



Analysis and Comparison of Linear, Feedback Linearized and Backstepping Controllers Based on Quaternion in Spacecraft Attitude Control

Mahdi Nikusokhan Lame

Ph.D., Aerospace Industry Organization, Tehran, Iran.

HIGHLIGHTS

- Nonlinear stability analysis based on the Lyapunov method.
- Selection of the controller gain matrices for the exact rotation about the initial eigen axis.
- Determining the controller gains based on the local linearized equations for the linear and backstepping controllers

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 27 February 2023

Received in revised form: 26 March 2023

Accepted: 3 May 2023

Available online: 7 May 2023

*Correspondence:

nikusokhan@gmail.com

How to cite this article:

M. Nikusokhan Lame. Analysis and comparison of linear, feedback linearized and backstepping controllers based on quaternion in spacecraft attitude control. Journal of Aerospace Mechanics. 2023; 19(4):41-52.

Keywords:

Attitude control

Quaternion

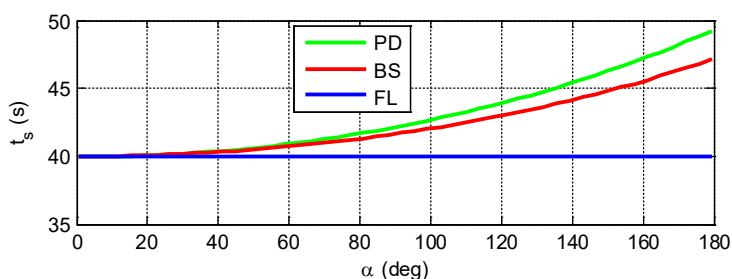
Linear control

Backstepping

Feedback Linearized

Spacecraft

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this paper, the attitude control design and analysis of a spacecraft as a rigid body based on three controllers of linear, nonlinear based on feedback linearization and backstepping is presented. According to the global presentation of the attitude based on quaternion parameters, these parameters have been used to derive the dynamic equations. Global asymptotic stability of linear and backstepping controllers is proved based on the Lyapunov method. The closed-loop stability of the feedback linearized controller is also proved by showing there are no internal dynamics. The controller gains are determined in linear and backstepping controllers based on linearized dynamics, derived from the local linearization around the equilibrium point. While, in the feedback linearized controller, gains are determined based on the global linearized dynamic equation. The performance of these three controllers in different scenarios is compared to each other. The results show that the feedback linearized controller can satisfy accurately the desired rise time. Whereas, the maximum error in achieving the desired rise time is 17% and 22% for backstepping and linear controllers, respectively. Of course, the control effort for the feedback linearized and backstepping is 100% and 46% more than the linear controller, respectively.



تحلیل و مقایسه کنترلرهای خطی، خطی‌سازی شده پس‌خور و پسگام مبتنی بر کواترنیون در کنترل وضعیت فضاپیما

مه‌دی نیکوسخن لامع

دکتری، سازمان صنایع هوافضا، تهران، ایران

برجسته‌ها

- تحلیل پایداری غیرخطی مبتنی بر تابع لیاپانوف
- انتخاب ساختار ماتریس‌های بهره کنترلر برای چرخش دقیق حول محور ویژه اولیه
- تعیین مقادیر بهره‌های کنترلر در کنترلر خطی و کنترلر غیرخطی پسگام بر اساس دینامیک خطی‌سازی شده محلی

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۸

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۰۶

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳

ارائه برخط: ۱۴۰۲/۰۲/۱۷

*نویسنده مسئول:

nikusokhan@gmail.com

کلیدواژه‌ها:

کنترل وضعیت

کواترنیون

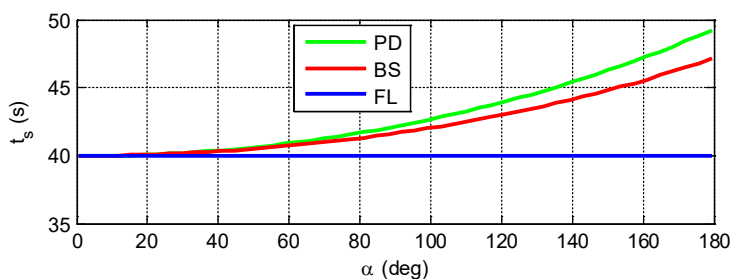
کنترلر خطی

پسگام

خطی‌سازی پس‌خور

فضاپیما

چکیده گرافیکی



چکیده

در این مقاله، طراحی و تحلیل کنترل وضعیت یک فضاپیما به‌عنوان یک جسم صلب، مبتنی بر سه کنترلر خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور و غیرخطی مبتنی بر پسگام ارائه شده است. با توجه به ویژگی بیان وضعیت به‌صورت فراگیر بر اساس پارامترهای کواترنیون، از این پارامترها برای استخراج معادلات دینامیکی استفاده شده است. پایداری فراگیر مجانبی کنترلر خطی و پسگام بر اساس روش لیاپانوف اثبات شده است. پایداری حلقه بسته کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور نیز با نشان دادن عدم وجود دینامیک داخلی اثبات شده است. بهره‌های کنترلر در روش خطی و پسگام بر اساس مدل خطی به‌دست آمده از خطی‌سازی محلی حول نقطه تعادل و در روش خطی‌سازی شده پس‌خور بر اساس مدل خطی فراگیر، تعیین شده است. عملکرد این سه کنترلر در سناریوهای مختلف باهم مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور قادر به برآوردسازی دقیق زمان نشست مطلوب می‌باشد. در صورتی که بیشینه خطای زمان نشست حاصل شده نسبت به زمان نشست مطلوب در کنترلر پسگام در حدود ۱۷٪ و در کنترلر خطی در حدود ۲۲٪ است. البته تلاش کنترلی کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور و پسگام به ترتیب ۱۰۰٪ و ۴۶٪ بیشتر از کنترلر خطی می‌باشد.

۱- مقدمه

کنترل وضعیت^۱ به معنی کنترل محورهای دستگاه بدنه یک وسیله نسبت به یک دستگاه مرجع، یکی از مباحث مهم و کاربردی در حوزه هوافضا و رباتیک است. در حل این مسئله کنترلی، دو موضوع اصلی مطرح است. اول، پارامترهای بیان وضعیت یک جسم نسبت به یک دستگاه مرجع و بیان معادلات دینامیکی بر اساس آن و دوم، روش کنترلی بر اساس پارامترهای بیان وضعیت انتخابی است. یکی از مرسوم‌ترین پارامترهای بیان وضعیت، کوآترنیون‌ها^۲ (پارامترهای اوپلر) است که معادلات دینامیکی آن در هیچ وضعیتی تکیه^۳ نبوده و تمام وضعیت‌ها به صورت فراگیر^۴ با این پارامتر قابل بیان است. تمام بیان وضعیت‌های دیگر مانند زوایای اوپلر، پارامترهای رودریگز و پارامترهای اصلاح شده رودریگز در برخی وضعیت‌ها دچار تکیگی شده و به صورت فراگیر قابل استفاده نمی‌باشند. به طور مثال معادلات زوایای اوپلر مرسوم در زاویه فراز^۵ ۹۰ درجه، پارامترهای رودریگز در زاویه چرخش ۱۸۰ درجه حول محور دوران و پارامترهای اصلاح شده رودریگز در زاویه چرخش ۳۶۰ درجه حول محور دوران تکیه می‌شوند [۱]. علت اصلی تکیگی این روش‌ها در برخی وضعیت‌ها، استفاده از تنها سه پارامتر برای بیان وضعیت است؛ در صورتی که در کوآترنیون‌ها از چهار پارامتر برای بیان وضعیت استفاده می‌شود. با عنایت به این ویژگی کوآترنیون‌ها، مرور مراجع در هفت دهه گذشته نشان دهنده انتشار مقالات بسیار زیاد در کنترل وضعیت وسایل مانند فضاپیما و ماهواره [۲-۲۹]، بازوهای رباتیک [۳۰ و ۳۱]، ردیاب‌ها [۳۲] و موشک‌ها [۳۴-۳۶] مبتنی بر کوآترنیون‌ها است. در این روش، برای بیان وضعیت یک جسم نسبت به دستگاه مرجع از یک چرخش حول یک محور مشخص استفاده می‌شود. این محور با نام محور ویژه^۶ یا محور اوپلر و زاویه چرخش نیز زاویه ویژه یا اوپلر شناخته می‌شود [۲-۴].

