مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۸/ شماره ۳/ صفحه ۱۰۹-۱۲۵

نشریه علمی مکانیک هوافضا

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.3.8.0

بررسی پاسخ غیرخطی گذرا صفحات فلز کامپوزیت تحت بارگذاری فشار یکنواخت وابسته به زمان

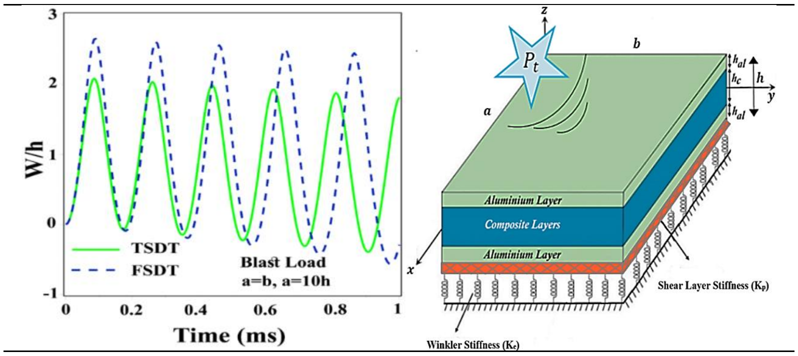
علی کیانی[۱]، روح‌اله حسینی[۲*]، حسین خدارحمی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران

[۲] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران

[۳] استاد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- با کاهش زمان فاز مثبت بارگذاری و افزایش پارامتر شکل موج، اثر فاز منفی بارگذاری تقویت‌شده و منجر به افزایش جابجایی بی‌بعد در مرکز ورق می‌گردد.
- پارامتر سختی خطی، در مقایسه با پارامتر لایه برشی اثر کمتری بر پاسخ زمانی دارد.

چکیده

چندلایه‌های فلز کامپوزیتی در بسیاری از کاربردها از هواپیماها، زیردریایی‌ها و کشتی‌ها گرفته تا مخازن تحت‌فشار و قطعات خودرو مورداستفاده قرار می‌گیرند. در این مطالعه به بررسی تحلیل تئوری و عددی چندلایه‌های فلز-کامپوزیت تحت بارگذاری فشار یکنواخت وابسته به زمان پرداخته‌شده است. بدین منظور، چندلایه فلز کامپوزیت بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی مدل شده و اثرات غیرخطی هندسی وون کارمن در استخراج معادلات حرکت گنجانده‌شده است. فرض شده است که چندلایه فلز کامپوزیتی بر بستر پاسترناک قرار دارد و شرایط مرزی در تمامی لبه‌های ورق به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته‌شده است. سپس معادلات مشتقات جزئی غیرخطی حرکت، با استفاده از روش گالرکین جداسازی شده و نهایتاً با استفاده از روش رانگ کوتا حل‌شده‌اند. نتایج تحلیل تئوری انجام‌شده با نتایج ارائه‌شده در مطالعات پیشین مقایسه گردیده و تطابق خوبی مشاهده‌شده است. همچنین به‌منظور بررسی پارامترهای اثرگذار، اثر نسبت ابعادی، بستر پاسترناک، زمان بارگذاری و نوع پالس‌های فشاری بر روی پاسخ دینامیکی ورق موردبررسی قرارگرفته است. مطابق با نتایج به‌دست‌آمده، با کاهش زمان فاز مثبت بارگذاری و افزایش پارامتر شکل موج، اثر فاز منفی بارگذاری تقویت‌شده و منجر به افزایش جابجایی بی‌بعد در مرکز ورق می‌گردد. علاوه بر این، مشخص گردید که پارامتر سختی خطی، در مقایسه با پارامتر لایه برشی اثر کمتری بر پاسخ زمانی دارد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۱۰

بازنگری: ۱۴۰۰/۱۰/۰۴

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۰

ارائه برخط: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

*نویسنده مسئول:

r.hosseini.mech@gmail.com

کلیدواژه‌ها:

پاسخ غیرخطی

چندلایه کامپوزیتی

بارگذاری فشار یکنواخت وابسته به زمان

روش گالرکین

روش رانگ کوتا

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر کاهش وزن سازه‌های هوافضا به دلیل کاهش سوخت و جلوگیری از اتلاف هزینه و جلوگیری از گسترش کربن‌دی‌اکسید در فضا بسیار بااهمیت جلوه نموده است. به‌منظور دستیابی به این هدف، به دلیل نقاط ضعف فلزات، کامپوزیت‌ها و چندلایه فلز کامپوزیت به‌صورت گسترده‌ای در سازه‌های هوافضایی مورداستفاده قرار گرفتند [۱]. فلزات و کامپوزیت‌ها هرکدام به‌تنهایی دارای مزایا و معایبی می‌باشند. فلزات دارای معایبی چون چگالی جرمی بالا، مقاومت در برابر خوردگی نسبتاً پایین و مقاومت در برابر خستگی پایین بوده و کامپوزیت‌ها نیز دارای معایبی چون قابلیت تحمل ضربه و جذب انرژی پایین، استحکام باقی‌مانده پایین پس از ضربه و همچنین قابلیت ترمیم‌پذیری پایین می‌باشند. معایب موجود در فلزات و کامپوزیت‌ها با ترکیب شدن قابل‌بهبود می‌باشند که به این ترکیب جدی چندلایه فلز کامپوزیت می‌گویند [۲-۴]. از جمله کاربردهای چندلایه‌های فلز کامپوزیت می‌توان به پانل‌های داخلی هواپیما، ترمزهای هواپیما، اجزای بالستیک، سیستم‌های پرتاب، تجهیزات ورزشی، شناورهای دریایی، تجهیزات پزشکی، واگن‌های ریلی، قطارها، موشک‌های تاکتیکی و موارد دیگر اشاره نمود [۵-۹]. چندلایه‌های فلز کامپوزیت با توجه به نوع الیاف استفاده‌شده در ماتریس پلیمری به سه نوع چندلایه‌های تقویت‌شده با الیاف آرامید، الیاف شیشه و الیاف کربن تقسیم‌بندی می‌شوند [۱۰].

ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ایزوتروپ و چندلایه‌های کامپوزیتی در سال‌های گذشته به‌صورت گسترده‌ای موردمطالعه قرار گرفته است. مالیک و همکارانش [۱۱] یک پاسخ الاستیسیته سه‌بعدی برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی، با برخی از شرایط مرزی متفاوت ارائه نمودند. گاناپاتی و همکارانش [۱۲] با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی و استفاده از روش المان محدود به بررسی ارتعاشات آزاد کامپوزیت‌های ضخیم مربعی شکل پرداختند. در تحقیقی دیگر آخراس و همکارانش [۱۳] با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی به ارائه یک روش نوار محدود پرداختند و با استفاده از آن پاسخ استاتیکی و ارتعاشات آزاد کامپوزیت‌های مربعی شکل را موردبررسی قراردادند. احمدی و همکارانش [۱۴] با استفاده از روش عددی مدل‌سازی چند مقیاسی (Multi-Scale) به بررسی خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانو تیوب‌های کربنی با اشکال هندسی مختلف پرداختند.

