی فشار یکنواخت خارجی P با فرض تکیه‌گاه‌های ساده به صورت زیر می‌باشند:

(۳۷) و سپس جایگزینی آن‌ها در روابط (۳۶)، شکل موده‌های کمناشی جانبی پوسته تحت فشار خارجی به دست می‌آیند. کمترین پاسخ به دست آمده برای کمیت P فشار کمناشی بحرانی جانبی پوسته می‌باشد.

در ادامه، معادلات نهایی حاکم بر کمناش یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار یکنواخت خارجی P برای شرایط مرزی دو سر ساده در دو نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم ارائه شده است.

۱-۲-۲-۲-۲ معادلات حاکم در نظریه FSDT

معادلات نهایی برای کمناش پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری جانبی فشار یکنواخت خارجی P با فرض تکیه‌گاه‌های ساده به صورت رابطه (۳۸-الف) تا (۳۸-ث) می‌باشند:

$$\begin{aligned}
& A[\frac{n\pi}{L} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda z dz] + B[-\frac{1}{2} P(2a+h)m - \frac{1}{4a} P(2a+h)m + \\
& \frac{1}{a} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) dz m] + C[-\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} dz \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1}{a+z}) dz) m^2 - \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F_{\theta\theta}(r)}{a+z} (1 - \frac{4z^2}{ah^2} + \frac{4z^3}{3ah^2}) dz) m^2 \\
& - \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{1}{a+z} + \frac{4z^2 F}{ah^2} + \frac{4z^3}{3ah^2(a+z)}) dz) m^2 \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+z - \frac{4az^2}{h^2} - \frac{4z^3}{h^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{1}{2} P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz] \\
& + D[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1-z}{a+z}) dz) m + \frac{1}{2} P (-\frac{1}{2}(2a+h) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z}) dz) m \\
& + (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} dz) m - \frac{1}{2} P (-\frac{1}{2}(2a+h) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (-\frac{z}{a+z}) dz) m \\
& + \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z}) dz) m] + H[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda z dz) \frac{n\pi}{L} \\
& - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+z) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] = 0,
\end{aligned} \tag{۳۸-الف}$$

و

$$\begin{aligned}
& A[-P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz m^2 - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} dz m^2 - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda)(a+z) dz \\
& \times \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] + B[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G+\lambda)(1 + \frac{z}{a}) dz) \frac{mn\pi}{L}] + C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda dz) \\
& + D[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G+\lambda) dz) \frac{mn\pi}{L}] + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} z dz) m^2 \\
& - P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z}) dz - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda)(az+z^2) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] = 0,
\end{aligned} \tag{۳۸-ب}$$

و

$$\begin{aligned}
 & A[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \lambda dz) \frac{mn\pi}{aL} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} (z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{mn\pi}{L}] \\
 & + B[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2(G+\lambda) \frac{z}{a^2} dz) m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z + \frac{2z^2}{a} - \frac{z^3}{a^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] \\
 & + C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (\frac{4z^2}{3a^2 h^2} m + \frac{z}{m}) dz) + (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda \frac{4z^3}{3ah^2} dz) \frac{m^2 n^2 \pi^2}{L^2}] \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{4z^4}{3ah^2} + \frac{4z^5}{3a^2 h^2} + \frac{4z^5}{3ah^2(a+z)}) dz) \frac{m^2 n^2 \pi^2}{L^2} \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1}{a+z} - \frac{4z^2}{ah^2} + \frac{4z^3}{3ah^2(a+z)}) dz) m] \\
 & + D[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (\frac{z^2}{a} - \frac{4z^4}{3ah^2}) dz) m^2] \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 - \frac{z}{a+z} - \frac{4z^3}{h^2} + \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) - \\
 & (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z^2 + \frac{z^3}{a} - \frac{4z^4}{3h^2} - \frac{4z^5}{3ah^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] \\
 & + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda (\frac{z^2}{a} - \frac{4z^4}{3ah^2}) dz) \frac{mn\pi}{L} \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} (z^2 + \frac{z^3}{a} - \frac{4z^4}{3h^2} + \frac{4z^5}{3ah^2}) dz) \frac{mn\pi}{L}] = 0,
 \end{aligned}$$