اکثر کنترلرهای ارائه شده برای کنترل وضعیت بر اساس روش کوآترنیون مبتنی بر کنترلرهای خطی خصوصاً کنترلر تناسبی-مشتق‌گیر می‌باشد. تحلیل پایداری برای مسئله غیرخطی بر اساس تابع لیاپانوف ارائه شده و محدوده بهره‌های کنترلی برای پایداری دینامیک غیرخطی ارائه شده است. عمده تفاوت این مراجع در نوع انتخاب بهره کنترلی است. در مراجع [۲]، [۲۳-۳۲]، بهره‌های کنترلی وابسته به پارامترهای مدل، در مرجع [۴]، [۲۷ و ۲۸]، بهره‌های کنترلی مستقل از پارامترهای مدل و در مرجع [۳۳] هر دو نوع آن پیشنهاد شده است. در برخی از این مراجع برای رسیدن به یک پاسخ زمانی مطلوب، دینامیک غیرخطی حول نقطه تعادل خطی‌سازی شده و بهره‌های کنترلی مناسب بر اساس تحلیل‌های خطی و در محدوده تعیین شده توسط روش لیاپانوف تعیین می‌شود [۶، ۲۳، ۲۴ و ۳۲]. اما از آن طرف، در صورت طراحی کنترلر بر اساس روش خطی‌سازی پس‌خور، بدون نیاز به خطی‌سازی حول نقطه تعادل می‌توان از تحلیل خطی برای تعیین بهره‌های کنترلی استفاده کرد. در مراجع [۳]، [۵، ۱۵، ۱۸، ۲۵، ۲۶ و ۳۱] از روش خطی‌سازی پس‌خور مبتنی بر بیان وضعیت با پارامترهای کوآترنیون استفاده شده است. در مرجع [۳] برای یک سیستم کنترلی با گشتاورسازهای خارجی، با انتقال مسئله غیرخطی به خطی، از روش کنترل بهینه برای طراحی کنترلر خطی استفاده شده است و برخلاف روش‌های عددی کنترل بهینه که دارای مشکلات پیاده‌سازی می‌باشند، در این روش یک کنترلر با حل بسته به دست آمده است. در مراجع [۵ و ۱۵] نیز با همین روش برای یک سیستم کنترلی با گشتاورسازهای داخلی چرخ عکس‌العملی به طراحی کنترلر وضعیت پرداخته شده است. در مرجع [۲۶] این روش برای مسئله‌ای شامل دو جسم صلب متصل به هم با کنترلرهای مستقل به کار برده شده است. مشکل اصلی در کنترلرهای مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور، وجود وضعیت‌هایی است که در آن سیگنال کنترلی تکیه می‌شوند [۳]، [۵، ۱۵، ۲۶ و ۳۱].

در مقابل، روش پس‌گام^۷ یک روش طراحی کنترلر برای سیستم‌های غیرخطی آبشاری^۸ است که در آن تابع لیاپانوف

¹ Attitude

² Quaternion

³ Singular

⁴ Global

⁵ Pitch

⁶ Eigen axis

⁷ Backstepping

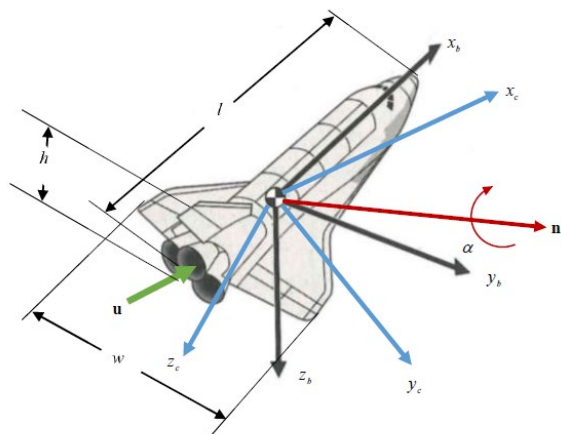
⁸ Cascade

خطی‌سازی حول نقطه تعادل تعیین‌شده است. در نهایت، عملکرد این سه کنترلر در سناریوهای مختلف با هم مقایسه شده است.

در بخش ۲ معادلات دینامیکی و سینماتیکی یک فضاپیما به‌عنوان یک جسم صلب ارائه‌شده است. در بخش ۳ طراحی کنترلرهای خطی تناسبی-مشتق‌گیر، خطی‌سازی شده پس‌خور و پسگام به همراه تحلیل پایداری آن‌ها و نحوه تنظیم بهره‌ها ارائه‌شده است. در بخش ۵ شبیه‌سازی و مقایسه عملکرد کنترلرها و در نهایت در بخش ۶ نتیجه‌گیری و جمع‌بندی ارائه می‌شود.

۲- سینماتیک و دینامیک جسم صلب

در این بخش، یک مدل فضاپیمای صلب که تحت تأثیر ابزارهای گشتاورساز در دستگاه بدنه می‌چرخد، در نظر گرفته‌شده است (شکل ۱). برای سادگی، یک گشتاورساز ایده‌آل فرض می‌شود.



شکل (۱): مشخصات سینماتیکی و هندسی فضاپیما.