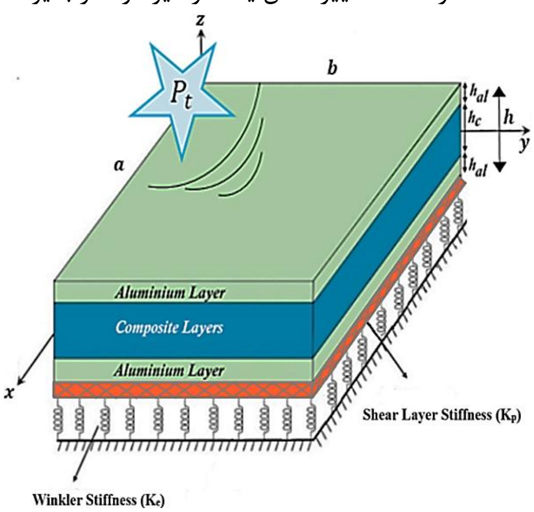
همچنین محققین متعددی ارتعاشات غیرخطی کامپوزیت‌ها را با روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی موردمطالعه قرار دادند. آندریانو و همکارانش [۱۵] ارتعاشات غیرخطی درون صفحه‌ای، برای ورق‌های مستطیلی شکل را با استفاده از تئوری اغتشاشات موردبررسی قرار دادند. لی و همکارانش [۱۶] بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم ردی، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی ورق‌های ارتوتروپیک با تغییر شکل‌های محدود را ارائه نمودند. آن‌ها ارتعاشات غیرخطی آزاد را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) موردبررسی قرار دادند. شوشتری و رضوی [۱۷] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی به بررسی ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت مستطیلی پرداختند. آن‌ها به‌منظور به دست آوردن پاسخ غیرخطی از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده نمودند و به بررسی فرکانس‌های غیرخطی سازه پرداختند. وو و همکارانش [۱۸] از روش تفاضل محدود مبتنی بر حداقل مربعات (LSFD) برای حل مسائل ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ برای ورق‌های با اشکال هندسی دلخواه استفاده کردند. کوماری و سینگا [۱۹] با استفاده از یک روش المان محدود و استفاده از معیار تسای-وو به بررسی پاسخ غیرخطی ورق‌های چندلایه و سیلندرهای استوانه‌ای تحت بارگذاری بلست پرداختند. همچنین دینه‌دوک و همکارانش [۲۰] با استفاده از تئوری مرتبه بالا به بررسی پاسخ غیرخطی ورق ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی سرامیک فلز، تحت بارگذاری بلست و بار حرارتی پرداختند. در تحقیقی دیگر، منظری و مقدم [۲۱] با استفاده از شبیه‌سازی عددی به تحلیل دینامیکی غیرخطی هندسی پوسته‌های استوانه‌ای FML’s تحت بارگذاری انفجاری با انواع شرایط مرزی پرداختند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، مطالعات بسیاری بر روی پاسخ فرکانسی و دینامیکی ورق‌ها تحت شرایط مرزی، بارگذاری‌ها و تئوری‌های مختلف صورت گرفته است.

مطابق با پژوهش‌های صورت گرفته، بررسی رفتار چندلایه-های کامپوزیت تحت بارگذاری‌های زمانی خصوصاً بارگذاری موج بلست، عموماً به‌صورت تجربی و یا شبیه‌سازی عددی با نرم‌افزارهای تجاری موردبررسی قرار گرفته است، و مطالعات با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا با در نظر گرفتن کرنش‌ها به‌صورت خطی صورت گرفته است؛ لذا در این پژوهش برای نخستین مرتبه، با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم ردی، با در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی وون کارمن، به بررسی پاسخ چندلایه فلز کامپوزیت تحت بارگذاری فشار یکنواخت متغیر بازمان پرداخته شده است. شرایط مرزی ورق در تمامی لبه‌ها به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است و فرض شده که چندلایه فلز کامپوزیت بر بستر پاسترناک قرار گرفته است. معادلات ساختاری حاکم بر مسئله، برحسب ترم‌های جابجایی بر اساس اصل همیلتون به دست آمده و سپس با استفاده از روش گالرکین معادلات جداسازی شده و نهایتاً با استفاده از روش عددی رانگ کوتا، معادلات غیرخطی حل شده‌اند. نتایج تحلیل تئوری انجام‌شده با نتایج ارائه‌شده در مطالعات پیشین مقایسه گردیده و تطابق خوبی مشاهده شده است. همچنین به‌منظور بررسی تأثیر پارامترهای حاکم بر مسئله، اثر نسبت ابعادی، بستر پاسترناک، زمان بارگذاری و نوع پالس‌های فشاری (بارگذاری مثلثی، پله و بلست یکنواخت به‌صورت تابع‌نمایی) بر روی پاسخ دینامیکی ورق موردبررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

همان‌گونه که در شکل **۱** مشاهده می‌شود، یک صفحه FML، که از لایه‌های فلز آلومینیوم و کامپوزیت تشکیل شده و دارای طول a و ضخامت h و پهنای b است، به روی یک بستر پاسترناک که از فنرهای خطی و برشی تشکیل شده، قرار گرفته است. به‌علاوه فرض شده است سازه تحت بارگذاری یکنواخت متغیر با زمان P_t به شکل‌های متفاوت مثلثی، پله و موج بلست نمایی قرار دارد.

در این پژوهش، برای مدل‌سازی میدان جابجایی ورق از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (تئوری ردی) استفاده شده است. این تئوری همچنین شرایط نبود تنش برشی عرضی بر روی سطوح بیرونی را نیز ارضا می‌کند. در این تئوری تنش به‌صورت سهموی در راستای ضخامت تغییر نموده و قادر است تا هنگام خم شدن ورق، اعوجاج ایجادشده در حالت تغییر شکل یافته را نیز در نظر بگیرند.



شکل (۱): چندلایه فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی

که در آن u_0 و v_0 و w_0 به ترتیب جابجایی نقطه $(x, y, 0)$، در امتداد محورهای x و y و z می‌باشند. θ_x و θ_y به ترتیب چرخش‌های صفحه عرضی عمود نسبت به محورهای x و y می‌باشند **[۲۲]**.

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)+z\,\theta_x(x,y,t)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\theta_x(x,y,t)+\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x}\right) \quad (۱\text{-الف})$$

$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\,\theta_y(x,y,t)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\theta_y(x,y,t)+\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y}\right) \quad (۱\text{-ب})$$

$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t) \quad (۱\text{-ج})$$

در این مطالعه فرض شده که سازه دارای تغییر شکل بزرگ و کرنش کوچک باشد؛ بدین منظور از تئوری وون‌کارمن برای بیان روابط کرنش جابجایی استفاده می‌شود. درحالی‌که اگر کرنش بزرگ فرض شود می‌توان از روش کرنش محدود (Finite strain) برای مدل‌سازی کرنش جابجایی استفاده کرد [۲۳-۲۵]. مطابق با تئوری کرنش‌های غیرخطی ون کارمن، روابط کرنش جابجایی را به‌صورت رابطه (۲) خواهیم داشت **[۲۶]**.در رابطه (۲) ترم‌های $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma$ کرنش‌های مهندسی می‌باشند. ازآنجایی‌که چندلایه FML از لایه‌های کامپوزیت با زاویه الیاف گوناگون تشکیل شده است باید خواص مکانیکی هر لایه به‌صورت خارج محور به

مختصات روی محور انتقال یابد. بر اساس حالت تنش صفحه‌ای، با استفاده از مدل هوک، روابط ساختاری تنش-کرنش برای هر لایه با زاویه الیاف مختلف به‌صورت رابطه (۳) بیان می‌شوند [۲۶]:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+z\,\frac{\partial \theta_x}{\partial x}-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \qquad \text{(۲-الف)}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2+z\,\frac{\partial \theta_y}{\partial y}-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(۲-ب)}$$

$$\gamma_{xz}=\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}-\frac{4}{h^2}z^2\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \qquad \text{(۲-پ)}$$

$$\gamma_{yz}=\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{4}{h^2}z^2\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad \text{(۲-پ)}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}+z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial \theta_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right) \qquad \text{(۲-ث)}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0\\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0\\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45}\\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55}\end{bmatrix}_k\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}_k \qquad (۳)$$

که در آن $\bar{Q}_{ij}$ ثوابت سختی کاهش‌یافته برای k امین لایه است. برای مواد کامپوزیتی برحسب زاویه الیاف به‌کار رفته در کامپوزیت‌ها ثوابت سختی کاهش‌یافته به‌صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{12}=\bar{Q}_{21}&=\left(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66}\right)sin^2(\varphi)cos^2(\varphi)+Q_{12}\left(sin^4(\varphi)+cos^4(\varphi)\right)\\
\bar{Q}_{22}&=Q_{11}sin^4(\varphi)+2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)sin^2(\varphi)cos^2(\varphi)+Q_{22}cos^4(\varphi)\\
\bar{Q}_{16}=\bar{Q}_{61}&=\left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)sin(\varphi)cos^3(\varphi)+\left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)sin^3(\varphi)cos(\varphi)\\
\bar{Q}_{26}=\bar{Q}_{62}&=\left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)sin^3(\varphi)cos(\varphi)+\left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)sin(\varphi)cos^3(\varphi)\\
\bar{Q}_{66}&=\left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66}\right)sin^2(\varphi)cos^2(\varphi)+Q_{66}\left(sin^4(\varphi)+sin^4(\varphi)\right)\\
\bar{Q}_{45}=\bar{Q}_{54}&=\left(Q_{55}-Q_{44}\right)sin(\varphi)cos(\varphi)\\
\bar{Q}_{44}&=Q_{44}cos^2(\varphi)+Q_{55}sin^2(\varphi)\\
\bar{Q}_{55}&=Q_{55}cos^2(\varphi)+Q_{44}sin^2(\varphi)
\end{aligned} \qquad (۴)$$

