



طراحی کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهمینه: کاربرد در کنترل وضعیت ماهواره

مهیار مدنی اصفهانی^۱، سعید شمسقدری^۲، طالب عبدالهی^۳

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

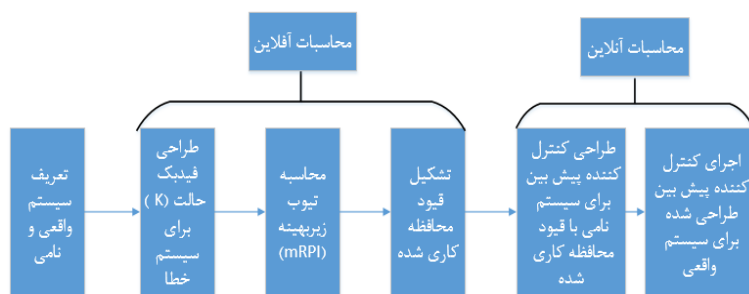
^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

^۳ استادیار، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران

برجسته‌ها

- تئوری کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهمینه جهت کنترل وضعیت ماهواره ارائه شده است.
- تیوب زیربهمینه، باعث کاهش تعداد رئوس تیوب و کاهش حجم محاسبات می شود.
- راهکار تیوب زیربهمینه امکان محاسبه مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم را برای سیستم های پیچیده فراهم ساخته است.

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۰۴

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۹/۲۲

پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۴

ارائه برخط: ۱۴۰۱/۱۲/۰۱

*نویسنده مسئول:

shamaghdari@iust.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب

زیربهمینه

کاهش محاسبات تخمین کوچکترین

مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم

کنترل وضعیت ماهواره دارای چرخ های

عکس العملی

اغتشاش خارجی نامعین و کران دار

چکیده

در این مقاله، روند طراحی کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهمینه با کاربرد در کنترل وضعیت ماهواره‌ای با عملگر چرخ‌های عکس‌العملی بیان شده است. ماهواره‌ای که قصد کنترل وضعیت آن وجود دارد، اغتشاشات خارجی زیادی در فضا به آن وارد می‌شود؛ بنابراین، این طراحی در حضور اغتشاش خارجی نامعین و کران دار طراحی شده است. با توجه به اینکه اغتشاشات دارای محدوده مشخصی می‌باشد، امکان کنترل وضعیت ماهواره با استفاده از کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب ممکن است. از آنجایی که ماهواره که دارای سیستمی با دینامیک پیچیده است، چالش افزایش حجم محاسبات در هنگام محاسبه کوچکترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم به وجود می‌آید. چالش افزایش حجم محاسبات این مجموعه یا همان تیوب در سیستم‌های پیچیده همانند ماهواره، ناشی از تعداد متغیرهای حالت زیاد سیستم است. تعداد زیاد متغیرهای حالت سیستم باعث افزایش نمایی حجم محاسبات به دلیل تشکیل جمع‌های متعدد مینکوفسکی در محاسبه تیوب می‌شود. در راستای برطرف شدن این چالش، راهکار نوین کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهمینه ارائه شده است. این راهکار باعث توقف روند افزایش نمایی تعداد جمع‌های مینکوفسکی و در نتیجه کاهش حجم محاسبات تیوب می‌گردد. شبیه‌سازی برای سیستم مورد نظر انجام شده که نشان‌دهنده کنترل وضعیت ماهواره‌ای با چرخ‌های عکس‌العملی با کاهش حجم محاسبات در هنگام طراحی کنترل کننده پیش بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهمینه است.

۱- مقدمه

پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب^۴ بوده که با توجه به ویژگی‌های آن، زیرشاخه کنترل‌کننده‌های پیش‌بین مقاوم است. در سال ۲۰۰۴ برای اولین بار کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب توسط لانگسون و همکاران [۵] معرفی شد. از جمله ویژگی‌های این کنترل‌کننده، توانایی پاسخگویی در حضور اغتشاش کران‌دار و تضمین پایداری مجانبی است. عملکرد این کنترل‌کننده بدین گونه بوده که با طراحی کنترل‌کننده مدل پیش‌بین کلاسیک برای سیستم نامی و همچنین به دست آوردن کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم^۵ اغتشاش‌ها، یک مجموعه حول حالت‌های سیستم مجموعه نامی تشکیل داده و تضمین می‌گردد که حالت سیستم واقعی با حضور این اغتشاش کران‌دار از این مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم بیرون نمی‌رود. این مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم همان تیوب است.

در راستای طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب (TMPC) نیاز به محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mRPI) برای سیستم در حضور اغتشاش می‌باشد. از طرفی این نکته شایان‌ذکر بوده که محاسبه مجموعه mRPI غیرممکن بوده فلذا باید از تخمین این مجموعه استفاده گردد. راهکار مناسبی جهت این تخمین توسط راکووویچ و همکارانش [۶] معرفی شد.

پژوهش‌های متعددی جهت توسعه و بهبود تئوری کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) صورت گرفت. از جمله در نظر گرفتن قید ورودی در هنگام طراحی برای سیستم خطی گسسته دارای اغتشاش کران‌دار و تضمین پایداری نامی [۷]. در [۸] روند طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) برای سیستم خطی و گسسته با فیدبک خروجی بیان شده است. در این مقاله قید حالت و ورودی و همچنین اغتشاش خروجی برای سیستم در نظر گرفته شده است. این کنترل‌کننده در حقیقت شامل یک تخمین‌گر حالت لیونبرگر^۶ و همچنین کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) است. از طرفی با در نظر گرفتن اهداف اقتصادی،

یکی از پرکاربردترین روش‌های طراحی کنترل‌کننده در صنعت پس از کنترل‌کننده تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر^۱، کنترل‌کننده مدل پیش‌بین^۲ می‌باشد. تفاوت عمده آن با سایر روش‌ها، پیش‌بینی نمودن آینده رفتار سیستم علاوه بر استفاده از سیگنال خطا است [۱]. کنترل پیش‌بین یک روش مهم در کنترل سیستم‌هایی که بر روی سیگنال کنترلی و متغیرهای حالت آن محدودیت وجود دارد، است. کنترل‌کننده مدل پیش‌بین که امکان طراحی برای سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی با در نظر گرفتن اغتشاش هنگام طراحی سیگنال کنترلی را فراهم می‌کند، انتخاب مناسبی برای کنترل سیستم‌های پیچیده دارای عدم قطعیت می‌باشد. از طرفی با توجه به اینکه ماهواره، دارای سیستمی با دینامیک پیچیده به همراه عدم قطعیت‌های ناشی از پارامترهای مدل و اغتشاشات است، کنترل وضعیت ماهواره امری چالش‌برانگیز شده است. با توجه به خصوصیات کنترل‌کننده‌های مدل پیش‌بین، این کنترل‌کننده انتخاب مناسبی برای کنترل وضعیت ماهواره‌ها است.

یکی از انواع این کنترل‌کننده، کنترل‌کننده مدل پیش‌بین مقاوم^۳ بوده که یکی از مشخصه‌های آن، تضمین عملکرد و پایداری و مقاوم بودن در مقابل اغتشاشات نامعین و محدود، است. از طرفی با استفاده از روش‌های کنترل‌کننده مدل پیش‌بین مقاوم می‌توان نامعینی مدل فرآیند را به‌طور صریح با مسئله ترکیب کرد. روش‌های مختلفی برای لحاظ کردن نامعینی در کنترل پیش‌بین مقاوم ارائه شده است که کنترل پیش‌بین مقاوم با توصیف صریح نامعینی از نوع جمع‌شونده [۲]، کنترل پیش‌بین مقاوم با قید ورودی برای سیستم‌های خطی با نامعینی دارای نرم محدود [۳]، کنترل پیش‌بین مقاوم برای سیستم‌ها با نامعینی چندوجهی با قید حالت و قید ورودی [۴] از آن جمله می‌باشد.