۲-۱- دینامیک جسم صلب

معادلات اوپلر، حرکت چرخشی یک جسم صلب حول محورهای متعامد متصل به بدنه با مبدأ مرکز جرم را با رابطه (۱) توصیف می‌کند [۲۷]:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{\omega}]^{\times} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \quad (1)$$

که $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ بردار سرعت زاویه‌ای، \mathbf{J} ممان اینرسی و $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ بردار گشتاور کنترلی،

به‌صورت بازگشتی^۱ ساخته می‌شود. همچنین در هر مرحله از طراحی، می‌توان با روش‌های مقاوم یا تطبیقی عدم قطعیت آن مرحله را جبران کرد. در مراجع [۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰-۲۲ و ۳۵-۳۶] برای کنترل وضعیت مبتنی بر کواترنیون با استفاده از روش پسگام کنترلرهایی ارائه‌شده است. در مراجع [۱۴، ۲۱، ۳۵ و ۳۶] کنترلرها، دارای سیگنال کنترلی مرحله اول و دوم یکسان هستند. در مراجع [۱۴، ۱۷ و ۲۲] با ارائه یک نرخ چرخش بدنه مطلوب (سیگنال کنترلی مرحله اول) برحسب تابع غیرخطی معکوس تانژانت برای محدود کردن سیگنال کنترلی، کنترلر طراحی شده است. در مرجع [۱۴] بر اساس نامساوی گرووال-بلمان حد بیشینه نرخ چرخش بدنه و یا دستور کنترلی را به دست آورده و با یک قید نامساوی بر روی زمان نشست، بیشینه دستور کنترلی کمینه می‌شود. در این مراجع، بهره کنترلی بر اساس بهینه‌سازی عددی تعیین می‌شوند؛ اما نکته مهم در هر سه مرجع، عدم اشاره به نحوه محاسبه زمان نشست است. در مرجع [۲۰]، سیگنال کنترلی مرحله اول برخلاف بقیه کنترلرهای پسگام ارائه‌شده یک تابع غیرخطی از حالت‌ها پیشنهادشده است. متأسفانه در این مرجع نه دلیل پیشنهاد این تابع غیرخطی و نه مقایسه آن با کنترلر متداول پسگام که در آن سیگنال کنترلی مرحله اول به‌صورت یک تابع خطی از خطای ردیابی است، ارائه نشده است. در مراجع [۲۱، ۳۵ و ۳۶] به ارائه کنترلرهای پسگام مقاوم یا تطبیقی در حضور عدم قطعیت و عیب پرداخته‌شده است. در تمام مراجع، بهره‌های کنترلی بر اساس سعی و خطا و دید طراحی در بازه مقیدشده توسط روش لیاپانوف تعیین می‌شود.

با توجه به دانش نویسنده، مرجعی در خصوص استخراج معادلات سه کنترلر مطرح خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور و غیرخطی مبتنی بر پسگام بر اساس یک نمادسازی یکسان و تحلیل و مقایسه آن‌ها ارائه نشده است. در این مقاله سعی شده است به طراحی و تحلیل این سه کنترلر و مقایسه دستور کنترلی هر سه روش پرداخته شود. همچنین، شرایط چرخش حول محور ویژه ثابت نیز برای هر سه کنترلر اثبات و بهره‌های کنترلر بر اساس

¹ Recursive

چون در این مقاله، مسئله مانور سکون به سکون^۱ مدنظر است، مقادیر مطلوب $q_{ic}, i=1, \dots, 4$ ، اعداد ثابت می‌باشند و بنابراین دینامیک خطای کواترنیون‌ها مشابه (۶)، (۷) به صورت روابط (۹) و (۱۰) نوشته می‌شود:

$$2\dot{\mathbf{q}}_e = -[\mathbf{q}_e]^\times + q_{4e}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (۹)$$

$$2\dot{q}_{4e} = -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \quad (۱۰)$$

در ادامه چند قضیه که در استخراج روابط کاربرد دارد، ارائه می‌شود.

قضیه ۱: معکوس ماتریس $(-\mathbf{q}_e]^\times + q_{4e}\mathbf{I})$ عبارت است از [۳]:

$$(-[\mathbf{q}_e]^\times + q_{4e}\mathbf{I})^{-1} = (q_{4e}^2\mathbf{I} + \mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T + q_{4e}[\mathbf{q}_e]^\times) / q_{4e} \quad (۱۱)$$

اثبات: کافی است نشان دهیم:

$$(-[\mathbf{q}_e]^\times + q_{4e}\mathbf{I})(q_{4e}^2\mathbf{I} + \mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T + q_{4e}[\mathbf{q}_e]^\times) / q_{4e} = \mathbf{I} \quad (۱۲)$$

با بسط ضرب و ساده‌سازی سمت چپ رابطه (۱۲) و با توجه به اینکه $[\mathbf{q}_e]^\times \mathbf{q}_e = 0$ و $\mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T + [\mathbf{q}_e]^\times[\mathbf{q}_e]^\times = \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e \mathbf{I}$ داریم:

$$(-[\mathbf{q}_e]^\times + q_{4e}\mathbf{I})(q_{4e}^2\mathbf{I} + \mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T + q_{4e}[\mathbf{q}_e]^\times) / q_{4e} = (q_{4e}^2 + \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e)\mathbf{I} \quad (۱۳)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۵) سمت راست (۱۳) ماتریس یک‌ه می‌شود.

قضیه ۲: مشتق مقدار عددی کواترنیون برحسب بخش برداری به صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود [۴]:

$$\dot{q}_{4e} = -\mathbf{q}_e \dot{\mathbf{q}}_e^T / q_{4e} \quad (۱۴)$$

اثبات: این رابطه با مشتق‌گیری از رابطه (۵) برای بردار کواترنیون خطا به سادگی قابل استخراج است.

قضیه ۳: رابطه (۱۵) بین مشتق کواترنیون و نرخ چرخش بدنه برقرار است [۴]:

$$(-[\dot{\mathbf{q}}_e]^\times + \dot{q}_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \boldsymbol{\omega} / 2 \quad (۱۵)$$

اثبات: با استفاده از رابطه (۹) و (۱۰) داریم:

$$(-[\dot{\mathbf{q}}_e]^\times + \dot{q}_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega} = -[\boldsymbol{\omega}]^\times \dot{\mathbf{q}}_e + \dot{q}_{4e}\boldsymbol{\omega} \quad (۱۶)$$

$$= -0.5[\boldsymbol{\omega}]^\times(-[\mathbf{q}_e]^\times \boldsymbol{\omega} + q_{4e}\boldsymbol{\omega}) + 0.5\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \boldsymbol{\omega}$$

حال با استفاده از ویژگی $\boldsymbol{\omega} \mathbf{q}_e^T + [\boldsymbol{\omega}]^\times[\mathbf{q}_e]^\times = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \mathbf{I}$ و $[\boldsymbol{\omega}]^\times \boldsymbol{\omega} = 0$ می‌توان رابطه (۱۶) را به این صورت بازنویسی کرد:

$[\boldsymbol{\omega}]^\times$ ماتریس شبه متقارن می‌باشد که به این صورت تعریف می‌شود:

$$[\boldsymbol{\omega}]^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

زیرنویس‌های ۱، ۲ و ۳ بیانگر محورهای کنترلی متعامد ثابت در بدنه هستند. فرض می‌شود که مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در امتداد محورهای بدنه با جابروهای نرخی اندازه‌گیری شده و برای محاسبه وضعیت بدنه هم استفاده می‌شود.