با توجه به معادله (۴) ثوابت $\bar{Q}_{16},\bar{Q}_{26},\bar{Q}_{45}$ در کامپوزیت‌های الیاف متقاطع صفر خواهند شد. در رابطه بالا ثوابت Q_{ij} عبارت‌اند از:

$$Q_{11}=\frac{E_1}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}},Q_{22}=\frac{E_2}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}},Q_{12}=\frac{\vartheta_{12}E_2}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}} \qquad (۵)$$
$$Q_{66}=G_{12},Q_{44}=G_{23},Q_{55}=G_{13}$$

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر مسیر حرکت از اصل همیلتون استفاده می‌کنیم [۲۷]:

$$\int_0^t \delta\left(U-T+V\right)dt= \qquad (۶)$$

درحالی‌که U بیانگر انرژی کرنش و T انرژی جنبشی و V کار ناشی از نیروهای خارجی هستند مطابق با:

$$\begin{aligned}
\delta T=\iint\Big[&I_0\left(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0+\dot{v}_0\delta\dot{v}_0+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right)+\\
&+I_1\left(\dot{u}_0\delta\dot{\theta}_x+\dot{v}_0\delta\dot{\theta}_y+\dot{\theta}_x\delta\dot{u}_0+\dot{\theta}_y\delta\dot{v}_0\right)\\
&+I_2\left(\dot{\theta}_x\delta\dot{\theta}_x+\dot{\theta}_y\delta\dot{\theta}_y\right)-I_3C_1\Big(\dot{u}_0\delta\dot{\theta}_x+\dot{v}_0\delta\dot{\theta}_y\\
&+\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}+\dot{\theta}_x\delta\dot{u}_0+\dot{\theta}_y\delta\dot{v}_0\\
&+\delta\dot{u}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}+\delta\dot{v}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\Big)-I_4C_1\Big(\dot{\theta}_x\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\\
&+\dot{\theta}_y\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}+2\left(\dot{\theta}_x\delta\dot{\theta}_x+\dot{\theta}_y\delta\dot{\theta}_y\right)\\
&+\delta\dot{\theta}_x\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}+\delta\dot{\theta}_y\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\Big)+I_6C_1^2\Big(\dot{\theta}_x\delta\dot{\theta}_x\\
&+\dot{\theta}_y\delta\dot{\theta}_y+\dot{\theta}_x\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+\dot{\theta}_y\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}+\delta\dot{\theta}_x\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\\
&+\delta\dot{\theta}_y\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}+\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\Big)\Big]dA
\end{aligned} \qquad (۷)$$

درحالی‌که $C_1=\frac{4}{3h^2}$، همچنین پارامترهای اینرسی جرم I_0، I_1، I_2، I_4 و I_6 به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$I_j=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\rho^j\,dz \qquad and \qquad j:0,1,2,3,4,6 \qquad (۸)$$

همچنین ترم انرژی کرنشی به‌صورت معادله (۹) می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
\delta U &= \int\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\sigma_{xy}\delta\gamma_{xy}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}\right.\\
&\left.+\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}\right)dV=\int\left\{N_{xx}\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)\right.\\
&-C_1P_{xx}\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+N_{yy}\delta\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)\\
&+M_{xx}\delta\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+N_{xy}\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\\
&+M_{yy}\delta\frac{\partial\theta_y}{\partial y}-P_{xy}C_1\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&M_{xy}\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)-C_1P_{yy}\delta\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+\\
&+Q_{xz}\delta\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)-3C_1R_{xz}\delta\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\\
&\left.+Q_{yz}\delta\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)-3C_1R_{yz}\delta\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\right\}dA
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

در این رابطه پارامترهای N_{ij} , M_{ij} , P_{ij} ,Q_{ij} و R_{ij}:

$$\left\{N_{xx},N_{xy},N_{yy}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}\right\}dz \qquad (۱۰\text{-الف})$$

$$\left\{M_{xx},M_{xy},M_{yy}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}\right\}*z\,dz \qquad (۱۰\text{-ب})$$

$$\left\{P_{xx},P_{xy},P_{yy}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}\right\}*z^3dz \qquad (۱۰\text{-پ})$$

$$\left\{Q_{xz},Q_{yz}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{\sigma_{xz},\sigma_{yz}\right\}dz \qquad (۱۰\text{-ت})$$

$$\left\{R_{xz},R_{yz}\right\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{\sigma_{xz},\sigma_{yz}\right\}*z^2dz \qquad (۱۰\text{-ث})$$

ترم مربوط به تغییرات انرژی ناشی از کار نیروهای خارجی براثر اعمال بارگذاری متغیر با زمان و همچنین تغییرات انرژی ناشی از بستر پاسترناک به‌صورت زیر بیان می‌شود که در این رابطه q(t) بار وارده براثر نیروی پله یا انفجاری یا بار مثلثی هست. در نهایت با استفاده از روابط (۷)، (۹) و (۱۱) و قرار دادن این روابط درون رابطه اصل همیلتون و استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء برای ساده‌سازی ترم‌ها، معادلات حاکم بر حرکت سیستم به‌صورت زیر استخراج می‌گردند:

$$\delta V=\int\left\{q(t)+K_ew_0+K_p\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\right\}\delta w_0 \qquad (۱۱)$$

$$
\begin{aligned}
&\delta u_0:\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}\\
&-I_3C_1\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (۱۲\text{-الف})
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta v_0:\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}\\
&-I_3C_1\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (۱۲\text{-ب})
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_0:N_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}+C_1\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2}\\
&+N_{yy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}+C_1\frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2}+2N_{xy}*\\
&\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}+2C_1*\\
&\frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}-3C_1\frac{\partial R_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}-3C_1*\\
&\frac{\partial R_{yz}}{\partial y}+K_ew_0+K_p\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+q=\\
&I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+I_3C_1\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\,\partial t^2}+I_3C_1\frac{\partial^3 v_0}{\partial y\,\partial t^2}+I_4C_1*\\
&\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x\,\partial t^2}+I_4C_1\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y\,\partial t^2}-I_6C_1^2\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y\,\partial t^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (۱۲\text{-پ})
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\theta_x:\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-C_1\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-C_1\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}-Q_{xz}\\
&+3C_1R_{xz}=I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-2I_4C_1\\
&*\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_4C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (۱۲\text{-ت})
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\theta_y:\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-C_1\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-C_1\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}-Q_{yz}\\
&+3C_1R_{yz}=I_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-2I_4C_1\\
&*\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_4C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (۱۲\text{-ث})
$$

با استفاده از روابط (۱۲) و استفاده از رابطه (۱۰)، معادلات کلی حاکم بر مسئله به دست خواهند آمد (پیوست ۱ و ۲).

۳- بارگذاری دینامیکی

وسایل پیشرفته سوپرسونیک و هایپرسونیک پروازی، تحت انواع بارگذاری‌های دینامیکی همانند تندبادها، بارهای ضربه‌ای، پالس‌های صوتی شدید و موج‌های انفجاری قرار می‌گیرند. تحلیل و طراحی سازه‌ها تحت بارگذاری‌های

دینامیکی نظیر موج بلست نیازمند درک جزئیاتی از پدیده بارگذاری است؛ لذا در این پژوهش اثر انواع پالس‌های فشاری متغیر بازمان موردبررسی قرار گرفته‌اند. انواع بارگذاری‌های در نظر گرفته‌شده و توابع آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

بار مثلثی:

$$\mathrm{q}(t)=\begin{cases} Q_0\left(1-\dfrac{t}{t_1}\right), & for\ \ t\le t_1 \\ 0 & for\, t>t_1 \end{cases} \qquad (۱۳)$$

بار بلست یکنواخت: تابع فریدلندر یک تابع آزمایشگاهی ایده‌آل برای منحنی فشار-زمان موج بلست ناشی از انفجار در هوای آزاد می‌باشد که به یک نقطه با فاصله مطمئن از نقطه انفجار می‌رسد. اگر محل انفجار بیشتر از نصف ضلع کوچک ورق، از ورق فاصله داشته باشد، می‌توان بارگذاری حاصله را بارگذاری یکنواخت نامیده و بنابراین موج حاصله را می‌توان به‌صورت یک تابع‌نمایی شکل (به نام تابع فریدلندر (Friedländer) در نظر گرفت [۲۸]:

$$\mathrm{q}(t)=\begin{cases} Q_0\left(1-\dfrac{t}{t_1}\right)e^{-\alpha\frac{t}{t_1}}, & for\ \ t\le t_1 \\ 0 & for\, t>t_1 \end{cases} \qquad (۱۴)$$

بار پله:

$$\mathrm{q}(t)=Q_0 \qquad (۱۵)$$

در روابط (۱۳) الی (۱۵)، ثوابت Q_0، t_1 و α به ترتیب فشار انفجاری بیشینه و مدت‌زمان فاز مثبت بارگذاری و پارامتر شکل موج هستند.