-۳۹)

(ت)

$$\begin{aligned}
 & A[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{zG}{a+z} dz) m^2] \\
 & - B[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G+\lambda) (\frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2}) dz) \frac{mn\pi}{L}] + \\
 & C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\lambda}{a+z} (z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{n\pi}{L} + (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) (\frac{4z^4}{3h^2} \\
 & + \frac{4z^5}{3a^2 h^2}) dz) \frac{m^2 n\pi}{L} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 + \frac{z}{a} - \frac{4z^2}{h^2} - \frac{4z^3}{ah^2}) dz) \frac{n\pi}{L}] \\
 & + D[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z^2 - \frac{4z^4}{3h^2}) dz) \frac{mn\pi}{L} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\lambda}{a+z} (z^2 + \frac{z^2}{a} - \frac{4z^4}{3h^2} \\
 & - \frac{4z^5}{3ah^2}) dz) \frac{mn\pi}{L}] + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) (z^2 + \frac{z^3}{a} - \frac{4z^4}{3h^2} - \frac{4z^5}{3ah^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} (\frac{z^2}{a} - \frac{4z^4}{3h^2}) dz) m^2 - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 + \frac{z}{a} - \frac{4z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{ah^2}) dz) = 0,
 \end{aligned}$$

-۳۹)

(ث)

۲-۳- مدل سازی المان محدود

مدل سازی و تحلیل پوسته استوانه‌ای با استفاده از نرم افزار ANSYS WORKBENCH انجام شده است. پس از اعمال بارگذاری و شرایط مرزی، تحلیل کمانش غیرخطی پوسته استوانه‌ای در تحلیل Static Structural و با بهره‌گیری از تغییر شکل‌های غیرخطی انجام شده است. در مدل سازی از مش ریزی به روش Hex Dominant (المان چهاروجهی) استفاده شده است. برای انتخاب اندازه المان مناسب در تحلیل و بررسی همگرایی حل پوسته استوانه‌ای با مشخصات $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.25$, $L = 5 \text{ m}$, $R_2 = 1 \text{ m}$ تحت بار کششی $P = 500 \text{ N}$ قرار گرفته و در ۱۰ مرحله اندازه المان کاهش یافته تا نمودار همگرایی مسئله به دست آید. در

$$\begin{aligned}
 & A[\frac{mn\pi}{L} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda dz] + B[-\frac{1}{2a}(2a+h)m - \frac{1}{4a}P(2a+h)m + \frac{1}{a} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda dz)m] \\
 & + C[-\frac{4n^2 \pi^2}{3h^2 L^2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^3 \lambda dz - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (1 - \frac{4z^3}{3ah^2} m^2) dz - \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1}{a+z} - \frac{4z^2}{ah^2} + \frac{4z^3}{3ah^2(a+z)}) m - \frac{2}{3ah^2} P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^3 F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz m^2 \\
 & - \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{1}{a+z} - \frac{4z^2}{ah^2} + \frac{3z^3}{3ah^2}) dz) m^2 - \frac{1}{2} P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz \\
 & - \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{1}{a+z} + \frac{4z^2 F}{ah^2} + \frac{4z^3}{3ah^2(a+z)}) dz) m^2 \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+z - \frac{4az^2}{h^2} - \frac{4z^3}{h^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] \\
 & + P[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 - \frac{z}{a+z} - \frac{4z^2}{h^2} + \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) m \\
 & + \frac{1}{2} P(-\frac{1}{2}(2a+h) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z} - \frac{4z^2}{h^2} - \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) m \\
 & + \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z} - \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) m] + H[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda (r - \frac{4z^3}{3h^2}) dz) \frac{n\pi}{L} \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+z - \frac{4az^2}{h^2} + \frac{4z^3}{h^2}) dz) \frac{n\pi}{L}] = 0,
 \end{aligned}$$

-۳۹)