۲-۲- سینماتیک مبتنی بر کواترنیون

قضیه چرخشی اوایلر بیان می‌کند که چرخش هر جسم صلب را می‌توان با چرخش حول یک محور به نام محور ویژه بیان کرد. کواترنیون، وضعیت هر جسم را بر اساس چرخش حول محور ویژه بیان می‌کند. بخش برداری کواترنیون (سه مؤلفه اول) جهت بردار ویژه و بخش عددی کواترنیون (مؤلفه چهارم) نیز زاویه چرخش حول محور ویژه را نشان می‌دهد. چهار مؤلفه کواترنیون برحسب بردار محور ویژه و زاویه ویژه به این صورت بیان می‌شود:

$$q_i = n_i \sin(\alpha/2); \quad i = 1, 2, 3 \quad (۳)$$

$$q_4 = \cos(\alpha/2) \quad (۴)$$

که α زاویه چرخش حول بردار ویژه و $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T$ بردار هادی محور ویژه در دستگاه مرجع است (شکل ۱). طبق معادلات (۳) و (۴) به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} + q_4^2 = 1 \quad (۵)$$

که $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ معادله دیفرانسیلی سینماتیک برای کواترنیون به این صورت توصیف می‌شود [۲۷]:

$$\dot{\mathbf{q}} = 0.5[\boldsymbol{\omega}]^\times \mathbf{q} + 0.5q_4 \boldsymbol{\omega} \quad (۶)$$

$$\dot{q}_4 = -0.5\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q} \quad (۷)$$

کواترنیون اولیه $[\mathbf{q}^T(0), q_4(0)]^T$ مقدار کواترنیون‌ها را در لحظه $t=0$ و کواترنیون فرمان $[\mathbf{q}_e^T, q_{4e}]^T$ کواترنیون مطلوب را نشان می‌دهند. کواترنیون خطا که بیان‌گر خطای وضعیت بین وضعیت کنونی و وضعیت مطلوب است به این صورت به دست می‌آید [۶]:

$$\mathbf{q}_e = q_{4c}\mathbf{q} - [\mathbf{q}_c]^\times \mathbf{q} - q_4\mathbf{q}_e, \quad q_{4e} = \mathbf{q}_c^T \mathbf{q} + q_4q_{4c} \quad (۸)$$

^۱ Rest-to-rest

بسته نرخ چرخش بدنه مستقل از ماتریس ممان اینرسی به این صورت نوشته می‌شود:

$$\dot{\omega} = -k_p \mathbf{q}_e - k_d \dot{\omega} \quad (26)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۹) و (۱۰) داریم:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e = (-[\dot{\mathbf{q}}_e]^* + \dot{q}_{4e} \mathbf{I})\omega + (-[\mathbf{q}_e]^* + q_{4e} \mathbf{I})\dot{\omega} \quad (27)$$

$$2\ddot{q}_{4e} = -\dot{\omega}^T \mathbf{q}_e - \omega^T \dot{\mathbf{q}}_e \quad (28)$$

با جایگزینی نرخ چرخش بدنه از معادله (۲۶) در معادلات (۲۷) و (۲۸) و با توجه به $[\mathbf{q}_e]^* \mathbf{q}_e = 0$ و با استفاده از قضایای ۳ و ۴، معادلات (۲۷) و (۲۸) به این صورت ساده می‌شود:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e = -0.5\omega^T \mathbf{q}_e \omega - k_p q_{4e} \mathbf{q}_e - 2k_d \dot{\mathbf{q}}_e \quad (29)$$

$$2\ddot{q}_{4e} = k_p (1 - q_{4e}^2) - 2k_d \dot{q}_{4e} - 0.5q_{4e} \omega^T \omega \quad (30)$$

با خطی‌سازی معادلات (۲۹) و (۳۰) حول نقطه تعادل $\mathbf{q}_e = \omega = 0$ و $q_{4e} = 0$ داریم:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e + 2k_d \dot{\mathbf{q}}_e + k_p \mathbf{q}_e = 0 \quad (31)$$

در این صورت بهره‌های کنترلی بر اساس ضریب میرایی و فرکانس مطلوب به این صورت به دست می‌آیند:

$$k_p = 2\omega_n^2, k_d = 2\xi\omega_n \quad (32)$$

برای اثبات چرخش حول محور ویژه باید نشان داده که جهت $\mathbf{q}_e(t)$ مستقل از زمان است. برای اثبات عدم‌تغییر جهت $\mathbf{q}_e(t)$ ، می‌توان نشان داد که $\mathbf{q}_e(t)$ در راستای مقدار اولیه آن باقی می‌ماند؛ بنابراین، فرض می‌شود که $\mathbf{q}_e(t) = c_q(t) \mathbf{q}_{e0}$ طبق معادله (۲۶) می‌توان نتیجه گرفت که $\omega(t)$ هم در راستای \mathbf{q}_{e0} خواهد بود و بنابراین می‌توان آن را به صورت $\omega(t) = c_\omega(t) \mathbf{q}_{e0}$ نوشت. حال اگر این دو رابطه را در معادله (۹) قرار دهیم، با توجه به $[c_q(t) \mathbf{q}_e]^* c_\omega(t) \mathbf{q}_{e0} = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\dot{\mathbf{q}}_e = q_{4e}(t) c_\omega(t) \mathbf{q}_{e0} / 2$ و بنابراین فرض $\mathbf{q}_e(t) = c_q(t) \mathbf{q}_{e0}$ فرض صحیح بوده است.

۳-۲- کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور

خروجی مطلوب کنترل در بیان با کواترنیون بردار \mathbf{q}_e است. با دو بار مشتق‌گیری از این بردار رابطه (۲۷) حاصل می‌شود که با توجه به ویژگی $[\omega]^* \mathbf{q}_e = -[\mathbf{q}_e]^* \omega$ به این صورت بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & (-[\dot{\mathbf{q}}_e]^* + \dot{q}_{4e} \mathbf{I})\omega \\ &= 0.5(\omega^T \mathbf{q}_e \omega - \omega \mathbf{q}_e^T \omega) + 0.5\omega^T \mathbf{q}_e \omega \\ &= 0.5\omega^T \mathbf{q}_e \omega \end{aligned} \quad (17)$$

قضیه ۴: رابطه (۱۸) بین مشتق کواترنیون و نرخ چرخش بدنه برقرار است [۴]:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^T \omega = 0.5q_{4e} \omega^T \omega \quad (18)$$

اثبات: با استفاده از رابطه (۹) داریم:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^T \omega = \omega^T (-[\mathbf{q}_e]^* \omega + q_{4e} \omega) \quad (19)$$

حال با توجه به ویژگی $\omega^T [\mathbf{q}_e]^* \omega = 0$ داریم:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^T \omega = 0.5q_{4e} \omega^T \omega \quad (20)$$

۳- طراحی کنترلر

در این بخش به طراحی، تحلیل پایداری و استخراج بهره‌های کنترلی کنترلرهای مدنظر پرداخته می‌شود.

۳-۱- کنترلر خطی تناسبی-مشتق‌گیر

در کنترلر خطی، سه عبارت شامل فیدبک خطی خطای کواترنیون، فیدبک خطی نرخ چرخش بدنه و عبارت غیرخطی برای حذف گشتاور ژيروسکوپی وجود دارد:

$$\mathbf{u} = -[\omega]^* \mathbf{J}\omega - \mathbf{K}_p \mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d \dot{\omega} \quad (21)$$

در این صورت معادله (۱) به این صورت نوشته می‌شود:

$$\dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{q}_e - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}_d \omega \quad (22)$$

با پیشنهاد تابع لیاپانوف به صورت:

$$V = \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e + (1 - q_{4e})^2 + 0.5\omega^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{J}\omega \quad (23)$$

و با توجه به شرط نرمال بودن بردار کواترنیون، تابع لیاپانوف به این صورت ساده می‌شود:

$$V = 2(1 - q_{4e}) + 0.5\omega^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{J}\omega \quad (24)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف و جایگزینی معادلات (۹)، (۱۰) و (۲۲) در آن، مشتق تابع لیاپانوف به این صورت ساده می‌شود:

$$\dot{V} = -\omega^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{K}_d \omega \quad (25)$$

بنابراین اگر $\mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{K}_d$ مثبت معین باشد، پایداری مجانبی فراگیر تضمین می‌شود. در صورتی که ماتریس‌های بهره به صورت $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{J}$ و $\mathbf{K}_d = k_d \mathbf{J}$ انتخاب شوند، به شرط $k_p > 0$ و $k_d > 0$ ، علاوه بر تضمین پایداری، معادله حلقه

دینامیکی، سیستم دینامیکی حلقه‌بسته بدون دینامیکی داخلی بوده و پایدار مجانبی فراگیر است.