۴- روش حل

برای لبه‌های صفحه، شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. بنابراین جابجایی انتقالی و گشتاور در اطراف پنل صفر بوده و در نتیجه شرایط مرزی به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} &u_0(x,0,t)=u_0(x,b,t)=v_0(0,y,t)=v_0(a,y,t)=0 \\ &w_0(x,0,t)=w_0(x,b,t)=w_0(0,y,t) \\ &=w_0(a,y,t)=0 \\ &\theta_x(x,0,t)=\theta_x(x,b,t)=\theta_y(0,y,t) \\ &=\theta_y(a,y,t)=0 \\ &M_{xx}(0,y,t)=M_{xx}(a,y,t)=M_{yy}(x,0,t)= \\ &=M_{yy}(x,b,t)=0 \\ &P_{xx}(0,y,t)=P_{xx}(a,y,t)=P_{yy}(x,0,t)= \\ &=P_{yy}(x,b,t)=0 \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

با توجه به شرایط مرزی حاکم، سری فوریه‌های پیشنهادی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned} u_0(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)U_{mn}(t) \\ v_0(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)V_{mn}(t) \\ W_0(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)W_{mn}(t) \\ \theta_x(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)X_{mn}(t) \\ \theta_y(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)Y_{mn}(t) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در نهایت با جایگذاری بسط‌های روابط (۱۷) درون معادلات دینامیکی و استفاده از روش گالرکین، همچنین در نظر گرفتن این نکته که اثر اینرسی‌های داخلی بر روی دامنه ارتعاشات غیرخطی بی‌تأثیر است [۲۹-۳۱]، روابط غیرخطی دافینگ به‌صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} &L_1W^2+L_2W+L_3U+L_4V+L_5X+L_6Y \\ &=L_7\ddot{W} \end{aligned} \qquad (۱۸\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} &L_8W^2+L_9W+L_{10}U+L_{11}V+L_{12}X+L_{13}Y \\ &=L_{14}\ddot{W} \end{aligned} \qquad (۱۸\text{-ب})$$

$$\begin{aligned} &L_{15}W^3+L_{16}W^2+L_{17}W+L_{18}UW+L_{19}XW \\ &+L_{20}VW+L_{21}YW+L_{22}U+L_{23}X+L_{24}V \\ &+L_{25}Y=L_{26}\ddot{W} \end{aligned} \qquad (۱۸\text{-پ})$$

$$\begin{aligned} &L_{27}U+L_{28}W^2+L_{29}W+L_{30}X+L_{31}Y \\ &+L_{32}V=L_{33}\ddot{W} \end{aligned} \qquad (۱۸\text{-ت})$$

$$\begin{aligned} &L_{34}U+L_{35}W^2+L_{36}W+L_{37}V+L_{38}X \\ &+L_{39}V=L_{40}\ddot{W} \end{aligned} \qquad (۱۸\text{-ث})$$

در نهایت، با استفاده از روابط (۱۸) و همچنین استفاده از روش عددی رانگ کوتا معادلات بالا حل‌شده و پاسخ غیرخطی سیستم به دست خواهد آمد.

۵- راستی آزمایی و تفسیر نتایج

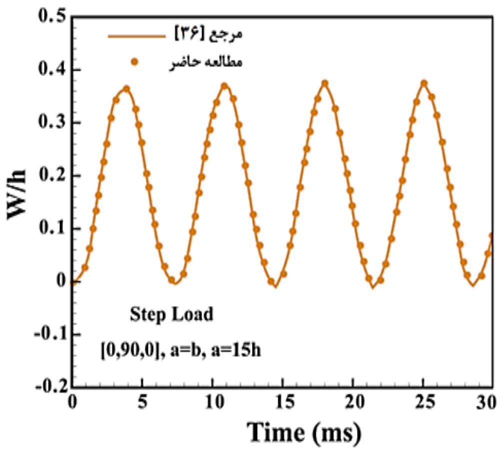
در این قسمت به اعتبارسنجی سه فرکانس طبیعی اول بدون بعد یک ورق ضخیم الاستیک مستطیلی با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداخته شده است. بدین منظور، ابتدا نتایج به‌دست‌آمده برای یک ورق الاستیک ضخیم با نتایج به‌دست‌آمده از حل دقیق صورت گرفته بر اساس تئوری

برشی مرتبه اول [۳۲] و در اعتبارسنجی دوم، سه فرکانس طبیعی اول با نتایج به‌دست‌آمده از حل دقیق بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم [۳۳] در جدول **۱** مقایسه شده‌اند.

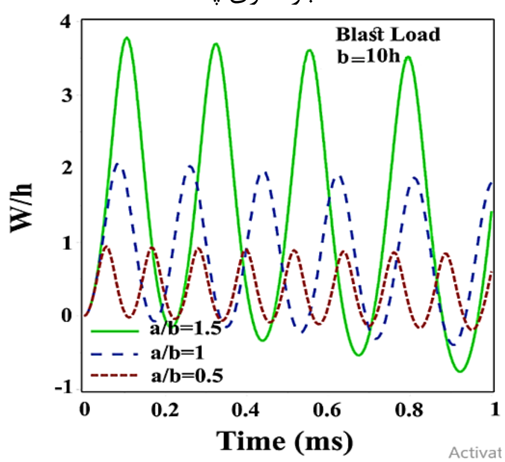
در اعتبارسنجی دیگر، پاسخ زمانی غیرخطی ورق کامپوزیتی لایه‌ای مربعی که تحت بارگذاری پله قرار دارد، با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم به‌دست‌آمده و با نتایج گزارش‌شده بر اساس مدل برشی مرتبه سوم مرجع [۳۶] در شکل **۲** مقایسه شده است. مطابق با جدول **۱** و شکل **۲** نتایج تحلیل صورت گرفته دارای تطابق و همگرایی قابل قبولی می‌باشند.

به‌منظور بررسی پاسخ غیرخطی صفحه فلز کامپوزیت تحت بارگذاری‌های متفاوت و بررسی اثر پارامترهای مؤثر بر مسئله، خواص فیزیکی و هندسی لایه‌های کامپوزیتی پلیمری تقویت‌شده با الیاف کربنی CFRP و فلز آلومینیوم به‌صورت جدول **۲** در نظر گرفته می‌شوند.

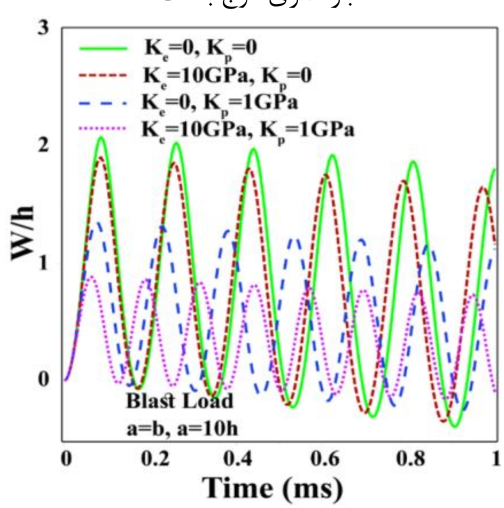
یکی از تأثیرگذارترین عوامل بر روی رفتار ورق‌ها، نسبت ابعادی می‌باشد. بدین منظور مطابق با شکل **۳** به بررسی جابجایی بی‌بعد شده W/h در نقطه میانی ورق برحسب زمان، پرداخته شده است. در این قسمت اثرات بستر پاسترناک در نظر گرفته نشده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با افزایش نسبت ابعادی از ۰/۵ تا ۱/۵، میزان حداکثر جابجایی بدون بعد افزایش‌یافته است. همچنین فرکانس ارتعاشات ورق با افزایش نسبت ابعادی از ۰/۵ تا ۱/۵، کاهش می‌یابد و برعکس. در شکل **۴**، با استفاده از میدان برشی مرتبه سوم، پاسخ زمانی غیرخطی بدون بعد چندلایه فلز کامپوزیت برای مقادیر مختلف از سختی‌های خطی و برشی بستر پاسترناک ارزیابی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش پارامترهای سختی خطی و برشی، دامنه نوسانات کاهش پیدا می‌کند. همچنین مشخص است که در مقایسه با پارامتر سختی خطی، پارامتر لایه برشی اثر بیشتری بر پاسخ زمانی دارد. علاوه‌براین می‌توان دریافت که اضافه شدن سختی‌های بستر موجب افزایش فرکانس ارتعاشات می‌گردد و این افزایش برای فنر برشی در مقایسه با فنر خطی بیشتر می‌باشد.