(الف)

$$\begin{aligned}
 & A[-P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz m^2 - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} dz m^2 - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda)(a+z) dz \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] \\
 & + B \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G+\lambda) (1 + \frac{z}{a}) dz \frac{mn\pi}{L} + C[\frac{n\pi}{2L} P(2a+j) + \frac{4}{3h^2} P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^3 F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz \\
 & \frac{m^2 n\pi}{L} + (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{4z^3}{3ah^2} + \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) \frac{m^2 n\pi}{L} + \frac{4m^2 n\pi}{3ah^2 L^2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^3 \lambda dz \\
 & + (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) (\frac{4az^2}{3h^2} + \frac{4z^4}{3h^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n\pi}{L} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda dz] \\
 & + D[-\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G+\lambda) (z - \frac{4z^3}{3h^2}) dz) \frac{mn\pi}{L}] + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G}{a+z} (z - \frac{4z^3}{3h^2}) dz) m \\
 & - P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z} - \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) \\
 & (az + z^2 - \frac{4z^2}{3h^2} - \frac{4az^3}{3h^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2}] = 0,
 \end{aligned}$$

-۳۹)

(ب)

$$\begin{aligned}
 & A[-\frac{mn\pi}{L} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda + G) dz] + B[\frac{m^2}{4a} P(2a+h) - \frac{1}{a} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2G+\lambda) dz m^2] \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(a+2z + \frac{z^2}{a}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + C[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{1}{a+z} - \frac{4z^3}{ah^2} \\
 & + \frac{4z^3}{3ah^2(a+z)}) dz) m + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (m + \frac{4z^3}{3ah^2} m^2) dz + \\
 & \frac{4mn^3 \pi^2}{3h^2 L^2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^3 \lambda dz + \frac{2}{3ah^2} P \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^3 F_{\theta\theta}(r)}{a+z} dz m^2 + \\
 & \frac{P}{2} (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{1}{a+z} + \frac{4z^2}{ah^2} + \frac{4z^3}{3ah^2(a+z)}) dz) m^2 + \frac{mP}{2a} (2a+h) \\
 & + (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(\frac{8z^3}{3h^2} + \frac{4z^4}{3ah^2}) dz) \frac{mn^2 \pi^2}{L^2} + D[(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1 - \frac{z}{a+z} - \frac{zh^2}{h^2} \\
 & + \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) - \frac{1}{2} P (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z} - \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) m^2 \\
 & - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(2G+\lambda)}{a+z} (z - \frac{4z^3}{3h^2}) dz) m^2 + \frac{1}{2} P(-\frac{1}{2}(2a+h) + \\
 & \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (-\frac{z}{a+z} - \frac{4z^2}{h^2} + \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(az + z^2 - \frac{4z^4}{3h^2} \\
 & - \frac{4az^3}{3h^2}) dz) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \frac{1}{2} P(-\frac{1}{2}(2a+h) \\
 & + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_{\theta\theta}(r) (\frac{z}{a+z} - \frac{4z^2}{h^2} - \frac{4z^3}{3h^2(a+z)}) dz) \\
 & + H[-(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda (z - \frac{4z^3}{3h^2}) dz) \frac{mn\pi}{L} - (\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z - \frac{4z^3}{h^2}) dz) \frac{mn\pi}{L}] = 0,
 \end{aligned}$$

-۳۹)

(پ)

نتایج ارائه شده در مرجع [۶] (با استفاده از DQM) مقایسه شده‌اند.

جدول (۲): بار بحرانی کمانش محوری (F) با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته جدار نازک و FEM و نتایج مراجع [۲] و [۵].

بار بحرانی کمانش محوری (F) بر حسب N/m				
R_2/R_1	حل تحلیلی	FEM	[۲]	[۵] (DQM)
۱/۲	۰/۳۹۸۹	۰/۴۷۳۰	۰/۴۱۸۷	۰/۴۴۳۷۱
۱/۲۵	۰/۴۰۰۳	۰/۴۲۱۱	۰/۴۲۶۹	۰/۴۴۲۶

جدول (۳): بار بحرانی کمانش محوری بی‌بعد (ϕ) پوسته استوانه‌ای جدار نازک با تکیه‌گاه‌های ساده

بار بحرانی کمانش محوری بی‌بعد ϕ			
R_2/R_1	حل تحلیلی	FEM	
۱/۰۵	۰/۳۵۰۱	۰/۳۵۲۴	
۱/۱	۰/۳۵۰۵	۰/۳۵۸۷	
۱/۱۵	۰/۳۵۱۱	۰/۳۶۰۵	
۱/۲	۰/۳۵۱۹	۰/۳۶۸۳	
۱/۲۵	۰/۳۵۲۹	۰/۳۷۰۶	
۱/۳	۰/۳۵۴۰	۰/۳۷۹۴	