در کارهای انجام‌شده، راهکارهای مختلفی در راستای دفع اثر اغتشاشات یا نامعینی ارائه شده است. از جمله راهکارهای مقاوم‌سازی در برابر اغتشاشات استفاده از کنترل‌کننده مدل

⁴ Tube Model Predictive Control (TMPC)

⁵ minimal Robust Positive Invariant (mRPI)

⁶ Luenberger state estimator

¹ Proportional-integral-derivative (PID)

² Model Predictive Control (MPC)

³ Robust Model Predictive Control (RMPC)

مجاورت، از کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) استفاده شده است. با توجه به قیدهای طبیعی سیستم و همچنین وجود اغتشاش، پاسخ این کنترل‌کننده مناسب است.

همان‌طور که اشاره شد، لازمه استفاده از کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC)، محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mrPI) برای اغتشاش‌های وارده به سیستم است. راهکار تخمین ارائه شده در مقاله [۶]، دارای ایراد کاربردی می‌باشد. این روش در مواجهه با سیستم‌های پیچیده، باعث به وجود آمدن حجم بسیار زیاد محاسبات می‌گردد. با توجه به اینکه هنگام تخمین این مجموعه، جمع‌های متعدد مینکوفسکی استفاده می‌شود، حجم محاسبات به صورت نمایی افزایش می‌یابد. این مشکل هنگامی که تعداد متغیرهای حالت سیستم افزایش می‌یابد، بیشتر نمایان می‌گردد. چالش افزایش حجم محاسبات، امکان محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mrPI) را غیرممکن می‌سازد. در راستای برطرف شدن این چالش، در این مقاله تئوری جدید کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهینه^۴ ارائه شده است. استفاده از این راهکار کاربردی جدید باعث کاهش حجم محاسبات تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mrPI) می‌شود. در جهت راستی آزمایی این تئوری، طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهینه برای کنترل وضعیت ماهواره‌ای با چرخ‌های عکس‌العملی در حضور اغتشاش خارجی نامعین و کران‌دار صورت گرفته است. همچنین سینماتیک و دینامیک سیستم ماهواره که دارای ۶ متغیر حالت و ۳ چرخ عکس‌العملی می‌باشد، بر اساس مرجع [۱۸] بیان شده است.

در این مقاله در قسمت ۲، در ابتدا تئوری کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) بیان می‌شود. سپس چالش به وجود آمده در استفاده از این تئوری به عنوان انگیزه پژوهش بیان می‌گردد؛ و در ادامه راهکار کاربردی جهت رفع این چالش با ارائه تئوری کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهینه (SOTMPC) بیان می‌گردد. سپس در قسمت ۳، سینماتیک و دینامیک ماهواره بررسی می‌شود.

توسعه‌های جدیدی در تئوری کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب صورت گرفت. در [۹] برای یک سیستم غیرخطی، کنترل‌کننده پیش‌بین اقتصادی مبتنی بر تیوب^۱ طراحی شده است. همچنین بایان روابط پایداری مجانبی به اثبات رسیده است. در [۱۰] با در نظر گرفتن معیار اقتصادی متغیر بازمان در تابع هزینه مرحله‌ای کنترل‌کننده پیش‌بین اقتصادی مبتنی بر تیوب طراحی شده است. در مرجع [۱۱] برای سیستمی با محدودیت‌های ورودی وابسته به حالت کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب بر اساس تکنیک مجموع مربعات^۲ توسعه یافته است.

همان‌طور که بیان شد، استفاده از کنترل‌کننده مدل پیش‌بین برای کنترل وضعیت ماهواره‌های مختلف همواره مورد توجه بوده است. به عنوان مثال در مرجع [۱۲] برای کنترل وضعیت ماهواره از کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم استفاده شده است. همچنین در [۱۳] با وجود شرایط سخت کنترل وضعیت سه محوره ماهواره با استفاده از نیروی محرکه مغناطیسی که ناشی از وجود میدان مغناطیسی متغیر بازمان زمین می‌باشد، با استفاده از یک کنترل‌کننده پیش‌بین تغییرپذیر بازمان به حل این مشکل می‌پردازد. از طرفی با توجه به اینکه سیستم ماهواره دارای ماهیت غیرخطی و مقید می‌باشد، می‌توان برای کنترل وضعیت ماهواره از کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) استفاده نمود که علاوه بر مزایای کنترل پیش‌بین کلاسیک مانند اعمال صریح قیود و تضمین پایداری، امکان لحاظ کردن نامعینی‌های مدل هم در این روش وجود دارد. در مرجع [۱۴]، طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) برای کنترل وضعیت یک ماهواره مکعبی مطالعاتی کوچک دارای اغتشاش خارجی کران‌دار و عدم قطعیت پارامتریک دینامیک صورت گرفته است. در مرجع [۱۵]، کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) جهت کنترل وضعیت یک ماهواره مکعبی با کنترل‌کننده مد لغزشی^۳ ترکیب شده است. در [۱۶ و ۱۷]، برای کنترل دو ماهواره مستقل و بررسی نقطه برخورد و استفاده از عملیات

1 Economic Tube Model Predictive Control (ETMPC)

2 Sum of Squares (SOS)

3 Sliding Mode Control (SMC)

4 Sub-Optimal Tube MPC (SOTMPC)

$$\{u(0), u(1), u(2), \dots, u(N-1)\} \quad (۳)$$

$$\{w(0), w(1), w(2), \dots, w(N-1)\}$$

که در این رابطه $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ می‌باشد. از طرفی پاسخ حل معادله (۱) در زمان i به صورت $\phi(i; x, u, w)$ تعریف می‌گردد. همچنین سیستم نامی متناظر که بدون در نظر گرفتن اغتشاش است، به صورت رابطه (۴) می‌باشد.

$$\tilde{x}^+ = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (۴)$$

پاسخ حل معامله سیستم نامی نیز به صورت $\bar{\phi}(i; \tilde{x}, \tilde{u})$ نشان داده می‌شود. در راستای طراحی کنترل کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب در ابتدا مقدار K به نحوی در نظر گرفته شود، که علاوه بر $K \in R^{m \times n}$ ، میزان $A_K \triangleq A + BK$ نیز پایدار باشد. پس از آنکه امکان پایدار شدن سیستم نامی با تعیین K مناسب و پایدار ساز میسر شد، باید کنترل کننده نسبت به تأثیر تمامی اغتشاش‌های احتمالی وارده به سیستم مقاوم گردد. در همین راستا برای سیستم نامعین کنترل شده $x^+ = A_K x + w$ مجموعه نامتغیر اغتشاش‌ها با Ω نمایش داده شده و به صورت رابطه (۵) تعریف می‌گردد:

$$A_K \Omega \oplus W \subseteq \Omega \quad (۵)$$

که در این معادله، برای جمع دو مجموعه از جمع مینکوفسکی \oplus استفاده شده است. تعریف جمع مینکوفسکی برای دو مجموعه A, B بدین گونه است که با افزودن هر بردار در A به هر بردار در B تعریف شده که به صورت رابطه $A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ نمایش داده می‌شود. حال با تعریف انجام شده، ساختار اصلی تیوب بر اساس قضیه ذیل قابل بیان است.

قضیه-۱: با فرض اینکه مجموعه Ω برای $x^+ = A_K x + w$ مجموعه نامتغیر اغتشاشات باشد. چنانچه $x \in \tilde{x} \oplus \Omega$ و $u = \tilde{u} + K(x - \tilde{x})$ برقرار باشد، آن‌گاه برای تمام $w \in W$ داریم $x^+ \in \tilde{x}^+ \oplus \Omega$ که در آن $x^+ = Ax + Bu + w$ و همچنین $\tilde{x}^+ = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ است.