در صورت انتخاب $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{I}$ و $\mathbf{K}_d = k_d \mathbf{I}$ مؤلفه‌های معادله (۳۷) از هم مستقل شده و پاسخ معادله به صورت کلی $\mathbf{q}_e(t) = c_q(t) \mathbf{q}_{e0}$ به دست خواهد آمد که به معنی چرخش حول محور ویژه اولیه است.

۳-۳- کنترلر پسگام

در طراحی کنترل با استفاده از روش پسگام یا گام به عقب، از برخی متغیرهای حالت میانی به عنوان ورودی کنترلی استفاده می‌شود. در این مسئله از نرخ چرخش بدنه به عنوان ورودی کنترلی مسئله سینماتیکی استفاده شده و بعد از به دست آمدن نرخ چرخش بدنه مطلوب در گام بعد، گشتاور کنترلی مناسب برای تعقیب نرخ چرخش بدنه مطلوب طراحی می‌شود. مشابه کنترل خطی، نرخ چرخش بدنه مطلوب فیدبک خطی از خطای کوآترنیون در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین:

$$\boldsymbol{\omega} := -\mathbf{K}_p \mathbf{q}_e - \mathbf{e} \quad (40)$$

تابع لیپانوف برای مرحله اول روش پسگام به صورت رابطه (۴۱) پیشنهاد می‌شود:

$$V_1 := \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e + (1 - q_{4e})^2 \quad (41)$$

در این صورت با توجه به ویژگی $\mathbf{q}_e^T [\mathbf{q}_e]^* \mathbf{e} = 0$ مشتق لیپانوف به صورت رابطه (۴۲) به دست می‌آید:

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_p \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_e^T \mathbf{e} \quad (42)$$

با جایگذاری معادله (۴۰) در (۱) داریم:

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_p \dot{\mathbf{q}}_e - \mathbf{J}^{-1} [\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{u} \quad (43)$$

در مرحله دوم، تابع لیپانوف به این صورت تعریف می‌شود:

$$V_2 = V_1 + \mathbf{e}^T \mathbf{e} / 2 \quad (44)$$

در صورتی که ورودی کنترلی به صورت رابطه (۴۵) انتخاب شود:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J} \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{J} \mathbf{q}_e - [\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \mathbf{K}_d \mathbf{e} \quad (45)$$

مشتق تابع لیپانوف مرحله دوم عبارت است از:

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_p \mathbf{q}_e - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_d \mathbf{e} \quad (46)$$

در صورتی که ماتریس‌های \mathbf{K}_p و \mathbf{K}_d مثبت معین باشند، تابع لیپانوف منفی معین بوده و نقاط تعادل $\mathbf{q}_e = \mathbf{e} = \mathbf{0}$ پایدار مجانبی فراگیر است. با تعیین ورودی کنترلی،

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e = (-[\mathbf{q}_e]^* + q_{4e} \mathbf{I}) \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (33)$$

$$0.5[\boldsymbol{\omega}]^* ([\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{q}_e + q_{4e} \boldsymbol{\omega}) - 0.5 \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \boldsymbol{\omega}$$

با جایگذاری رابطه (۱) در (۳۳) ورودی کنترلی ظاهر می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} \quad (34)$$

که

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) = (-[\mathbf{q}_e]^* + q_{4e} \mathbf{I}) \mathbf{J}^{-1} / 2$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) = 0.5(-[\mathbf{q}_e]^* + q_{4e} \mathbf{I}) \mathbf{J}^{-1} [\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (35)$$

$$+ 0.25[\boldsymbol{\omega}]^* ([\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{q}_e + q_{4e} \boldsymbol{\omega}) - 0.25 \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \boldsymbol{\omega}$$

در صورتی که دستور کنترلی به صورت رابطه (۳۶) انتخاب شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) (-\mathbf{K}_p \mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}_e - \mathbf{f}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega})) \quad (36)$$

سیستم دینامیکی مدنظر به این صورت خطی می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_e + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0} \quad (37)$$

برای پایداری معادله (۳۷) کافی است که ریشه‌های معادله درجه ۲ در سمت چپ محور موهومی قرار گیرد. با توجه به اینکه $[\boldsymbol{\omega}]^* \boldsymbol{\omega} = 0$ ، رابطه (۳۶) به این صورت ساده می‌شود:

$$\mathbf{u} = -[\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) \times \quad (38)$$

$$(-\mathbf{K}_p \mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}_e - 0.25([\boldsymbol{\omega}]^* [\boldsymbol{\omega}]^* \mathbf{q}_e + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_e \boldsymbol{\omega}))$$

معکوس تابع $\mathbf{g}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega})$ طبق قضیه ۱ عبارت است از:

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) = \frac{2}{q_{4e}} \mathbf{J} (q_{4e}^2 \mathbf{I} + \mathbf{q}_e \mathbf{q}_e^T + q_{4e} [\mathbf{q}_e]^*) \quad (39)$$

تنها شرط برای اینکه سیستم دینامیکی موردنظر، قابل خطی‌سازی ورودی-خروجی باشد، این است که $\mathbf{g}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega})$ معکوس‌پذیر باشد؛ بنابراین، همان‌طور که در رابطه (۳۹) مشاهده می‌شود در $q_{4e} = 0$ ، $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega}) = 2\mathbf{J}/q_{4e}$ و بنابراین تابع $\mathbf{g}(\mathbf{q}_e, \boldsymbol{\omega})$ در $q_{4e} = 0$ معکوس‌پذیر نیست. این مقدار معادل زوایای چرخش ویژه صفر و ۳۶۰ درجه است؛

بنابراین، دستور کنترلی به دست آمده از خطی‌سازی پس‌خور یک کنترلر فراگیر نیست؛ اما در خصوص پایداری حلقه‌بسته سیستم، همان‌طور که مشاهده شد با ۲ بار مشتق‌گیری از خروجی مطلوب، دستور کنترلی ظاهر شد و این نشان‌دهنده درجه نسبی ۲ برای هر مؤلفه و درجه نسبی ۶ برای کل معادلات است. از طرفی درجه معادلات دینامیکی ۷ است (معادلات (۱)، (۹) و (۱۰)). ولیکن با توجه به قید رابطه (۵) درجه معادلات دینامیکی بدون قید برابر ۶ است؛ بنابراین، با توجه به یکسان بودن درجه نسبی و درجه معادلات

k_d مطلوب را تعیین می‌کنیم. البته در حالتی که $k_p = 0$ ، تابع لیاپانوف (۴۶) شبه معین خواهد بود. در این حالت طبق قضیه مجموعه نامتغیر، سیستم به سمت مجموعه نامتغیر همگرا خواهد شد. طبق معادله (۴۶) مشتق تابع لیاپانوف به ازای $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ، صفر است. طبق معادله (۴۹)، برای اینکه بر روی مسیر $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ باقی بماند، باید $\dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}$ ؛ بنابراین، مجموعه نامتغیر این سیستم، فقط نقطه تعادل است؛ بنابراین، حتی در حالت $k_p = 0$ سیستم پایدار مجانبی است.