جدول (۴): فشار بحرانی کمانش محیطی (P) پوسته استوانه‌ای با تکیه‌گاه‌های ساده در نظریه FSĐT و TSĐT، FEM و [۶]

L/a	a/h	m	فشار بحرانی کمانشی P_{cr} بر حسب kPa		
			FSĐT	TSĐT	ANSYS [۶]
۳۰۰	۳	۱۳	۱۷۷/۶	۱۶۲/۴۵	۱۵۶/۹۸
۵۰۰	۱	۱۵	۵۳/۴۵	۴۷/۶۵	۴۳/۶۷
۱۰۰۰	۱۸	۱۸	۱۱/۲۹	۸/۶۲	۸/۰۴
۳۰۰	۲	۹	۸۷/۲۳	۷۶/۳۷	۷۹/۸۴
۵۰۰	۵	۶	۳۶/۱۵	۳۱/۳۵	۲۹/۶۵

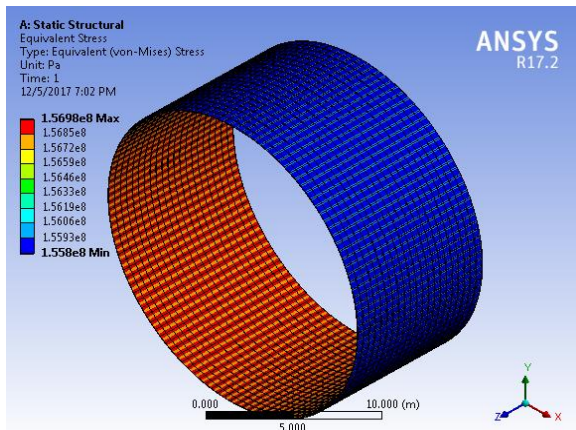
همان‌گونه که از جدول ۴، مشاهده می‌گردد نتایج به‌دست‌آمده از نظریه TSĐT و FEM از دقت قابل قبولی در مقایسه با مرجع [۶] برخوردار هستند.

نهایت با همگرایی تنش معادل بیشینه، اندازه المان (مش) برابر با $0.1m$ در نظر گرفته شده است.

۳- تحلیل نتایج و بحث در آن‌ها

در این بخش، نتایج حاصل از تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای جدار نازک در نظریه کلاسیک غشایی (برای محاسبه بار کمانشی محوری بحرانی) و پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم (برای محاسبه فشار خارجی کمانشی بحرانی محیطی) و روش حل عددی با استفاده از FEM پرداخته می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی برای محاسبه بار کمانشی بحرانی محوری با نتایج ارائه شده در مراجع مقایسه و صحت‌سنجی می‌گردند. خواص فیزیکی، مکانیکی و هندسی در نظر گرفته شده برای پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری فشاری عبارت است از $E=14\text{ GPa}$, $\nu=0.25$, $L=5\text{ m}$, $R_2=1\text{ m}$ در جدول ۲ نتایج به‌دست‌آمده از محاسبه بار بحرانی کمانش محوری در نظریه کلاسیک پوسته جدار نازک با شرایط مرزی ساده در پژوهش کنونی و روش حل عددی FEM و مقایسه آن با نتایج ارائه شده در مرجع [۲] و [۵] ارائه شده است. نتایج نشان‌دهنده تطابق نسبتاً مناسب بین دو روش حل عددی FEM و حل تحلیلی با نتایج گزارش شده در مرجع [۲] و [۵] می‌باشد. در جدول ۳ نتایج به‌دست‌آمده از محاسبه بار بحرانی کمانش محوری بی‌بعد شده در نظریه کلاسیک پوسته جدار نازک در پژوهش کنونی و روش حل عددی FEM برای مقادیر مختلف نسبت شعاعی پوسته ارائه شده است. نتایج نشان‌دهنده تطابق مناسب بین دو روش حل تحلیلی و حل عددی FEM می‌باشد. در جدول ۴، نتایج به‌دست‌آمده برای محاسبه فشار کمانشی بحرانی محیطی پوسته استوانه‌ای از ماده اپوکسی با $E=200\text{ GPa}$ و به جرم m و شعاع سطح میانی a تحت بارگذاری فشار خارجی یکنواخت خارجی P بر مبنای نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم و FEM با استفاده از نرم‌افزار ANSYS، با