از طرفی در جهت کاهش محافظه‌کاری، به دنبال کوچک‌ترین مجموعه Ω ممکن خواهیم بود. کوچک‌ترین مجموعه ثابت اغتشاش‌ها^۱ یا کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (RPI)، به صورت $\sum_{i=0}^{\infty} A_K^i W$ قابل تعریف است.

در نهایت در بخش ۴، نتایج شبیه‌سازی تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mRPI) با استفاده از تئوری جدید کنترل کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهمینه (SOTMPC) برای کنترل وضعیت ماهواره با چرخ‌های عکس‌العملی در حضور اغتشاش خارجی نامعین و کران‌دار ارائه شده است.

۲- روش‌های طراحی پیش‌بین و چالش‌های کاربردی آن و تئوری جدید SOTMPC

در این بخش در ابتدا تئوری طراحی کنترل کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب (TMPC) بر اساس مرجع [۵] بیان می‌گردد. در این تئوری از روش مرجع [۶] جهت تخمین mRPI استفاده شده است؛ که در ادامه روش مرجع [۶] جهت تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mRPI) بیان شده است. سپس چالش به وجود آمده در استفاده از این روش با ذکر مثال تحت عنوان چالش طراحی و محاسبات در روش‌های پیش‌بین بیان می‌گردد. در راستای برطرف نمودن این چالش تئوری جدید طراحی کنترل کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهمینه (SOTMPC) ارائه می‌گردد.

۲-۱- کنترل کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب

سیستم زمان گسسته خطی نامتغیر با زمان، به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته شده است.

$$x^+ = Ax + Bu + w \quad (۱)$$

در این رابطه، $x, x \in R^n$ حالت فعلی سیستم و $u, u \in R^m$ سیگنال کنترلی است. همچنین $w, w \in R^n$ اغتشاش محدود و کران‌دار در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن محدودیت‌های حالت سیستم و سیگنال کنترلی شرایط زیر نیز برقرار است.

$$u \in \mathbb{U}, x \in \mathbb{X}, w \in W \quad (۲)$$

که در این رابطه \mathbb{U} فشرده و \mathbb{X} بسته است و W فشرده است و مبدأ را شامل می‌شود. با در نظر گرفتن u به صورت مجموعه‌ای از سیگنال‌های کنترلی و همچنین w به صورت مجموعه‌ای از اغتشاش‌ها رابطه (۳) برقرار خواهد شد.

¹ minimal Disturbance Invariant Set

که در آن $J_{N-1} \triangleq \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ می‌باشد و همچنین X_f قید ناحیه نهایی کنترل پیش‌بین برای سیستم نامی است. پس در نتیجه داریم:

$$U_N(x) = \{\tilde{u} \mid \tilde{u}(i) \in \bar{U}, \bar{\phi}(i; \tilde{x}, \tilde{u}) \in \bar{X}, \quad (12)$$

$$\forall i \in J_{N-1}, \bar{\phi}(N; \tilde{x}, \tilde{u}) \in X_f\}$$

که $U_N(\tilde{x})$ همان توالی سیگنال کنترلی به دست آمده مربوط به پاسخ حلقه باز کنترل پیش‌بین مدل برای سیستم نامی است. از طرفی مجموعه $\bar{X}_N \triangleq \{\tilde{x} \mid U_N(\tilde{x}) \neq \emptyset\}$ شامل شرایط اولیه‌ای است که به ازای آن، مسئله کنترل پیش‌بین برای سیستم نامی، شدنی باشد. در خصوص تابع هدف نیز روابط زیر برقرار است:

$$\ell(\tilde{x}, \tilde{u}) \triangleq \left(\frac{1}{2}\right) [\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}] \quad (13)$$

$$V_f(\tilde{x}) \triangleq \left(\frac{1}{2}\right) \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (14)$$

که در آن ماتریس‌های Q و R و P مثبت معین باشد. در نهایت با در نظر گرفتن، $\tilde{u}^o(x) \triangleq \{\tilde{u}_0^o(\tilde{x}), \tilde{u}_1^o(\tilde{x}), \dots, \tilde{u}_{N-1}^o(\tilde{x})\}$ قانون کنترل پیش‌بین به صورت $\kappa_N^o(\tilde{x}) \triangleq \tilde{u}_0^o(\tilde{x})$ می‌باشد. بنابراین در مورد سیستم نامی داریم:

$$\tilde{x}^+ = A\tilde{x} + B\kappa_N^o(\tilde{x}) \quad (15)$$

در نتیجه مسئله کنترل پیش‌بین به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$V_N^*(\tilde{x}) = \min_{\tilde{x}_0, \tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in U_N(\tilde{x}_0), x \in \tilde{x}_0 \oplus \Omega\} \quad (16)$$

$$(\tilde{x}_0^*(\tilde{x}), \tilde{u}^*(\tilde{x})) = \arg \min_{\tilde{x}_0, \tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in U_N(\tilde{x}_0), x \in \tilde{x}_0 \oplus \Omega\} \quad (17)$$

چنانچه $u^*(x) \triangleq \{u_0^*(x), u_1^*(x), \dots, u_{N-1}^*(x)\}$ برقرار باشد، آنگاه قانون کنترل کننده اعمالی به سیستم واقعی به صورت رابطه $\kappa_N^*(x) \triangleq \tilde{u}_0^*(\tilde{x}) + K(x - \tilde{x}_0^*(\tilde{x}))$ همان‌طور که در این بخش بیان شد، تیوب به صورت کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم در نظر گرفته می‌شود. در زیر بخش بعدی، نحوه تخمین این مجموعه بر اساس مرجع [۶] بیان شده است.

۲-۲- محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر

مثبت مقاوم (mRPI)

در این قسمت نحوه تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mRPI) بر اساس مرجع [۶] بیان می‌شود.

همان‌طور که اشاره شد، این مجموعه همان تیوب می‌باشد. محاسبه کوچک‌ترین این مجموعه غیرممکن می‌باشد. از این رو تقریبی از کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم نیز قابل قبول می‌باشد. این تقریب به صورت یک مجموعه چندوجهی^۱ قابل محاسبه می‌باشد. محاسبه تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم بر اساس مرجع [۶] است و در زیر بخش بعدی آورده شده است. با توجه به اینکه تمام تأثیرات احتمالی ممکن از اغتشاشات را به صورت یک تیوب در نظر گرفتیم، اکنون کافی است که مسئله کنترل پیش‌بین کلاسیک برای سیستم نامی تعریف و حل شده و سپس تیوب را به مسئله اضافه نمود. تیوب اضافه شده در هر مرحله، تمامی تأثیرات اغتشاش کران دار است که به مسئله اضافه می‌شود. در حقیقت اعمال اغتشاش به مسئله به صورت تحلیلی بررسی شده و به مسئله اعمال می‌گردد.