۴- شبیه‌سازی و ارائه نتایج

در این بخش، یک مثال طراحی و نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شود. فضاپیمای صلب شاتل با مشخصات ارائه‌شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول (۱): مشخصات فضاپیما.

پارامتر	مقدار
جرم	۱۱۰ تن
طول (l)	۳۷ متر
ارتفاع (h)	۱۴ متر
عرض (w)	۲۳ متر
ممان اینرسی حول x_b (\mathbf{J}_{11})	۱۲۹۰ تن مترمربع
ممان اینرسی حول y_b (\mathbf{J}_{22})	۹۶۸۰ تن مترمربع
ممان اینرسی حول z_b (\mathbf{J}_{33})	۱۰۱۰۰ تن مترمربع

در این جدول ممان اینرسی‌های اصلی ارائه شده است و ممان اینرسی‌های ضربی صفر فرض شده است. کواترنیون‌های اولیه، مقادیر $[\mathbf{q}_{e0}^T, q_{40}]^T = [1, 0, 0, 0]^T$ در نظر گرفته شده است. بردار مطلوب، یک بردار با کسینوس‌های هادی $[c_1, c_2, c_3]^T = [1, 1, \sqrt{2}]^T / 2$ فرض شده است و تغییرات زاویه ویژه از صفر تا 180° در نظر گرفته شده است. عملکرد کنترلرهای مختلف برحسب تغییرات زاویه محور ویژه با هم مقایسه می‌شوند. زمان مطلوب تغییر جهت یا همان زمان نشست عدد $t_s = 40s$ در نظر گرفته شده است. با فرض پاسخ میرای بحرانی ($\xi = 1$) طبق مرجع [۳۷]، فرکانس طبیعی برحسب زمان نشست از رابطه $\omega_n = 5.84/t_s$ یا $\omega_n = 0.146$ به دست می‌آید؛ بنابراین،

معادلات حلقه بسته سیستم به صورت روابط (۴۷) تا (۴۹) استخراج می‌شود:

$$\dot{\mathbf{q}}_e = 0.5([\mathbf{q}_e]^x - q_{4e}\mathbf{I})(\mathbf{K}_p \mathbf{q}_e + \mathbf{e}) \quad (47)$$

$$\dot{q}_{4e} = \mathbf{q}_e^T (\mathbf{K}_p \mathbf{q}_e + \mathbf{e}) \quad (48)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d \mathbf{e} \quad (49)$$

با خطی‌سازی معادله (۴۷) حول $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$ ، این معادله به صورت $2\dot{\mathbf{q}}_e = -(\mathbf{K}_p \mathbf{q}_e + \mathbf{e})$ نوشته می‌شود که با مشتق‌گیری از آن و جایگزینی $\dot{\mathbf{e}}$ از (۴۹) و \mathbf{e} برحسب $\dot{\mathbf{q}}_e$ ، معادله مرتبه ۲ بردار \mathbf{q}_e به این صورت به دست می‌آید:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_p + 2\mathbf{K}_d)\dot{\mathbf{q}}_e + (1 + \mathbf{K}_d \mathbf{K}_p)\mathbf{q}_e = \mathbf{0} \quad (50)$$

در صورت انتخاب $\mathbf{K}_d = k_d \mathbf{I}$ و $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{I}$ علاوه بر اینکه مشابه روش خطی‌سازی پس‌خور می‌توان نشان داد که چرخش حول محور ویژه اولیه انجام خواهد شد، ریشه‌های معادله (۵۰) به صورت $r_{\pm} = -(k_p + 2k_d) \pm \sqrt{\Delta} / 4$ به دست می‌آید که $\Delta = -8 + (k_p - 2k_d)^2$. همچنین ارتباط بین ضریب میرایی و فرکانس طبیعی با بهره‌های کنترلی به صورت رابطه (۵۱) برقرار است:

$$2\xi\omega_n = 0.5k_p + k_d, \omega_n^2 = 0.5(1 + k_p k_d) \quad (51)$$

بنابراین، بهره‌های کنترل به این صورت به دست می‌آید:

$$k_p = 2\xi\omega_n \mp \sqrt{2 + 4\omega_n^2(\xi^2 - 1)} \quad (52)$$

$$k_d = \xi\omega_n \pm \sqrt{1/2 + \omega_n^2(\xi^2 - 1)} \quad (53)$$

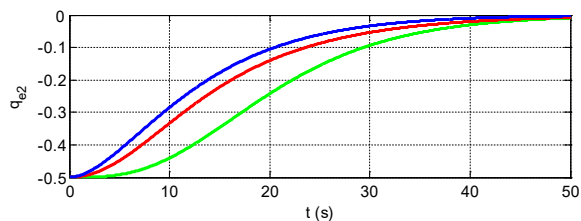
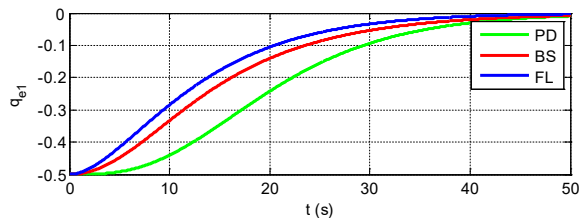
با توجه به شرط پایداری $k_p > 0$ و $k_d > 0$ باید:

$$4\xi^2\omega_n^2 > 2 + 4\omega_n^2(\xi^2 - 1) \Rightarrow \omega_n^2 > 0.5 \quad (54)$$

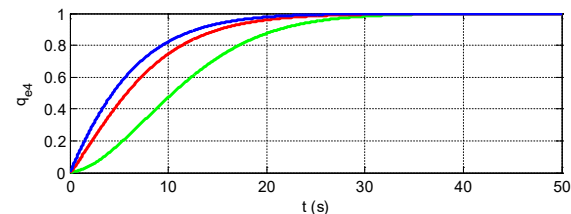
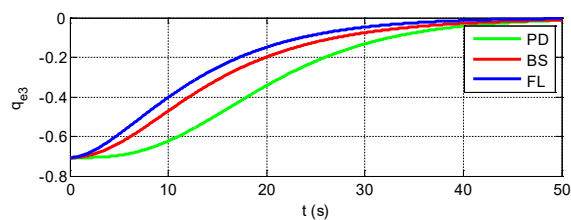
با این قید، حداکثر زمان نشست که می‌توان به دست آورد محدود می‌باشد. برای دستیابی به یک زمان نشست مطلوب که بیشتر از مقدار مقید شده بر اساس رابطه (۵۴) است، باید $\Delta > 0$. در این صورت زمان نشست (t_s)، از حل عددی معادله (۵۵) به دست می‌آید:

$$-r_- e^{r_- t_s} + r_+ e^{r_+ t_s} = 0.02(r_+ - r_-) \quad (55)$$

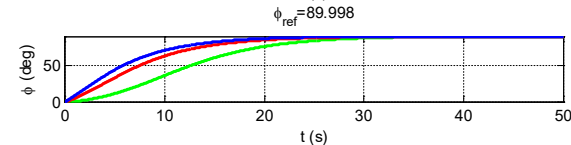
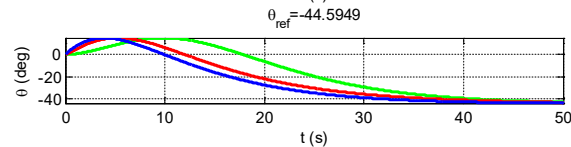
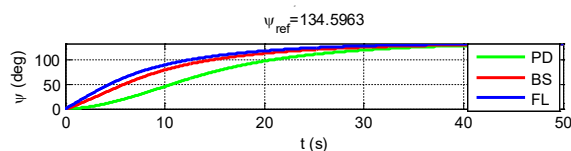
معادله (۵۵) بیان‌گر این است که در زمان نشست (t_s) خطای بردار کواترنیون به کمتر از ۰.۰۲ مقدار اولیه خواهد رسید. در صورتی که زمان نشست مطلوبی مدنظر باشد، از حل معادله (۵۵) و به ازای مشخص بودن یکی از ضرایب کنترلی، ضریب کنترلی دیگر به دست می‌آید. به طور مثال اگر k_p معلوم باشد، k_d از حل این معادله به دست می‌آید. برای سادگی k_p را صفر در نظر گرفته و با حل این معادله



شکل (۲): دو مؤلفه اول کواتر نیون ($\alpha = 180 \text{ deg}$).



شکل (۳): دو مؤلفه دوم کواتر نیون ($\alpha = 180 \text{ deg}$).



شکل (۴): زوایای اوایلر ($\alpha = 180 \text{ deg}$).

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، با یک نمادسازی یکسان، سه کنترلر خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی سازی پس خور و غیرخطی مبتنی

بهره های کنترلر خطی طبق رابطه (۳۲)، مقدار $k_p = 0.0426$ و $k_d = 0.292$ برای کنترلر خطی سازی پس خور با k_d مشابه خطی و k_p نصف خطی تعیین می شود. برای کنترلر پسگام نیز با در نظر گرفتن مقدار صفر برای k_p ، مقدار k_d با حل معادله (۵۵) عدد $k_d = 5.1854$ به دست می آید.

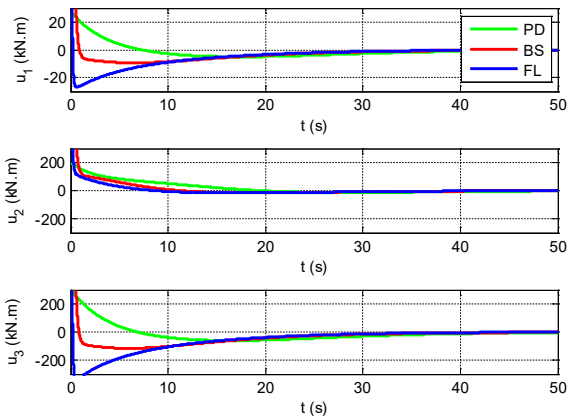
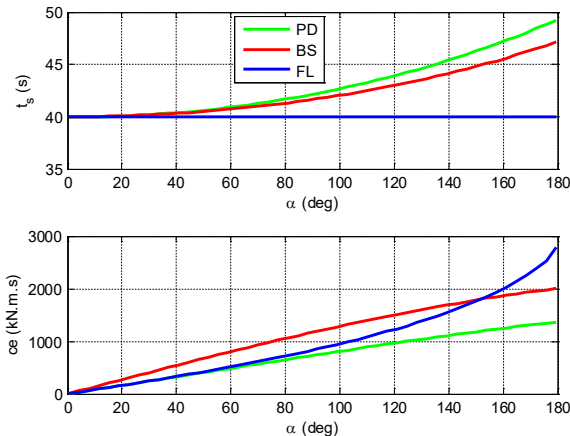
برای بیشترین زاویه ویژه یعنی $\alpha = 180 \text{ deg}$ ، چهار مؤلفه کواتر نیون در شکل ۲ و شکل ۳، زوایای اوایلر در شکل ۴ و گشتاور کنترلی فرمان در شکل ۵ ارائه شده است. همان طور که در تاریخچه زمانی کواتر نیون و زوایای اوایلر مشاهده می شود، کمترین زمان خیز را کنترلر خطی سازی شده پس خور (FL) و سپس کنترلر پسگام (BS) و در نهایت کنترلر خطی تناسبی-مشتق گیر (PD) دارد؛ اما از آن طرف همان طور که در شکل ۵ مشاهده می شود این کاهش زمان خیز و بالطبع آن زمان نشست، به بهای افزایش دستور گشتاور به خصوص در لحظات ابتدایی می باشد. به منظور مقایسه این سه کنترلر از لحاظ دستور شتاب، تلاش کنترلی به صورت $ce := \int_0^t \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} dt$ تعریف می شود.

در شکل ۶ تغییرات زمان نشست و تلاش کنترلی هر سه کنترلر برحسب تغییرات زاویه ویژه ترسیم شده است. همان طور که مشاهده می شود، تنها کنترلر FL می تواند زمان نشست مطلوب را در تمام زوایا تأمین کند که البته این نتیجه به بهای افزایش تلاش کنترلی است. سپس کنترلر BS دارای کمترین خطای زمان نشست و البته با تلاش کنترلی به مراتب کمتر از کنترلر FL است. عملکرد سه کنترلر در زاویه ویژه اولیه 180° درجه در جدول ۲ با هم مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می شود خطای زمان نشست کنترلر PD ۲۲٪ و کنترلر BS ۱۷٪ است؛ بنابراین، از لحاظ خطای زمان نشست، کنترلر BS ترجیح داده می شود. همچنین تلاش کنترلی FL و BS نسبت به PD به ترتیب ۱۰۰٪ و ۴۶٪ افزایش را نشان می دهد.

جدول (۲): مقایسه کنترلرها در $\alpha = 180 \text{ deg}$.

	BS	FL	PD	
زمان نشست (ثانیه)	۴۷	۴۰	۴۹	
تلاش کنترلی (m^2/s^3)	۲۰۰۵	۲۷۸۰	۱۳۶۹	

فرکانس طبیعی	ω_n
زمان نشست	t_s
تلاش کنترلی	ce
زیر نویس‌ها	
خطا	e
دستگاه بدنه	b
دستگاه فرمان	c
بالا نویس‌ها	

ترانزاده T شکل (۵): سه مؤلفه گشتاور ($\alpha = 180 \text{ deg}$).شکل (۶): زمان نشست و تلاش کنترلی بر حسب α .

۷- مراجع

[1] Markley FL, Crassidis JL. Fundamentals of spacecraft attitude determination and control. New York, NY: Springer New York; 2014.

[2] Mortensen RE. A globally stable linear attitude regulator. International journal of control. 1968 1;8(3):297-302.