در شکل ۳، توزیع تنش معادل ناشی از بارگذاری کمانشی جانبی پوسته جدار نازک تحت فشار خارجی با $L/a=1, a/h=300$ ، در نرم‌افزار ANSYS نشان داده شده است.



شکل (۳): تنش معادل پوسته با استفاده از ANSYS

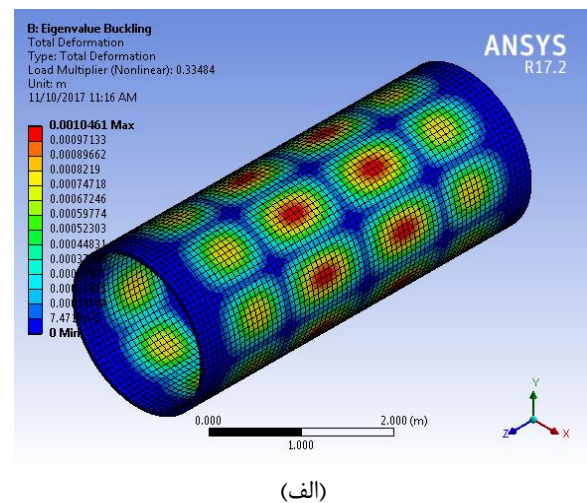
۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله محاسبه بار بحرانی کمانش محوری و محیطی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و ضخیم بر مبنای نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم با استفاده از روش حل تحلیلی و عددی FEM بررسی شد. نتایج به‌دست‌آمده عبارت‌اند از:

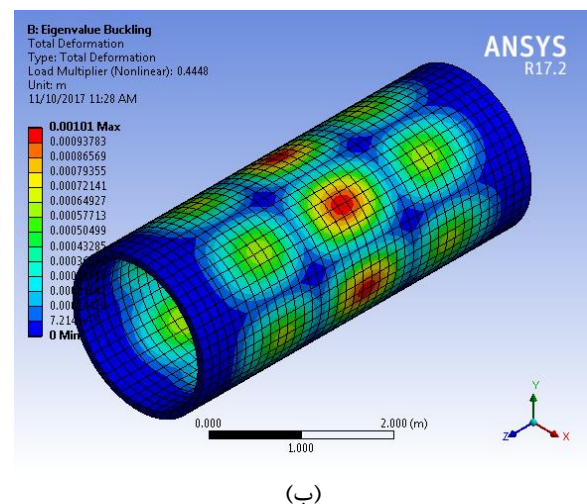
- (۱) نتایج تحلیل به‌دست‌آمده از نظریه تغییر شکل برشی سوم از مقادیر متناظر خود در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول کمتر می‌باشند. علت را می‌توان در سفتی بیشتر پوسته در TSDT نسبت به FSDT دانست.
- (۲) در تخمین بار بحرانی کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم دارای دقت بالاتری به ترتیب نسبت به حل عددی المان محدود و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد.
- (۳) به‌طور کلی با افزایش ضخامت پوسته، ظرفیت کمانشی و پایداری سازه افزایش می‌یابد.

لازم به ذکر است که نتایج به‌دست‌آمده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم از مقادیر متناظر خود در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول کمتر می‌باشند. علت را می‌توان در سفتی غیرخطی بیشتر در نظریه TSDT نسبت به FSDT دانست.