مسئله کنترل مدل پیش‌بین کلاسیک برای سیستم نامی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_N^o(\tilde{x}) = \min_{\tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in U_N(\tilde{x})\} \quad (6)$$

$$u^o(\tilde{x}) = \arg \min_{\tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in U_N(\tilde{x})\} \quad (7)$$

که $V_N^o(\tilde{x})$ مقدار بهینه تابع هدف و $\tilde{u}^o(\tilde{x})$ توالی سیگنال کنترلی بهینه ناشی از حل حلقه باز کنترل پیش‌بین کلاسیک برای سیستم نامی است. همچنین در این مسئله، تابع هزینه مطابق رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$V_N(\tilde{x}, \tilde{u}) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \ell(\tilde{x}(i), \tilde{u}(i)) + V_f(\tilde{x}(N)) \quad (8)$$

که $V_N(\tilde{x}, \tilde{u})$ تابع هدف کنترل پیش‌بین کلاسیک برای سیستم نامی می‌باشد. برای معرفی توالی سیگنال کنترلی به دست آمده از پاسخ حلقه باز کنترل پیش‌بین برای سیستم نامی، در ابتدا قیود محافظه‌کاری شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{u}(i) \in \bar{U} \triangleq U \ominus K\Omega, \quad i \in J_{N-1} \quad (9)$$

$$\tilde{x}(i) \in \bar{X} \triangleq X \ominus \Omega, \quad i \in J_{N-1} \quad (10)$$

$$\tilde{x}(N) \in X_f \subset X \ominus \Omega \quad (11)$$

¹ Polytopic

جمع مینکوفسکی است. این روش در هنگام مواجهه با سیستم‌های پیچیده که دارای تعداد متغیرهای حالت بیشتری هستند، دچار چالش کاربردی می‌گردد. با زیاد شدن تعداد متغیرهای حالت، تعداد جمع‌های مینکوفسکی به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد و در نتیجه تعداد رئوس مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (RPI) در هر مرحله افزایش پیدا می‌کند. محاسبه مجموعه‌ای با تعداد رئوس زیاد باعث افزایش حجم و زمان محاسبات می‌گردد. هر چه تعداد متغیرهای حالت بیشتر باشد، چالش افزایش حجم و زمان محاسبات جدی‌تر شده و به دلیل محدودیت سخت‌افزارها باعث ناکارآمدی این روش در هنگام محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mrRPI) می‌گردد. یک راهکار در راستای حل این چالش و کاهش حجم محاسبات این است که قیود تکراری در هنگام محاسبه هر مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (RPI) حذف گردد. این راهکار کمی مؤثر بوده و باعث کاهش تعداد رئوس این مجموعه می‌شود اما همچنان با زیاد شدن تعداد متغیرهای حالت، تعداد رئوس مجموعه RPI بدون قیود تکراری نیز افزایش یافته و همچنان با چالش افزایش حجم محاسبات روبه‌رو خواهیم بود. در راستای نشان دادن این چالش، شبیه‌سازی چندین سیستم با تعداد متغیرهای حالت مختلف با استفاده از روش مقاله [۶] و $\varepsilon = 10^{-3}$ صورت گرفته، که نتایج آن در جدول ۱ قابل مشاهده است. مشخصات سخت‌افزاری که تمامی شبیه‌سازی‌های این پژوهش با آن صورت گرفته، دارای پروسسور ۱۲ هسته‌ای AMD FX-7600P Radeon R7 همراه ۱۶GB رم و هارد SSD با ظرفیت ۵۱۲ GB است. این نکته شایان ذکر است که هرچقدر مقدار ε کوچک‌تر باشد، تعداد رئوس مجموعه mrRPI افزایش یافته و با چالش افزایش حجم محاسبات بیشتری روبه‌رو خواهیم بود. همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است، محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم یا همان تیوب، با استفاده از روش مرجع [۶] برای سیستم‌هایی با دینامیک پیچیده که تعداد متغیر حالت زیادی دارند، ناکارآمد است. حجم و زمان بالای محاسبات که ناشی از زیاد شدن تعداد رئوس mrRPI است، باعث به وجود آمدن این چالش شده است. در راستای حل این چالش، راهکار کاربردی تیوب زیر بهینه ارائه شده است.

در مسئله مطرح شده برای اطمینان از پایداری سیستم در برابر اغتشاشات خارجی نامعین و محدود، باید خطای میان سیستم واقعی و نامی، درون کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mrRPI) قرار گیرد. روند طراحی این کنترل کننده بدین صورت بوده که پس از محاسبه تیوب، قیود سیستم نامی محافظه‌کاری شده و پایداری سیستم تضمین می‌شود. سپس مسئله بهینه‌سازی برای دینامیک سیستم نامی با قیود جدید حل می‌شود.

بر اساس مقاله [۵]، در ابتدا مقدار K پایدارساز را باید به نحوی محاسبه نمود تا دینامیک خطا پایدار باشد. رابطه اینک جمع بی‌نهایت مجموعه برای محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mrRPI) امکان‌پذیر نیست، باید آن را با نرخ ε مشخص شده، تخمین زد. مجموعه دست‌یافتنی s عبارت است از $F_s = \bigoplus_{i=0}^{s-1} A^i W$ با فرض اینکه W و X مجموعه‌هایی محدب هستند. اگر A اکیداً پایدار و برابر با $A^s = \alpha I$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha < 1$ آنگاه F_s را می‌توان با یک تقریب درونی ε از F_∞ بیان کرد.

$$F_\infty \subseteq F(\alpha, s) = (1 - \alpha)^{-1} F_s \quad (18)$$

مقدار α و s با توجه به مقدار ε تعیین می‌شوند و با افزایش s مقدار α به ۰ نزدیک‌تر می‌شود. الگوریتم تعیین s مناسب در مقاله [۶] آمده است. این نکته شایان ذکر بوده که به ازای هر i در رابطه $F_s = \bigoplus_{i=0}^s A^i W$ ، مجموعه محاسبه شده یک مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (RPI) است.

۲-۳- چالش طراحی و محاسبات در روش‌های

پیشین

روش طراحی کنترل کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب و همچنین نحوه تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم یا همان تخمین تیوب بیان شد. در این قسمت چالش پدید آمده در هنگام استفاده از این روش بیان می‌گردد.

بر اساس الگوریتم ارائه شده در مرجع [۶]، پس از تعیین s مناسب، تخمین کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم طبق رابطه $F_s = \bigoplus_{i=0}^s A^i W$ به دست می‌آید. همان‌طور که از این رابطه مشخص است، این محاسبات شامل یک سلسله

$$\Omega_{i_{min}} = \min (projection_i^\Omega) \quad (21)$$

$$\Omega_{i_{max}} = \max (projection_i^\Omega)$$

که مجموعه $projection_i^\Omega$ تصویری از مجموعه تیوب (Ω) بر روی بردار i ام است. در رابطه بالا، اپراتورهای \min و \max به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار واقعی تصویر شده مجموعه تیوب روی بردار i ام را نشان می‌دهند. بدین ترتیب با استفاده از تیوب زیر بهینه، مسئله کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهینه به صورت زیر قابل بیان است.

$$V_N^*(\tilde{x}) = \min_{\tilde{x}_0, \tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_N(\tilde{x}_0), x \in \tilde{x}_0 \oplus \tilde{\Omega}\} \quad (22)$$

$$(\tilde{x}_0^*(\tilde{x}), \tilde{u}^*(\tilde{x})) = \arg \min_{\tilde{x}_0, \tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_N(\tilde{x}_0), x \in \tilde{x}_0 \oplus \tilde{\Omega}\} \quad (23)$$

همچنین در هنگام محافظه‌کاری قیود، بر اساس تیوب زیر بهینه صورت می‌گیرد. این نکته شایان‌ذکر بوده که استفاده از تیوب زیر بهینه که بزرگ‌تر از مجموعه mRPI است، منجر به افزایش محافظه‌کاری می‌گردد؛ اما این امر باعث شده که محاسبات ناممکن تقریب کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم برای سیستم‌های پیچیده میسر گردد. محاسبه تیوب زیر بهینه بر اساس الگوریتم زیر صورت می‌پذیرد.

الگوریتم-۱: پس از تعیین s مناسب بر اساس مرجع [۶]، با اجرای مراحل زیر، محاسبه تیوب زیر بهینه صورت می‌پذیرد.