شکل (۲): مقایسه پاسخ زمانی ورق کامپوزیتی لایه‌ای تحت بارگذاری پله



شکل (۳): اثر نسبت ابعادی بر پاسخ زمانی غیرخطی تحت بارگذاری موج بلست



شکل (۴): اثر بستر پاسترناک بر پاسخ زمانی غیرخطیتحت بارگذاری موج بلست

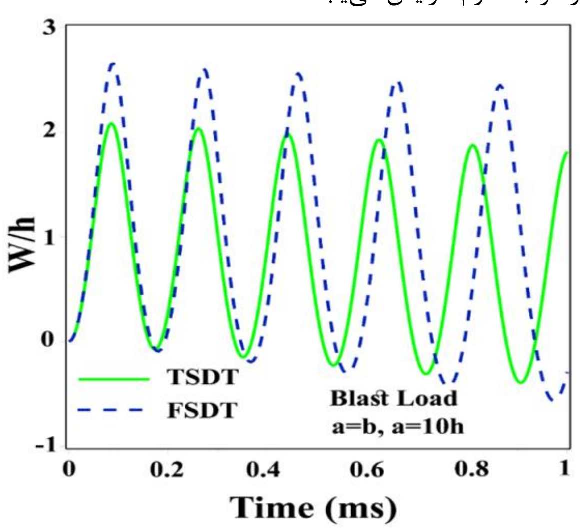
جدول (۱): مقایسه فرکانس طبیعی یک ورق ضخیم الاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و سوم

h/a	تئوری محاسبه	مود اول	مود دوم	مود سوم
۰/۰۰۱	تئوری کلاسیک [۳۴]	۱۱/۶۸۴۵	۲۷/۷۵۶۳	۴۱/۱۹۶۷
	تئوری مرتبه اول	۱۱/۶۸۳۷	۲۷/۷۵۲۳	۴۱/۱۹۴۳
	تئوری مرتبه سوم	۱۱/۶۸۳۷	۲۷/۷۵۲۳	۴۱/۱۹۴۲
	مطالعه حاضر	۱۱/۶۸۳۷۲	۲۷/۷۵۲۳۴	۴۱/۱۹۴۱۸
۰/۱	حل الاستیسیته سه‌بعدی [۳۵]	۱۱/۳۹۵۳	۲۶/۲۰۹۶	۳۸/۳۷۳۰
	تئوری مرتبه اول	۱۱/۳۸۱۰	۲۶/۱۹۱۰	۳۸/۳۶۱۰
	تئوری مرتبه سوم	۱۱/۳۷۳۷	۲۶/۱۵۷۶	۳۸/۲۹۰۴
	مطالعه حاضر	۱۱/۳۷۳۷۴	۲۶/۱۵۷۵۸	۳۸/۲۹۰۴۳
۰/۲	حل الاستیسیته سه‌بعدی [۳۵]	۱۰/۷۲۱۶	۲۳/۲۵۶۵	۳۲/۹۲۹۹
	تئوری مرتبه اول	۱۰/۷۲۱۸	۲۳/۲۴۲۹	۳۲/۸۹۲۲
	تئوری مرتبه سوم	۱۰/۷۲۱۸	۲۳/۱۶۶۲	۳۲/۷۴۲۱
	مطالعه حاضر	۱۰/۷۲۱۷۸	۲۳/۱۶۶۲۵	۳۲/۷۴۲۱۳

جدول (۲): مشخصات فیزیکی و هندسی چندلایه فلز کامپوزیتی و بارگذاری دینامیکی [۳۷]

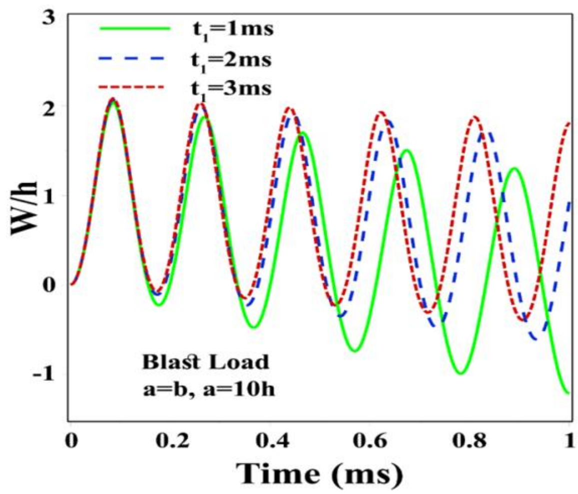
مشخصات ورق کامپوزیتی	مقدار	واحد
مدول الاستیک طولی	۱۳۶/۶	GPa
مدول الاستیک عرضی	۸/۲۷	GPa
ضریب پواسون	۰/۲۶	
مدول برشی درون‌صفحه‌ای	۴/۹۶	GPa
مدول برشی برون‌صفحه‌ای	۴/۱۲	GPa
چگالی	۱۵۴۰	kg/m^3
ضخامت	۰/۰۵	m
ابعاد هندسی طول و عرض	a = b= 10 h	-
لایه‌چینی چندلایه فلز کامپوزیت	[AL/0/90/0/AL]	-
مشخصات ورق آلومینیومی		
مدول الاستیک آلومینیوم	۷۰	GPa
ضریب پواسون آلومینیوم	۰/۳۳	-
چگالی آلومینیوم	۲۷۸۰	kg/m^3
ضخامت هر لایه آلومینیومی	۰/۰۱	m
مشخصات بار دینامیکی		
فشار انفجاری بیشینه	۳۴۴۷	Kpa
پارامتر شکل موج	۰/۳	-
مدت‌زمان فاز مثبت بارگذاری	۰/۰۱	s

در شکل **۵** به بررسی پاسخ زمانی غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت تحت بارگذاری بلست با استفاده از میدان جابجایی برشی مرتبه سوم در مقایسه با میدان جابجایی برشی اول پرداخته شده است. در این قسمت اثرات بستر پاسترناک در نظر گرفته نشده است. همان‌طور که از شکل **۵** مشخص است پاسخ زمانی بدون بعد برای تئوری برشی مرتبه اول، بیشتر از محاسبات بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم است. همچنین فرکانس ارتعاشات برای تئوری برشی مرتبه اول، کمتر از فرکانس ارتعاشی محاسبه‌شده بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم است. لازم به ذکر است که با افزایش ضخامت چندلایه فلز کامپوزیت، تفاوت مقادیر پیش‌بینی‌شده پاسخ زمانی برای تئوری‌های برشی مرتبه اول و مرتبه سوم افزایش می‌یابد.