بر پس‌گام برای کنترل وضعیت یک جسم صلب طراحی و تحلیل شد. تحلیل پایداری هر سه کنترلر به صورت پایداری مجانبی فراگیر با استفاده از تابع لیاپانوف برای دو کنترلر خطی تناسبی-مشتق‌گیر و غیرخطی پس‌گام و بر اساس تحلیل‌های خطی و تحلیل دینامیک داخلی برای کنترلر مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور نیز ارائه شد. بهره‌های کنترلی با خطی‌سازی کنترلرهای خطی و پس‌گام حول نقطه تعادل و برای کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور، بدون نیاز به خطی‌سازی برای دستیابی به یک زمان نشست مطلوب تعیین شد. نتایج نشان داد اگرچه کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور یک کنترلر فراگیر نیست ولیکن در تمام سناریوها، زمان نشست مطلوب را فراهم می‌کند. البته این نتیجه با هزینه افزایش تلاش کنترلی در مقایسه با دو کنترلر دیگر بوده است. در مقایسه بین کنترلر خطی و کنترلر پس‌گام، کنترلر پس‌گام دارای عملکرد بهتری در تأمین زمان نشست مطلوب دارد؛ بنابراین، به‌عنوان جمع‌بندی می‌توان گفت با توجه به عملکرد و تضمین پایداری مجانبی فراگیر کنترلر پس‌گام، این کنترلر گزینه مناسبی در طراحی کنترل وضعیت یک جسم صلب است. از کارهای آینده مقایسه پایداری و عملکرد مقاوم این سه کنترلر در حضور عدم قطعیت و اغتشاش می‌باشد.

۶- فهرست علائم

متغیرها

بردا سرعت زاویه‌ای	$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$
بردار گشتاور کنترلی	$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$
ممان اینرسی	\mathbf{J}
زاویه چرخش حول محور ویژه	α
بردار هادی محور ویژه	$\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T$
بخش بردار کواترنیون	$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$
بخش اسکالر کواترنیون	q_4
ماتریس یکه ۳ در ۳	\mathbf{I}
بهره ماتریسی و اسکالر تناسبی	k_p, \mathbf{K}_p
بهره ماتریسی و اسکالر مشتق‌گیر	k_d, \mathbf{K}_d
تابع لیاپانوف	V
ضریب میرایی	ξ

- [16] Show LL, Juang JC, Jan YW. An LMI-based nonlinear attitude control approach. *IEEE transactions on control systems technology*. 2003 29;11(1):73-83.
- [17] Kim KS, Kim Y. Robust backstepping control for slew maneuver using nonlinear tracking function. *IEEE Transactions on control systems technology*. 2003;11(6):822-9.
- [18] Bang H, Lee JS, Eun YJ. Nonlinear attitude control for a rigid spacecraft by feedback linearization. *KSME International Journal*. 2004;18:203-10.
- [19] Luo W, Chu YC, Ling KV. H-infinity inverse optimal attitude-tracking control of rigid spacecraft. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2005;28(3):481-94.
- [20] Kristiansen R, Nicklasson PJ. Satellite attitude control by quaternion-based backstepping. In *Proceedings of the 2005, American Control Conference*, 2005:907-912, IEEE.
- [21] Hu Q, Xiao B, Zhang Y. Adaptive backstepping based fault tolerant spacecraft attitude control under loss of actuator effectiveness. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference 2010*: 8306.
- [22] Ali I, Radice G, Kim J. Backstepping control design with actuator torque bound for spacecraft attitude maneuver. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2010;33(1):254-9.
- [23] Yang Y. Analytic LQR design for spacecraft control system based on quaternion model. *Journal of aerospace engineering*. 2012;25(3):448-53.
- [24] Yang Y. Quaternion-based lqr spacecraft control design is a robust pole assignment design. *Journal of Aerospace Engineering*. 2014;27(1):168-76.
- [25] Navabi M, Hosseini MR. Spacecraft quaternion based attitude input-output feedback linearization control using reaction wheels. In *2017 8th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST) 2017 Jun 19 (pp. 97-103)*. IEEE.
- [26] Giuseppi A, Pietrabissa A, Cilione S, Galvagni L. Feedback linearization-based satellite attitude control with a life-support device without communications. *Control Engineering Practice*. 2019;90:221-30.
- [3] Dwyer T. Exact nonlinear control of large angle rotational maneuvers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1984;29(9):769-74.
- [4] Wie B, Weiss H, Arapostathis A. Quaternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1989;12(3):375-80.
- [5] Dwyer III TA. Exact nonlinear control of spacecraft slewing maneuvers with internal momentum transfer. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1986;9(2):240-7.
- [6] Wie B, Barba PM. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985;8(3):360-5.
- [7] Wu CS, Chen BS. Attitude Control of Spacecraft: Mixed H/H ∞ Approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2001;24(4):755-66.
- [8] Carrington CK, Junkins JL. Optimal nonlinear feedback control for spacecraft attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1986;9(1):99-107.
- [9] Wen JY, Kreutz-Delgado K. The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic control*. 1991;36(10):1148-62.
- [10] Lo SC, Chen YP. Smooth sliding-mode control for spacecraft attitude tracking maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1995;18(6):1345-9.
- [11] Krstic M, Tsiotras P. Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999;44(5):1042-9.
- [12] Wisniewski R. Linear time-varying approach to satellite attitude control using only electromagnetic actuation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2000;23(4):640-7.
- [13] Kuang J, Leung AY. H Feedback for Attitude Control of Liquid-Filled Spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2001;24(5):1053-.
- [14] Kim KS, Kim Y. Backstepping control of rigid spacecraft slew maneuver. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 2001*: 4210.
- [15] Bang H, Myung HS, Tahk MJ. Nonlinear momentum transfer control of spacecraft by feedback linearization. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2002;39(6):866-73.

- [27] Xie Y, Lei Y, Guo J, Meng B. Spacecraft Dynamics and Control. Singapore: Springer; 2022.
- [28] Gołabek M, Welcer M, Szczepański C, Krawczyk M, Zajdel A, Borodacz K. Quaternion Attitude Control System of Highly Maneuverable Aircraft. *Electronics*. 2022;11(22):3775.
- [29] Septanto H, Kurniawan E, Suprijanto D. Quaternion feedback attitude control system design based on weighted-L2-gain performance. *Results in Engineering*. 2023 Mar 1;17:100717.
- [30] Yuan JS. Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. *IEEE Journal on Robotics and Automation*. 1988;4(4):434-40.
- [31] Bobrow F, Angelico BA, Martins FP, da Silva PS. The Cubli: modeling and nonlinear attitude control utilizing quaternions. *IEEE Access*. 2021 Aug 27;9:122425-42.
- [32] Weiss H. Quaternion-based rate/attitude tracking system with application to gimbal attitude control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1993;16(4):609-16.
- [33] Mazenc F, Yang S, Akella MR. Quaternion-based stabilization of attitude dynamics subject to pointwise delay in the input. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016;39(8):1697-705.
- [34] Song C, Kim SJ, Kim SH, Nam HS. Robust control of the missile attitude based on quaternion feedback. *Control Engineering Practice*. 2006;14(7):811-8.
- [35] Xia Y, Lu K, Zhu Z, Fu M. Adaptive backstepping sliding mode attitude control of missile systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2013;23(15):1699-717.
- [36] Wu YJ, Zuo JX, Sun LH. Smooth backstepping sliding mode control for missile attitude system based on parameters online adjusting and estimating for square of disturbance upper bound. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2019;233(1):22-33.
- [37] Ogata K. *Modern control engineering*. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall; 2010.