- مرحله-۱: در نظر گرفتن $s = 1$
- مرحله-۲: محاسبه مجموعه mRPI یا همان تیوب (Ω) بر اساس رابطه $F_s = \bigoplus_{i=0}^s A^i W$ با در نظر گرفتن s متناظر
- مرحله-۳: محاسبه تیوب زیربهینه ($\tilde{\Omega}$) بر اساس روابط ۱۹ الی ۲۱ برای مجموعه به‌دست‌آمده در مرحله-۲
- مرحله-۴: در صورتی که مقدار s فعلی کمتر از مقدار s مناسب محاسبه‌شده باشد، یک واحد به آن اضافه‌شده و مجدداً از مرحله-۲، الگوریتم تکرار می‌شود. در صورتی که مقدار s فعلی برابر با s مناسب باشد، تیوب زیربهینه ($\tilde{\Omega}$) (به‌عنوان کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم (mRPI) در نظر گرفته می‌شود.

جدول (۱): تعداد رئوس و مدت‌زمان تخمین مجموعه mRPI برای چندین سیستم با تعداد متغیرهای حالت مختلف.

تعداد متغیرهای حالت	تعداد رئوس mRPI با قیود تکراری	تعداد رئوس mRPI با حذف قیود تکراری	زمان محاسبه
۲	۲۲۴	۶۰	۲۹/۹۷
۳	۵۹۴۲۴	۷۹۵۴	۹۱/۷
۴	۴۵۶۷۱۶۸	۳۲۳۰۷۲	۵۹۱/۴۱
۵	امکان محاسبه به دلیل تعداد زیاد رئوس وجود ندارد (تعداد رئوس مجموعه تخمینی از ۳۱ میلیون و ۲۰۰ هزار بیشتر است)		

۲-۴- کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیر بهینه (SOTMPC)

در راستای برطرف کردن چالش عدم امکان محاسبه تیوب برای سیستم‌های پیچیده دارای تعداد متغیرهای حالت زیاد، راهکار تیوب زیر بهینه در این بخش ارائه‌شده است. همان‌طور که در بخش چالش طراحی و محاسبات دیده شد، با افزایش تعداد متغیرهای حالت سیستم، به علت جمع‌های متعدد مینکوفسکی، تعداد رئوس مجموعه mRPI تخمینی به صورت نمایی افزایش می‌یابد. این افزایش باعث افزایش زمان و حجم محاسبات شده و چالش عدم امکان محاسبه مجموعه تیوب برای سیستم‌های پیچیده را پدید می‌آورد. ایده راهکار تیوب زیربهینه، استفاده از تقریب محافظه‌کار در هر مرحله از الگوریتم تقریب کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم می‌باشد. با در نظر گرفتن n به‌عنوان تعداد متغیرهای حالت سیستم، تعداد رئوس مجموعه تیوب زیر بهینه دقیقاً برابر با 2^n خواهد شد. تیوب زیر بهینه ($\tilde{\Omega}$) به صورت رابطه (۱۹) نمایش داده‌شده است.

$$\tilde{\Omega} = polyhedron (lb, ub) \quad (19)$$

که در آن به ازای n متغیر حالت داریم:

$$lb = [\Omega_{1min}, \Omega_{2min}, \Omega_{3min}, \dots, \Omega_{nmin}] \quad (20)$$

$$ub = [\Omega_{1max}, \Omega_{2max}, \Omega_{3max}, \dots, \Omega_{nmax}]$$

که امکان محاسبه مقادیر $\Omega_{i_{min}}$ و $\Omega_{i_{max}}$ برای هر مقداری از $i = 1, 2, 3, \dots, n$ با استفاده از رابطه (۲۱) مقدور است.

$$R = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

در این معادله S_x و C_x نشان‌دهنده $\sin x$ و $\cos x$ می‌باشند. زوایای بین F_O و F_B زوایای اوپلر بوده و همچنین ω بردار سرعت زوایای با توجه به مختصات اینرسی است. معادلات دینامیک ماهواره در حال حرکت چرخشی پس از ساده‌سازی به فرم زیر است:

$$T_c + T_d = \dot{h} + \omega \times (h + h_w) \quad (25)$$

در این معادله T_c گشتاور کنترلی، T_d گشتاور اغتشاش خارجی، \dot{h} مشتق مجموع تکانه زوایای ماهواره در مختصات اینرسی و h_w تکانه زوایای چرخ‌های عکس‌العملی می‌باشد. با صرف‌نظر از چرخ‌های عکس‌العملی معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} T_{cx} + T_{dx} &= I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi + \\ &\omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \\ T_{cy} + T_{dy} &= I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ T_{cz} + T_{dz} &= I_z \ddot{\psi} + \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi + \\ &\omega_0 (-I_y + I_z + I_x) \dot{\phi} \end{aligned} \quad (26)$$

که معادله فضای حالت ماهواره بدون چرخ‌های عکس‌العملی به صورت زیر است:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c (u_c(t) + u_d(t))$$

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} u_c = \begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} u_d = \begin{bmatrix} T_{dx} \\ T_{dy} \\ T_{dz} \end{bmatrix} \quad (27)$$

۲-۳- دینامیک ماهواره با عملگر چرخ‌های

عکس‌العملی

با توجه به اینکه سیگنال کنترل ماهواره همان خروجی عملگرها می‌باشد. دینامیک ماهواره با ۶ متغیر حالت با اضافه شدن ۳ چرخ عکس‌العملی، به صورت زیر توسعه پیدا می‌کند. این نکته شایان‌ذکر بوده که عملگرها مرتبه اول، با ثابت زمانی τ و بهره k می‌باشند؛ لذا رابطه (۲۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

تأثیر مطلوب عملکرد تیوب زیربهمینه برای سیستم‌های پیچیده، با شبیه‌سازی سیستم‌های بخش چالش طراحی و محاسبات، در جدول ۲ قابل مشاهده است.

جدول (۲): تعداد رئوس و مدت زمان تخمین مجموعه تیوب زیربهمینه برای چندین سیستم با تعداد متغیرهای حالت مختلف.

تعداد متغیرهای حالت	تعداد رئوس تیوب زیر بهینه	زمان محاسبه (ثانیه)
۲	۴	۳۱/۸۴
۳	۸	۸۳/۱۷
۴	۱۶	۹۱/۰۱
۵	۳۲	۱۲۹/۰۲

این نکته شایان‌ذکر بوده که علت زمان طولانی‌تر زمان محاسبه در سیستمی با ۲ متغیر حالت، اضافه شدن الگوریتم تیوب زیربهمینه به الگوریتم مرجع [۶] می‌باشد. همان‌طور که پیداست تفاوت زمان محاسبه مجموعه mRPI در سیستم‌های پیچیده محسوس است. شماتیک کلی از نحوه طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیربهمینه نیز در شکل ۱ قابل مشاهده است.

۳- سیستم ماهواره

در این بخش بر اساس مرجع [۱۸] در ابتدا سینماتیک و دینامیک ماهواره اشاره شده است. سپس با توجه به در نظر گرفتن عملگر مرتبه اول چرخ‌های عکس‌العملی برای ماهواره، فضای حالت جدید توسعه یافته است.

۱-۳- سینماتیک و دینامیک ماهواره

معادلات سینماتیک ماهواره در دستگاه مختصات بدنه‌ای (F_B) که وابسته به مرکز جرم ماهواره بوده، توسط معادلات اوپلر به دست می‌آیند. در ماهواره‌ای با مأموریت نشانه‌رویی اینرسی، نیاز به تبدیل دستگاه مختصات بدنه F_B به دستگاه مختصات اوربیتالی F_O داریم که با ماتریس تبدیل زیر نشان داده می‌شود. این ماتریس تبدیل با فرض در نظر گرفتن ϕ, θ, ψ به عنوان زوایای اوپلر، که به ترتیب ϕ نمایانگر roll، θ نمایانگر pitch و ψ نمایانگر yaw است، تشکیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\omega_0}{I_x}(I_x + I_z - I_y) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega_0}{I_z}(I_y - I_x - I_z) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴- شبیه‌سازی

ماهواره‌ای با پارامترهای جدول ۳ در نظر می‌گیریم:

جدول (۳): پارامترهای دینامیک ماهواره.