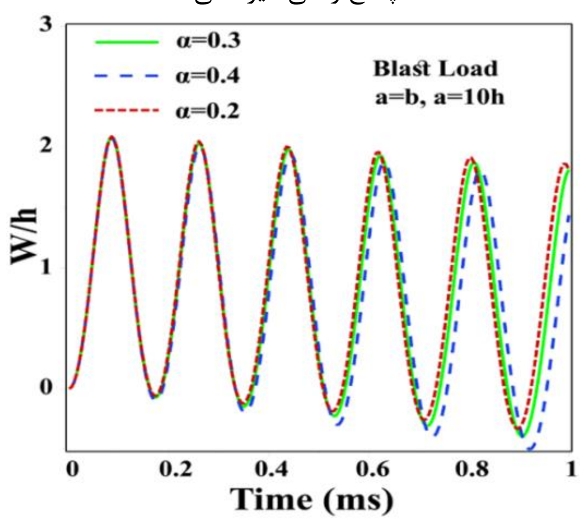


شکل (۵): پاسخ زمانی غیرخطی برای میدان جابجایی برشی مرتبه اول و سوم تحت بارگذاری بلست

در شکل ۶ اثرات زمان فاز مثبت بارگذاری موج بلست بر پاسخ زمانی غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این قسمت اثرات بستر پاسترناک در نظر گرفته نشده است. همان‌طور که از شکل ۶ مشخص است، با کاهش مدت‌زمان فاز مثبت بارگذاری موج انفجاری، پاسخ زمانی غیرخطی افزایش پیدا می‌کند و با افزایش آن، مقدار منفی پاسخ زمانی رشد چشمگیری خواهد داشت. همچنین با افزایش مدت‌زمان فاز مثبت بارگذاری، مقدار فرکانس ارتعاشات ورق افزایش می‌یابد. در شکل ۷ اثرات پارامتر شکل موج در بارگذاری انفجاری بر پاسخ زمانی غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.



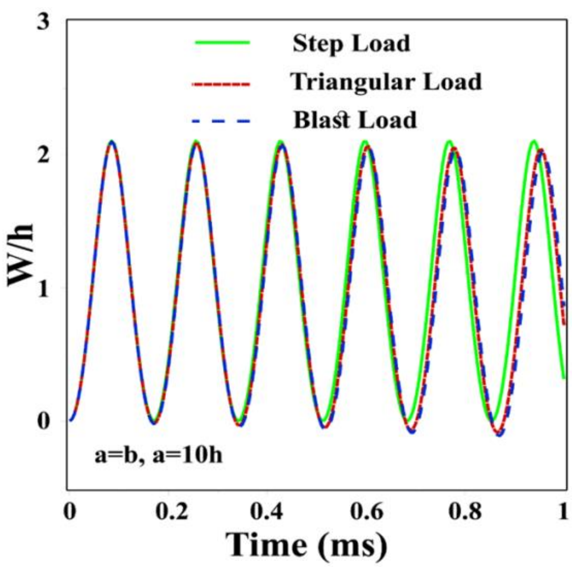
شکل (۶): اثر مدت‌زمان فاز مثبت بارگذاری بلست بر روی پاسخ زمانی غیرخطی



شکل (۷): اثر پارامتر شکل موج بارگذاری بلست بر پاسخ زمانی غیرخطی

در این قسمت اثرات بستر پاسترناک در نظر گرفته نشده است. مطابق با نتایج به‌دست‌آمده، با افزایش مقدار پارامتر شکل موج، اثر فاز منفی بارگذاری بلست تقویت شده و منجر به افزایش جابجایی بی‌بعد در مرکز ورق می‌گردد. همچنین افزایش مقدار پارامتر شکل موج، موجب کاهش فرکانس ارتعاشات ورق نیز گردیده است.

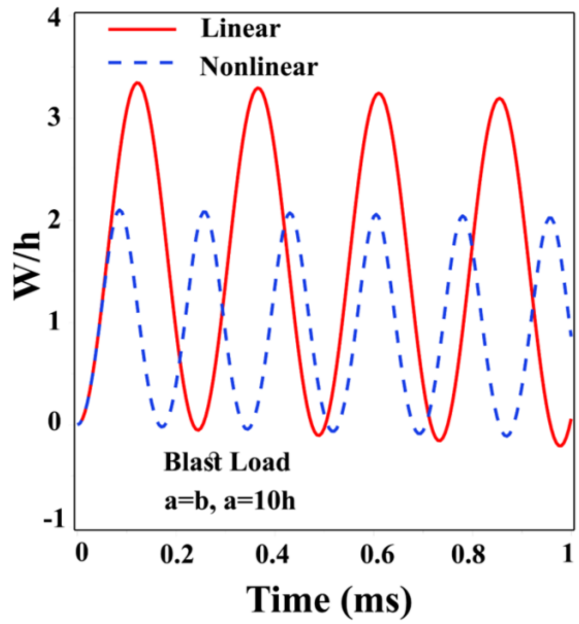
در شکل ۸ اثرات بارگذاری‌های مختلف بر روی پاسخ زمانی غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت موردبررسی قرار گرفته است. در این قسمت اثرات بستر پاسترناک در نظر گرفته نشده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، پاسخ زمانی بدون بعد غیرخطی تحت بارگذاری پله بیشتر از بارگذاری موج مثلثی و در بارگذاری موج مثلثی بیشتر از بارگذاری موج بلست می‌باشد. این بدین دلیل است که دامنه نوسانات به ناحیه بارگذاری مرتبط است که در حالت بارگذاری پله بیشترین مقدار را دارد و در حالت بارگذاری موج بلست کمترین مقدار را دارد.



شکل (۸): پاسخ زمانی غیرخطی بدون بعد تحت بارگذاری‌های مثلثی، پله و موج بلست

در شکل ۹ اثرات در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی نسبت به حالت خطی نشان داده شده است. در این قسمت اثرات بستر پاسترناک در نظر گرفته نشده است. همان‌طور که مشخص است، پاسخ خطی و غیرخطی ابتدا مشابه به یکدیگر می‌باشد، اما با گذشت زمان رفتار آن‌ها متفاوت از یکدیگر می‌شود. مطابق با شکل ۹، در حالت استفاده از

کرنش‌های غیرخطی، مقدار بیشینه دامنه بدون بعد نسبت به حالت خطی، کوچک‌تر است، اما فرکانس ارتعاشات پیش‌بینی‌شده آن بزرگ‌تر است. این افزایش مقدار فرکانس، با افزایش میزان جابجایی بدون بعد، افزایش نیز خواهد یافت.



شکل (۹): مقایسه پاسخ زمانی خطی و غیرخطی ورق تحت بارگذاری بلست

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی پاسخ زمانی غیرخطی چندلایه‌های فلز کامپوزیت تحت بارگذاری‌های فشار یکنواخت متغیر بازمان به‌صورت موج مثلثی، پله و موج بلست (تابع‌نمایی) پرداخته شده است. میدان جابجایی برشی مرتبه سوم همراه با روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون‌کارمن برای به دست آوردن معادلات دینامیکی غیرخطی به کار رفته‌اند. با استفاده از روش گالرکین معادلات جداسازی شده‌اند و پاسخ زمانی با استفاده از روش عددی رانگ‌کوتا به دست آمده‌اند. در نهایت اثرات پارامترهای مختلف از جمله نسبت ابعادی، زمان فاز مثبت بارگذاری، اثر بستر پاسترناک، و نوع پالس‌های فشاری بر پاسخ زمانی غیرخطی ورق موردبررسی قرار گرفته‌اند.

مطابق با نتایج به‌دست‌آمده مقدار جابجایی بدون بعد در مرکز ورق با کاهش نسبت ابعادی به‌صورت نمایی کاهش یافته و نیز فرکانس ارتعاشات ورق افزایش یافته است. همچنین با کاهش مدت‌زمان فاز مثبت بارگذاری، دامنه جابجایی بدون بعد افزایش یافته و فرکانس ارتعاشات ورق کاهش می‌یابد. همچنین کاهش پارامتر شکل موج منجر به کاهش دامنه جابجایی بدون بعد و افزایش فرکانس ارتعاشات ورق شده است. با توجه به پارامترهای بررسی‌شده، پارامترهایی چون نسبت ابعادی، ضخامت چندلایه و زمان فاز مثبت بارگذاری دارای تأثیر چشمگیری بر پاسخ زمانی سازه هستند و لذا بایستی در طراحی این‌گونه سازه‌ها بیشتر موردتوجه قرار بگیرند. نکته جالب‌توجه در زمان بارگذاری موج بلست این است که با کم شدن مقدار زمان فاز مثبت، اثر فاز منفی بارگذاری موج بلست افزایش می‌یابد که اثر آن می‌تواند از اثر پیشانی موج بلست نیز بیشتر باشد.

۷- مراجع

[1] Botelho EC, Silva RA, Pardini LC, Rezende MC. A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures. Materials Research. 2006;9(3):247-56.

[2] Safri S, Sultan M, Yidris N, Mustapha F. Low velocity and high velocity impact test on composite materials–a review. Int J Eng Sci. 2014;3(9):50-60.