به‌عنوان نمونه، در شکل ۲، توزیع جابجایی معادل (کلی) برای پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم با $E=14GPa, L=5m, R_2=1m$ در نرم‌افزار ANSYS، برای نسبت‌های $R_2/R_1=1.1$ و $R_2/R_1=1.15$ تحت بارگذاری کمانشی محوری نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل (۲): توزیع جابجایی کل برای پوسته جدار ضخیم با استفاده از ANSYS برای الف- $R_2/R_1=1.1$ و ب- $R_2/R_1=1.15$

۵- مراجع

- [1] Ugural AC. Plates and shells: theory and analysis: CRC Press; 2017.
- [2] Timoshenko SP, Gere JM. Theory of elastic stability: Courier Corporation; 2009.
- [3] Danielson D, Simmonds J. Accurate buckling equations for arbitrary and cylindrical elastic shells. *International Journal of Engineering Science*. 1969;7(5):459-68.
- [4] Flügge W. Stresses in shells: Springer Science & Business Media; 2013.
- [5] Kardomateas G. Benchmark three-dimensional elasticity solutions for the buckling of thick orthotropic cylindrical shells. *Composites Part B: Engineering*. 1996;27(6):569-80.
- [6] Mirfakhraei P, Redekop D. Buckling of circular cylindrical shells by the differential quadrature method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1998;75(4):347-53.
- [7] Redekop D, Makhoul E. Use of the differential quadrature method for the buckling analysis of cylindrical shell panels. *Structural engineering and mechanics: An international journal*. 2000;10(5):451-62.
- [8] Akbari Alashti R, Ahmadi S. Buckling analysis of functionally graded thick cylindrical shells with variable thickness using DQM. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2014;39(11):8121-33.
- [9] Satori S, Kargarnovin M, Allahkarami F, Asanjarani A. Application of third order shear deformation theory in buckling analysis of 2D-functionally graded cylindrical shell reinforced by axial stiffeners. *Composites Part B: Engineering*. 2015;79:236-53.
- [10] Alibeigloo A, Rajaei Piteh Noei A. Static and free vibration analysis of sandwich cylindrical shell based on theory of elasticity and using DQM. *Acta Mechanica*. 2017;228(12):4123-40.
- [11] Maleki A, Ahmadi A. Buckling analysis of orthotropic thick cylindrical shells considering geometrical imperfection using differential quadrature method (DQM). *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2018;48(4):45-60.



Buckling Analysis of Thin and Thick Cylindrical Shells Under Axial Load and External Pressure Based on First Order and Third Order Shear Deformation Theories

Mohammad Kamali Roosta¹, Ahmad Mamandi^{2*}

¹ MSc, Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

² Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran

HIGHLIGHTS

- The shell subjected to axial buckling load has been modeled in ANSYS finite element software.
- The accuracy of obtained result to predict the critical axial load and external pressure buckling loads of the thin and thick shells have been compared with each other and the ones reported in the literature.

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 30 March 2020

Received in revised form: 1 July 2020

Accepted: 25 August 2021

Available online: 10 January 2022

*Correspondence:

ahmad.mamandi@iau.ac.ir

How to cite this article:

M.K. Roosta, A. Mamandi. Buckling Analysis of Thin and Thick Cylindrical Shells Under Axial Load and External Pressure Based on First Order and Third Order Shear Deformation Theories. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(2):1-14.

Keywords:

Cylindrical shell

Thin-walled

Thick-walled

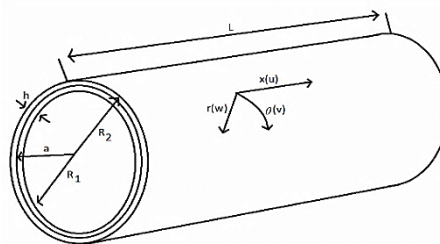
Axial buckling

Circumferential buckling

First order shear deformation theory

Third order shear deformation theory

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this paper, governing equilibrium equations for thin and thick-walled cylindrical shells based on the classic membrane and bending theories of shells using the first order shear deformation theory (FSDT) and the third order shear deformation theory (TSDT) in the three dimensional theory of elasticity for simply supported boundary conditions according to the buckling mode shapes for axial, circumferential and radial displacement field and subjected to axial and uniform external pressure buckling load have been derived. Then, the set of governing buckling equations of the shell for the axial, circumferential and radial displacements are numerically solved to obtain axial and circumferential critical buckling load. Moreover, to verify obtained results the shell subjected to axial buckling load has been modeled in ANSYS finite element software. The accuracy of obtained result to predict the critical axial load and external pressure buckling loads of the thin and thick shells have been compared with each other and the ones reported in the literature.