پارامترها	مقادیر	واحد
I_x	۴	[kg.m ²]
I_y	۴	[kg.m ²]
I_z	۳	[kg.m ²]
ω_0	۰/۰۰۱۱	[rad/s]
N	۳۰	-
زمان نمونه‌برداری	۵	[s]
ε	۱۰ ^{-۵}	-

قیود زیر در زوایای اوپلر و مشتقات آنها، گشتاورهای

محرک و نرخ تغییرات گشتاور در نظر گرفته شده است:

$$X: \|x_{\phi, \theta, \psi}\|_{\infty} \leq 1,$$

$$\|x_{\phi, \theta, \psi, x_{a1}, x_{a2}, x_{a3}}\|_{\infty} \leq 0.1 \quad (32)$$

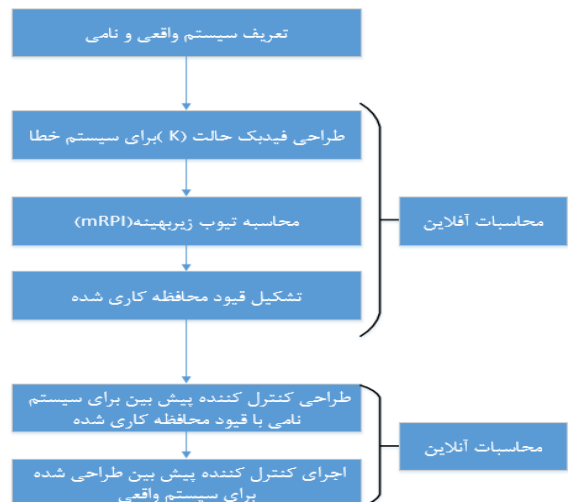
$$U_c: \|u_c\|_{\infty} \leq 0.03$$

$$\Delta U_c: \|\Delta u_c\|_{\infty} \leq 0.025$$

همچنین مقدار اغتشاش خارجی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$Bu_d = 10^{-3} \times [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (33)$$

تعداد متغیرهای حالت ماهواره به همراه چرخ‌های عکس‌العملی ۹ بوده و امکان محاسبه مجموعه mRPI از طریق روش مرجع [۶]، به علت افزایش نمایی تعداد رئوس mRPI و افزایش حجم محاسبات و محدودیت‌های سخت‌افزاری ممکن نمی‌باشد. با میزان دقت $\varepsilon = 10^{-5}$ پس از صرف زمان طولانی تعداد رئوس مجموعه RPI از ۳۱ میلیون بیشتر شده و همچنان به مجموعه mRPI مورد انتظار نرسیده‌ایم. از این رو برای حل این چالش از راهکار تیوب زیربهمینه که در بخش ۲ ارائه شد، استفاده می‌گردد. با در نظر گرفتن $\varepsilon = 10^{-5}$ و استفاده از الگوریتم محاسبه تعیین s مناسب، $s = 18$ تعیین می‌شود. در نهایت امکان محاسبه مجموعه تیوب زیربهمینه ممکن شده و با استفاده از الگوریتم-۱، مجموعه تیوب زیربهمینه با ۵۱۲ رأس در زمان



شکل (۱): شماتیک طراحی کنترل کننده پیش بین مبتنی بر تیوب زیربهمینه.

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c (x_a(t) + u_d(t)) \quad (28)$$

$$\frac{k}{\tau s + 1} U_c(s) = X_a(s)$$

$$\dot{x}_a(t) = \frac{-x_a(t) + k u_c(t)}{\tau}$$

x_a خروجی عملگر مرتبه است. حال ماتریس توسعه یافته

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ 0_{3 \times 6} & -\frac{1}{\tau} \times I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{6 \times 3} \\ \frac{k}{\tau} \times I_{3 \times 3} \end{bmatrix} u_c \quad (29)$$

رابطه (۲۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_c \quad (30)$$

از طرفی برای ساده‌تر شدن محاسبات مقدار $\tau = 1$ و $k = 1$ را در نظر گرفته و در نتیجه ماتریس‌های معادله حالت به فرم زیر درمی‌آیند:

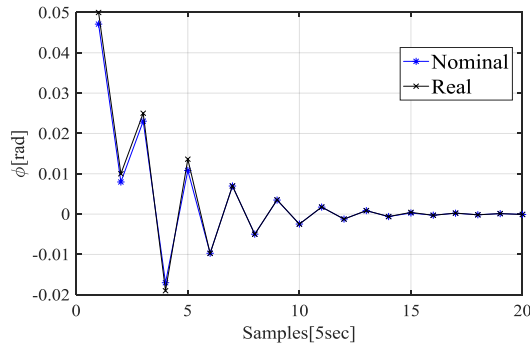
$$A_m = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ C_{3 \times 3} & D_{3 \times 3} & E_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_x} \end{bmatrix} \quad (31)$$

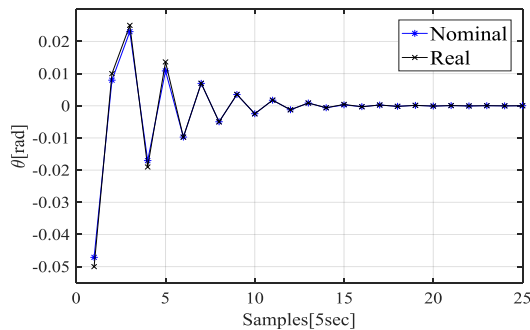
$$C_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{4\omega_0^2}{I_x}(I_z - I_y) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\omega_0^2}{I_y}(I_z - I_x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0^2}{I_z}(I_x - I_y) \end{bmatrix}$$

$$D_{3 \times 3} =$$

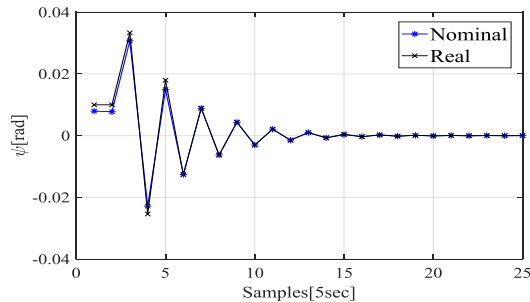
شده‌اند. از طرفی در تمامی لحظات تیوب زیربهبوده نیز رسم شده است.



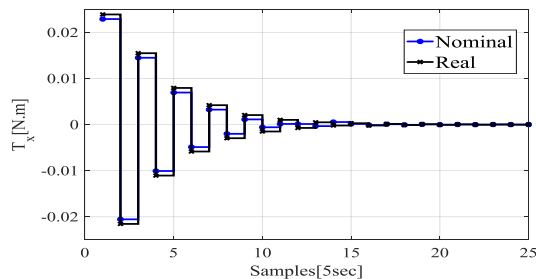
شکل (۳): مسیر سیگنال واقعی و نامی ϕ .



شکل (۴): مسیر سیگنال واقعی و نامی θ .



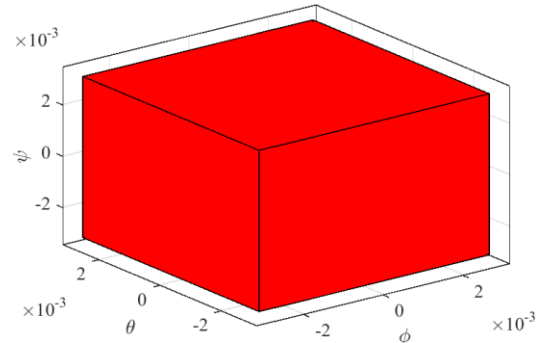
شکل (۵): مسیر سیگنال واقعی و نامی ψ .



شکل (۶): گشتاور اعمالی به سیستم واقعی و نامی حول

محور X_B در دستگاه بدنه.