[3] Sadighi M, Alderliesten R, Benedictus R. Impact resistance of fiber-metal laminates: A review. International Journal of Impact Engineering. 2012;49:77-90.

[4] Sinmazçelik T, Avcu E, Bora MÖ, Çoban O. A review: Fibre metal laminates, background, bonding types and applied test methods. Materials & Design. 2011;32(7):3671-85.

[5] Vlot A, Vogelesang L, De Vries T. Towards application of fibre metal laminates in large aircraft. Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 1999.

[6] De Vries TJ. Blunt and sharp notch behaviour of Glare laminates. 2001.

[7] Vermeeren C. An historic overview of the development of fibre metal laminates. Applied Composite Materials. 2003;10(4):189-205.

[8] Vlot A. Glare: history of the development of a new aircraft material: Springer Science & Business Media; 2007.

[9] Hagenbeek M. Characterisation of fibre metal laminates under thermomechanical loadings. 2005.

[10] Botelho E, Campos A, De Barros E, Pardini L, Rezende M. Damping behavior of continuous fiber/metal composite materials by the free vibration method. Composites part B: Engineering. 2005;37(2-3):255-63.

[11] Malik M, Bert CW. Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. International Journal of Solids and Structures. 1998;35(3-4):299-318.

[12] Ganapathi M, Makhecha D. Free vibration analysis of multi-layered composite laminates based on an accurate higher-order theory. Composites Part B: Engineering. 2001;32(6):535-43.

[13] Akhras G, Li W. Static and free vibration analysis of composite plates using spline finite strips with higher-order shear deformation. Composites Part B: Engineering. 2005;36(6-7):496-503.

[14] Ahmadi M, Ansari R, Rouhi H. Multi-scale bending, buckling and vibration analyses of carbon fiber/carbon nanotube-reinforced polymer nanocomposite plates with various shapes. Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures. 2017;93:17-25.

[15] Andrianov I, Danishevs'Kyy V, Awrejcewicz J. An artificial small perturbation parameter and nonlinear plate vibrations. Journal of Sound and Vibration. 2005;283(3-5):561-71.

[16] Li J-J, Cheng C-J. Differential quadrature method for nonlinear vibration of orthotropic plates with finite deformation and transverse shear effect. Journal of sound and vibration. 2005;281(1-2):295-309.

[17] Shooshtari A, Razavi S. A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates. Composite Structures. 2010;92(11):2663-75.

[18] Wu W, Shu C, Wang C. Mesh-free least-squares-based finite difference method for large-amplitude free vibration analysis of arbitrarily shaped thin plates. Journal of Sound and Vibration. 2008;317(3-5):955-74.

[19] Kumari E, Singha M. Nonlinear response of laminated panels under blast load. Procedia engineering. 2017;173:539-46.

[20] Dinh Duc N, Tuan ND, Tran P, Quan TQ. Nonlinear dynamic response and vibration of imperfect shear deformable functionally graded plates subjected to blast and thermal loads. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2017;24(4):318-29.

[21] Jomeh-Montazeri R, Shahabian-Moghadam F, Geometrical nonlinear dynamic analysis of cylindrical FML shells under explosive loading. International Conference Data Engineering. Tabriz, Civil Engineering, Architecture & Urban Planning, 2018. (In Persian)

[22] Reddy JN. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1990;25(6):677-86.

[23] Ghasemi A, Taheri-Behrooz F, Farahani S, Mohandes M. Nonlinear free vibration of an Euler-Bernoulli composite beam undergoing finite strain subjected to different boundary conditions. Journal of Vibration and Control. 2016;22(3):799-811.

[24] Mohandes M, Ghasemi AR. Finite strain analysis of nonlinear vibrations of symmetric laminated composite Timoshenko beams using generalized differential quadrature method. Journal of Vibration and Control. 2016;22(4):940-54.

[25] Ghasemi A, Mohandes M. Nonlinear free vibration of laminated composite Euler-Bernoulli beams based on finite strain using generalized differential quadrature method. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2017;24(11):917-23.

[26] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis: CRC press; 2003.

[27] Hosseini M, Bahreman M, Jamalpoor A. Using the modified strain gradient theory to investigate the size-dependent biaxial buckling analysis of an orthotropic multi-microplate system. Acta Mechanica. 2016;227(6):1621-43.

[28] Dobyns A. Analysis of simply-supported orthotropic plates subject to static and dynamic loads. AiAA Journal. 1981;19(5):642-50.

[29] Liu C, Ke L-L, Wang Y-S, Yang J. Nonlinear vibration of nonlocal piezoelectric nanoplates. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2015;15(08):1540013.

[30] Razavi S, Shooshtari A. Nonlinear free vibration of magneto-electro-elastic rectangular plates. Composite Structures. 2015;119:377-84.

[31] Shabanpour S, Razavi S, Shooshtari A. Nonlinear vibration analysis of laminated magneto-electro-elastic rectangular plate based on third-order shear deformation theory. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering. 2019;43(1):211-23.

[32] Hashemi SH, Arsanjani M. Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates. International Journal of Solids and Structures. 2005;42(3-4):819-53.

[33] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Taher HRD. Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. Applied Mathematical Modelling. 2011;35(2):708-27.

[34] Leissa AW. The free vibration of rectangular plates. Journal of sound and vibration. 1973;31(3):257-93.

[35] Malik M, Bert CW. Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. International Journal of Solids and Structures. 1998;35(3-4):299-318.

[36] Upadhyay A, Pandey R, Shukla K. Nonlinear dynamic response of laminated composite plates subjected to pulse loading. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011;16(11):4530-44.

[37] Lee S, Reddy J, Rostam-Abadi F. Transient analysis of laminated composite plates with embedded smart-material layers. Finite Elements in Analysis and Design. 2004;40(5-6):463-83.

پیوست:

به‌منظور به دست آوردن روابط حاکم بر رفتار چندلایه، با استفاده از روابط پارامترهای Q_{ij}, P_{ij} , M_{ij} , N_{ij} و R_{ij} جایگذاری آن‌ها درون روابط ۱۲، معادلات کلی حاکم بر مسئله مطابق با روابط زیر به دست خواهند آمد:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta u}_0 : A_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1D_{11}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{12}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\\
&-C_1D_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)+A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)\\
&-C_1D_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}-C_1D_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\\
&+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}-C_1D_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&+B_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\right)-C_1D_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta v}_0 : A_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{12}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}-C_1D_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+A_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}\\
&-C_1D_{22}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&-C_1D_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1D_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)\\
&+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}-C_1D_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&+B_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)-C_1D_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial x^2}\right)=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta w}_0 : \left\{A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+B_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-C_1D_{11}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}-C_1D_{12}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\right.\\
&\left.+A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)-C_1D_{16}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)\right\}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\left\{A_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right.\\
&+B_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1D_{11}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+B_{12}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}-C_1D_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)\\
&\left.+A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)-C_1D_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right\}\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
&+C_1\left\{D_{11}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+G_{11}\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3}-C_1H_{11}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)+D_{12}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right.\\
&+G_{12}\frac{\partial^3\theta_y}{\partial x^2\partial y}-C_1H_{12}\left(\frac{\partial^3\theta_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)+D_{16}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\frac{\partial w_0}{\partial y}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+\ldots
\end{aligned}
$$

$$+G_{16}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial x^3}\right)-C_1H_{16}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial x^3}+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}\right)\Bigg\}+\Bigg\{A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2-C_1D_{12}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right)$$

$$+B_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}-C_1D_{22}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)$$

$$-C_1D_{26}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\Bigg\}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\Bigg\{A_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}-C_1D_{22}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)$$

$$+A_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+B_{12}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}-C_1D_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\partial x^2}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+B_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}\right)-C_1D_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)\Bigg\}\frac{\partial w_0}{\partial y}+C_1\Bigg\{D_{12}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2\partial x}+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)$$

$$+G_{12}\frac{\partial^3\theta_x}{\partial y^2\partial x}-C_1H_{12}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)+D_{22}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+G_{22}\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y^3}-C_1H_{22}\left(\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)$$

$$+D_{26}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+G_{26}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y^2\partial x}\right)-C_1H_{26}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y^2\partial x}\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^3\partial x}\right)\Bigg\}\Bigg\}+2\Bigg\{A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+B_{16}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-C_1D_{16}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)+B_{26}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}$$

$$-C_1D_{26}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)-C_1D_{66}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\Bigg\}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$