۱۸۹٫۲ ثانیه محاسبه می‌شود. مجموعه mRPI محاسبه شده، یک مجموعه ۹ بعدی است. در ادامه تصویر ۳-بعدی مجموعه تیوب زیربهبوده روی بردارهای ϕ, θ, ψ جهت نمونه آمده است.



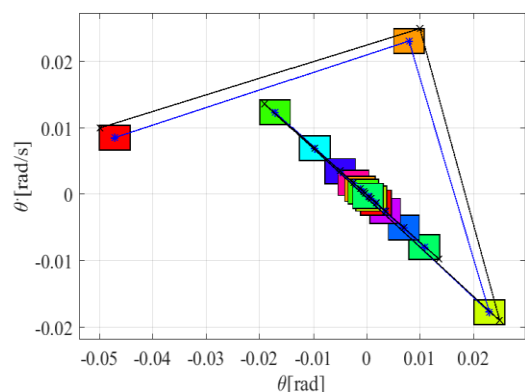
شکل (۲): تصویر سه‌بعدی مجموعه تیوب زیربهبوده

(mRPI) بر روی ϕ, θ, ψ .

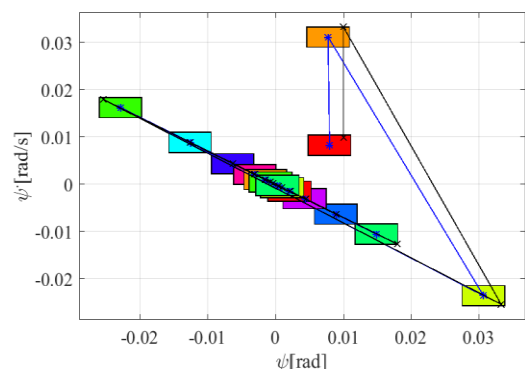
پس از محافظه‌کاری قیود مسئله با تیوب زیربهبوده، شبیه‌سازی برای سیستم ماهواره با چرخ‌های عکس‌العملی صورت گرفته است. پارامترهای تابع هزینه به صورت $Q = 0.01 * eye(9), R = 0.1 * eye(3)$ شکل‌های ۳، ۴ و ۵ نشان‌دهنده زوایای اوپلر برای حالت سیستم واقعی و نامی سیستم می‌باشد. همان‌طور که از شکل ۲ پیداست، ابعاد تیوب زیربهبوده نسبت به زوایای اوپلر ۰/۰۰۵ است. از طرفی با بررسی شکل‌های ۳ الی ۵ مشخص بوده فاصله بین سیگنال‌های سیستم نامی و حقیقی بیش از این مقدار نشده است. این موضوع بدین معنی است که سیستم واقعی در تمامی لحظات شبیه‌سازی داخل تیوب‌های حول مسیر نامی بوده و کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب زیربهبوده در برابر اغتشاش، مقاوم است. در ادامه شکل‌های ۶ الی ۸ نشان‌دهنده سیگنال‌های کنترلی اعمالی به سیستم واقعی و نامی است. همان‌طور که از شکل‌های بالا مشخص است، قید سیگنال کنترلی که کوچک‌تر از ۰/۰۳ بوده، رعایت شده است.

در ادامه به‌عنوان نمونه در شکل ۹ مسیر تراژکتوری بر روی دو بردار $\phi, \dot{\phi}$ به همراه تیوب زیربهبوده آمده است. در شکل ۹، مسیر آبی که برای سیستم نامی بوده به همراه مسیر سیستم واقعی (سیاه‌رنگ) بر روی دو بردار $\phi, \dot{\phi}$ رسم

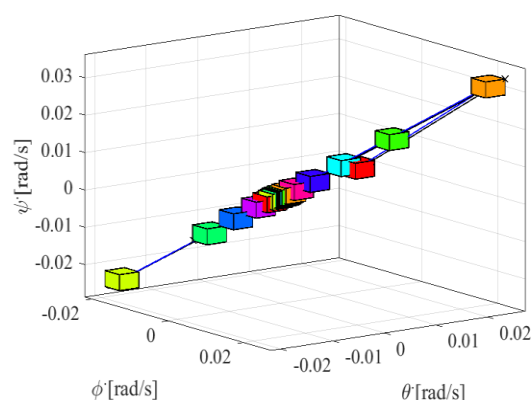
روی ۳ بردار سرعت‌های زاویه‌ای در ۳ بعد در شکل ۱۲ به نمایش درآمده است.



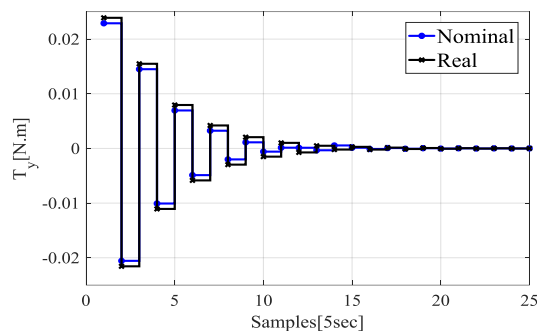
شکل (۱۰): مسیر تراژکتوری سیستم واقعی و نامی به همراه مجموعه تیوب‌های زیربهبینه بر روی دو بردار $\theta, \dot{\theta}$.



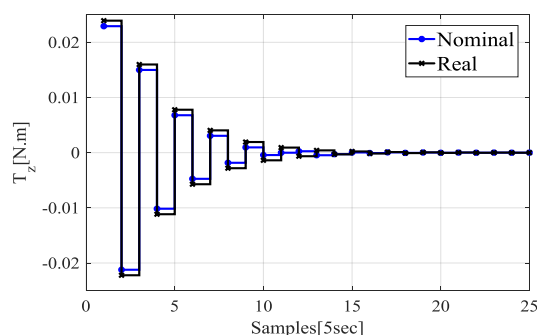
شکل (۱۱): مسیر تراژکتوری سیستم واقعی و نامی به همراه مجموعه تیوب‌های زیربهبینه بر روی دو بردار $\psi, \dot{\psi}$.



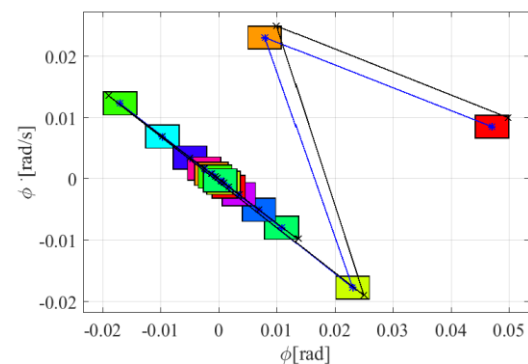
شکل (۱۲): مسیر تراژکتوری سیستم واقعی و نامی به همراه مجموعه تیوب‌های زیربهبینه بر روی بردارهای $\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}$.



شکل (۷): گشتاور اعمالی به سیستم واقعی و نامی حول محور Y_B در دستگاه بدنه.



شکل (۸): گشتاور اعمالی به سیستم واقعی و نامی حول محور Z_B در دستگاه بدنه.



شکل (۹): مسیر تراژکتوری سیستم واقعی و نامی به همراه مجموعه تیوب‌های زیربهبینه بر روی دو بردار $\phi, \dot{\phi}$.

همان‌طور که مشخص است، در تمامی لحظات هر دو سیستم نامی و واقعی داخل تیوب زیربهبینه قرار دارد. همین موضوع در خصوص مسیر تراژکتوری برای بردارهای دیگر نیز صدق می‌کند. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مسیر تراژکتوری سیستم واقعی و نامی به همراه تیوب‌های زیربهبینه برای بردارهای $\theta, \dot{\theta}$ و $\psi, \dot{\psi}$ رسم شده‌اند. مسیر تراژکتوری بر

quadratic program. IET Control Theory & Applications. 2007;1(1):328-33.

[3] Casavola A, Famularo D, Franzé G. Robust constrained predictive control of uncertain norm-bounded linear systems. Automatica. 2004;40(11):1865-76.

[4] Ding B, Xi Y, Li S. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control. Automatica. 2004;40(1):163-7.

[5] Langson W, Chrysochoos I, Raković S, Mayne DQ. Robust model predictive control using tubes. Automatica. 2004;40(1):125-33.

[6] Rakovic SV, Kerrigan EC, Kouramas KI, Mayne DQ. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. IEEE Transactions on automatic control. 2005;50(3):406-10.

[7] Mayne DQ, Seron MM, Raković S. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. Automatica. 2005;41(2):219-24.

[8] Mayne DQ, Raković SV, Findeisen R, Allgöwer F. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems. Automatica. 2006;42(7):1217-22.

[9] Bayer FA, Müller MA, Allgöwer F. Tube-based robust economic model predictive control. Journal of Process Control. 2014;24(8):1237-46.

[10] Sebghati A, Shamaghdari S. Tube-based robust economic model predictive control with practical and relaxed stability guarantees and its application to smart grid. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020;30(17):7533-59.

[11] Yang X, Lv W, Hu C, Hu Y. Tube-model predictive control based on sum of squares for hypersonic vehicle with state-dependent input constraints. Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2022;44(5):1000-13.

[12] Pirouzmand F, Ghahramani NO. Robust model predictive control based on MRAS for satellite attitude control system. The 3rd International Conference on Control, Instrumentation, and Automation; 2013: IEEE.

[13] Kim J, Jung Y, Bang H. Linear time-varying model predictive control of magnetically actuated satellites in elliptic orbits. Acta Astronautica. 2018;151:791-804.

[14] Mammarella M, Lee DY, Park H, Capello E, Dentis M, Guglieri G. Attitude control of a small spacecraft via tube-based model predictive control. Journal of Spacecraft and Rockets. 2019;56(6):1662-79.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای کنترل وضعیت ماهواره‌ای با چرخ‌های عکس‌العملی که به آن اغتشاش خارجی نامعین و محدود وارد می‌شود، طراحی کنترل کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهنه صورت گرفت. این کنترل کننده توانایی دفع تأثیر اغتشاش خارجی نامعین و محدود به سیستم را به واسطه یک مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم داراست. به واسطه این مجموعه که تیوب نامیده می‌شود، قیود حالت‌های سیستم و همچنین ورودی سیستم محافظه‌کاری شده تا در برابر اغتشاش، پایداری سیستم تضمین گردد. چالشی که در این مقاله به آن پرداخته شد، عدم امکان محاسبه تیوب از روش‌های پیشین برای سیستم‌های پیچیده بود. همان‌طور که در بخش محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم دیده شد، پس از آنکه تعداد متغیرهای حالت سیستم افزایش یافت، به علت جمع‌های متعدد مینکوفسکی، تعداد رئوس مجموعه تخمینی mRPI به صورت نمایی افزایش یافت. این ازدیاد رئوس باعث بالا رفتن حجم و زمان محاسبات شد و در نتیجه امکان محاسبه این مجموعه دیگر میسر نبود. راهکار کاربردی ارائه شده در این مقاله، معرفی تیوب زیربهنه بود که علیرغم افزایش محافظه‌کاری، امکان محاسبه مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم را فراهم نمود. همان‌طور که در بخش تئوری تیوب زیربهنه عنوان شد، استفاده از این راهکار باعث کاهش تعداد رئوس تیوب زیربهنه شد و در نتیجه حجم و زمان محاسبات کاهش چشمگیری داشت. با استفاده از این راهکار کاربردی، محاسبه مجموعه تیوب زیربهنه برای کنترل وضعیت ماهواره‌ای که دارای ۹ متغیر حالت بوده، صورت گرفت. همان‌طور که بیان شد، قرار گرفتن مسیر واقعی و نامی سیستم ماهواره نیز نشان‌دهنده صحت عملکرد کنترل کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب زیربهنه طراحی شده است.

۶- مراجع

[1] Wang L. Model predictive control system design and implementation using MATLAB®: Springer Science & Business Media; 2009.

[2] de La Pena DM, Alamo T, Ramirez D, Camacho E. Min-max model predictive control as a

- [15] Hill E, Biglarbegian M, Gadsden SA. Tube-based model predictive control of small satellite systems with uncertainty dynamics. *Progress in Canadian Mechanical Engineering*. 2021;4.
- [16] Mammarella M, Capello E, Park H, Guglieri G, Romano M, editors. Spacecraft proximity operations via tube-based robust model predictive control with additive disturbances. 68th International Astronautical Congress; 2017.
- [17] Mammarella M, Capello E, Park H, Guglieri G, Romano M. Tube-based robust model predictive control for spacecraft proximity operations in the presence of persistent disturbance. *Aerospace Science and Technology*. 2018;77:585-94.
- [18] Sidi MJ. *Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach*: Cambridge university press; 1997.



Suboptimal Robust Tube Based MPC: Satellite Attitude Control Application

Mahyar Madani Esfahani¹, Saeed Shamaghdari^{2*}, Taleb Abdollahi³

¹ Ph.D. Student, Faculty of Electrical Engineering, University of Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

² Associate Professor, Faculty of Electrical Engineering, University of Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

³ Assistant Professor, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- In this research, suboptimal robust tube based MPC to attitude control of satellite is presented.
- The suboptimal tube, reduces the volume of calculation of mRPI.
- The Suboptimal tube solution has made it possible to calculate the mRPI set for Complex Systems.

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 25 November 2022

Received in revised form: 13 December 2022

Accepted: 24 January 2023

Available online: 20 February 2023

*Correspondence:

shamaghdari@iust.ac.ir

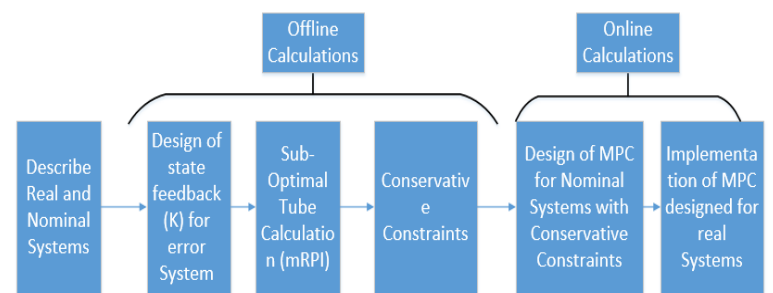
How to cite this article:

M.M. Esfahani, S. Shamaghdari, T. Abdollahi. Suboptimal robust tube based MPC: satellite attitude control application. Journal of Aerospace Mechanics. 2023; 19(2):69-82.

Keywords:

Suboptimal robust tube based model predictive control
Reduced calculation of approximate Minimal robust positive invariant set
Satellite attitude control system with reaction wheels
Bounded disturbance

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this paper, a satellite attitude control system with the reaction wheels based on suboptimal robust tube based model predictive control is designed. The satellite receives many external bounded disturbances in space. Due to the fact that disturbances have a specific range, it is possible to satellite attitude control by using a robust predictive controller based on a tube. But since the satellite has a system with complex dynamics, the challenge of increasing the volume of calculations arises when calculating the minimal Robust Positive Invariant set. The challenge of increasing the volume of calculations of this set (tube) in complex systems such as satellites is caused by the large number of state variables of the system. The large number of system state variables causes an exponential increase in the volume of calculations due to the formation of multiple Minkowski sums in the tube calculation. In order to solve this challenge, a new solution of robust predictive controller based on suboptimal tube has been presented. This solution reduces the volume of tube calculations. Simulation has been done for the accuracy of the design of the predictive controller based on the suboptimal tube to attitude control of satellite.

* Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Imam Hossein University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>.