$$+\Bigg\{A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+B_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}-C_1D_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^{2\partial y}}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+B_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}$$

$$-C_1D_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}\right)-C_1D_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)\Bigg\}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\Bigg\{A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1D_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

$$+B_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}-C_1D_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)$$

$$-C_1D_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\Bigg\}\frac{\partial w_0}{\partial y}+2C_1\Bigg\{D_{16}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+G_{16}\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^2\partial y}-C_1H_{16}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^2\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}\right)+D_{26}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+G_{26}\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y^2\partial x}-C_1H_{26}\left(\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial xy^3}\right)+D_{66}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+G_{66}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial x^2\partial y}\right)-C_1H_{66}\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial x^2\partial y}\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial x^2}\right)\Bigg\}\Bigg\}+\left\{A_{45}-6C_1E_{45}+9C_1^2G_{45}\right\}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+\left\{A_{55}-6C_1E_{55}+9C_1^2G_{55}\right\}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+\{A_{44}-6C_1E_{44}$$

$$+9C_1^2G_{44}\}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+\left\{A_{45}-6C_1E_{45}+9C_1^2G_{45}\right\}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+K_e w_0+K_p\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+q=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$+I_3C_1\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial t^2}+I_3C_1\frac{\partial^3 v_0}{\partial y\partial t^2}+I_4C_1\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x\partial t^2}+I_4C_1\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y\partial t^2}-I_6C_1^2\left(\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3\theta_y}{\partial y\partial t^2}\right)-I_6C_1^2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial t^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta\theta_x}: B_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+E_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1G_{11}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+E_{12}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\\
&-C_1G_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+E_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)\\
&-C_1G_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)-C_1\left\{D_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+G_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1H_{11}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)\right.\\
&+D_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+G_{12}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}-C_1H_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+D_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&\left.+G_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)-C_1H_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right\}+B_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+E_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}\\
&-C_1G_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+E_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}-C_1G_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)\\
&+B_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+E_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\right)-C_1G_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)\\
&-C_1\left\{D_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+G_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}-C_1H_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+D_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+G_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}\right.\\
&-C_1H_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+D_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)-C_1H_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)\\
&\left.+G_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\right)\right\}-\left\{\left(A_{45}-6C_1E_{45}+9C_1^2G_{45}\right)\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\left(A_{55}-6C_1E_{55}+9C_1^2G_{55}\right)\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right\}\\
&=I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-2I_4C_1\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}-I_4C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\,\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{\delta\theta_y}\ : B_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+E_{12}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}-C_1G_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+E_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}$$

$$-C_1G_{22}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)-C_1G_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)$$

$$+E_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\right)-C_1\left\{D_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+G_{12}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}-C_1H_{12}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+D_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\right.$$

$$+G_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}-C_1H_{22}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+D_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+G_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$\left.-C_1H_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)\right\}+B_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+E_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-C_1G_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)$$

$$+B_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+E_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}-C_1G_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$+E_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)-C_1G_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)-C_1\left\{D_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+G_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\right.$$

$$-C_1H_{16}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+D_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+G_{26}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}-C_1H_{26}\left(\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+....$$

$$\left.+D_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)+G_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}\right)-C_1H_{66}\left(\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right\}$$

$$-\left\{\left(A_{45}-6C_1E_{45}+9C_1^2G_{45}\right)\left(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+\left(A_{44}-6C_1E_{44}+9C_1^2G_{44}\right)\left(\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\right\}=I_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_3C_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}$$

$$-2I_4C_1\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}-I_4C_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^2\theta_y}{\partial t^2}+I_6c_1^2\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\,\partial t^2}$$

در این رابطه ثوابت $\left(A_{ij},B_{ij},E_{ij},D_{ij},G_{ij},H_{ij}\right)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\left(A_{ij},B_{ij},E_{ij},D_{ij},G_{ij},H_{ij}\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}\left(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6\right)dz=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\bar{Q}_{ij}^{\,k}\left(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6\right)dz=$$

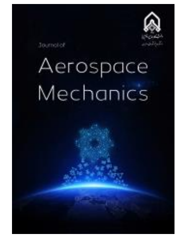
$$=\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{ij}^{\,k}\left\{\left(h_{k+1}-h_k\right),\frac{1}{2}\left(h_{k+1}^2-h_k^2\right),\frac{1}{3}\left(h_{k+1}^3-h_k^3\right),\frac{1}{4}\left(h_{k+1}^4-h_k^4\right),\frac{1}{5}\left(h_{k+1}^5-h_k^5\right),\frac{1}{7}\left(h_{k+1}^7-h_k^7\right)\right\}$$

که در این رابطه k شمارنده شماره لایه‌ها می‌باشد. همچنین در این رابطه ازآنجایی‌که $\bar{Q}_{ij}$ اعداد ثابتی می‌باشند از انتگرال خارج شده و رابطه انتگرالی به‌صورت یک سری جمع تبدیل می‌گردد.

Journal of Aerospace Mechanics/ 2022/ Vol.18/ No.3/ 109-125

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1401.18.3.8.0



Investigation of Transient Nonlinear Response of Fiber Metal Laminates (FML’s) under Uniform Time-dependent Pressure Loading

Ali Kiani[1], Rouhollah Hosseini[2*], Hossein Khodarahmi[3]

[1] Ph.D. Student, Faculty of Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran

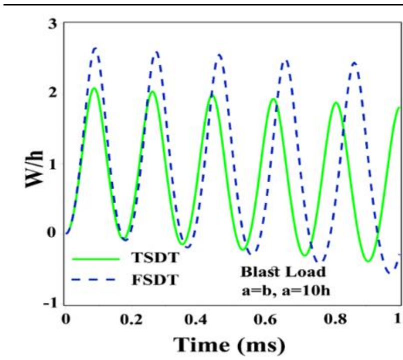
[2] Assistant Professor, Faculty of Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran

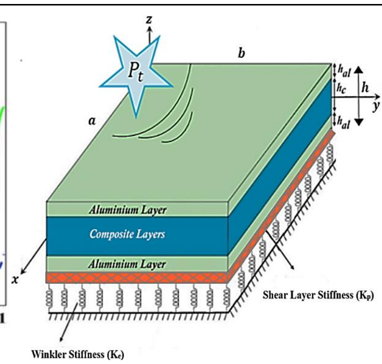
[3] Professor, Faculty of Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- By reducing the positive phase time of loading and increasing the waveform parameter, the effect of the negative phase of loading is amplified and leads to an increase in dimensionless displacement in the center of the plate.
- The linear stiffness parameter in comparison with the shear layer parameter has less effect on the dynamic response.

GRAPHICAL ABSTRACT





ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 1 November 2021

Received in revised form: 25 December 2021

Accepted: 10 January 2022

Available online: 15 January 2022

*Correspondence:

r.hosseini.mech@gmail.com

How to cite this article:

A. Kiani, R. Hosseini, H. Khodarahmi. Investigation of transient nonlinear response of fiber metal laminates (fml’s) under uniform time-dependent pressure loading. Journal of Aerospace Mechanics. 2022; 18(3):109-125.

Keywords:

Nonlinear response

Laminated composite

Time-dependent uniform pressure load

Galerkin method

Runge Kutta method

ABSTRACT

Fiber Metal Laminates (FML’s) are being used in many applications ranging from aircraft, submarines and ships to pressure vessels and automotive parts. In this study, the theoretical and numerical analysis of fiber metal laminates (FML’s) subjected to time-dependent uniform pressure load have been investigated. For this purpose, the plate is modeled based on the Reddy’s higher order shear deformation plate theory and the effects of the von Kármán geometric nonlinearity are included in the derivation of the motion equations. The FML is assumed to rest on the Pasternak foundation and simply supported boundary conditions are considered for all edges of the plate. Then, Nonlinear Partial differential Equations (PDEs) of motion are separated by using of the Galerkin method and finally solved using the Runge Kutta method. The results of conducted theoretical analyses compared with the presented results in the literature and good agreement is found. Also, in order to investigate the effective parameters, the effect of aspect ratio, Pasternak foundation and type of pressure pulses on the dynamic response of the plate have been examined. According to the obtained results, by reducing the positive phase time of loading and increasing the waveform parameter, the effect of the negative phase of loading is amplified and leads to an increase in dimensionless displacement in the center of the plate. Also, it was realized that the linear stiffness parameter in comparison with the shear layer parameter has less effect on the dynamic response.