مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۲/ دوره ۱۹/ شماره ۴/ صفحه ۴۱-۵۲

نشریه علمی مکانیک هوافضا

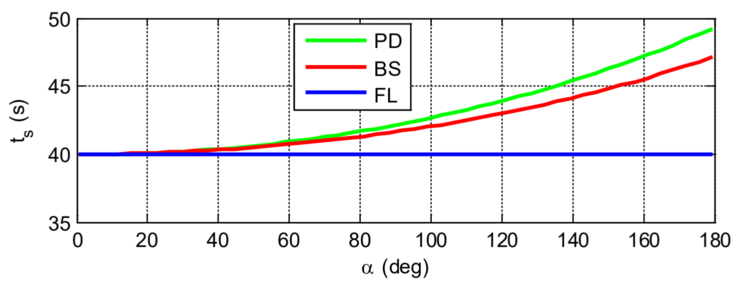
DOR: 20.1001.1.26455323.1402.19.4.4.5

تحلیل و مقایسه کنترلرهای خطی، خطی‌سازی‌شده پس‌خور و پسگام مبتنی بر کواترنیون در کنترل وضعیت فضاپیما

مهدی نیکوسخن لامع

دکتری، سازمان صنایع هوافضا، تهران، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- تحلیل پایداری غیرخطی مبتنی بر تابع لیاپانوف
- انتخاب ساختار ماتریس‌های بهره کنترلی برای چرخش دقیق حول محور ویژه اولیه
- تعیین مقادیر بهره‌های کنترلی در کنترلر خطی و کنترلر غیرخطی پسگام بر اساس دینامیک خطی‌سازی‌شده محلی

چکیده

در این مقاله، طراحی و تحلیل کنترل وضعیت یک فضاپیما به‌عنوان یک جسم صلب، مبتنی بر سه کنترلر خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور و غیرخطی مبتنی بر پسگام ارائه‌شده است. با توجه به ویژگی بیان وضعیت به‌صورت فراگیر بر اساس پارامترهای کواترنیون، از این پارامترها برای استخراج معادلات دینامیکی استفاده‌شده است. پایداری فراگیر مجانبی کنترلر خطی و پسگام بر اساس روش لیاپانوف اثبات‌شده است. پایداری حلقه بسته کنترلر خطی‌سازی‌شده پس‌خور نیز با نشان دادن عدم وجود دینامیک داخلی اثبات‌شده است. بهره‌های کنترلی در روش خطی و پسگام بر اساس مدل خطی به‌دست‌آمده از خطی‌سازی محلی حول نقطه تعادل و در روش خطی‌سازی‌شده پس‌خور بر اساس مدل خطی فراگیر، تعیین‌شده است. عملکرد این سه کنترلر در سناریوهای مختلف باهم مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که کنترلر خطی‌سازی‌شده پس‌خور قادر به برآوردسازی دقیق زمان نشست مطلوب می‌باشد. درصورتی‌که بیشینه خطای زمان نشست حاصل‌شده نسبت به زمان نشست مطلوب در کنترل پسگام در حدود ۱۷٪ و در کنترلر خطی در حدود ۲۲٪ است. البته تلاش کنترلی کنترلر خطی‌سازی‌شده پس‌خور و پسگام به ترتیب ۱۰۰٪ و ۴۶٪ بیشتر از کنترلر خطی می‌باشد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۸

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۰۶

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳

ارائه برخط: ۱۴۰۲/۰۲/۱۷

*نویسنده مسئول:

nikusokhan@gmail.com

کلیدواژه‌ها:

کنترل وضعیت

کواترنیون

کنترلر خطی

پسگام

خطی‌سازی پس‌خور

فضاپیما

۱- مقدمه

کنترل وضعیت[1] به معنی کنترل محورهای دستگاه بدنه یک وسیله نسبت به یک دستگاه مرجع، یکی از مباحث مهم و کاربردی در حوزه هوافضا و رباتیک است. در حل این مسئله کنترلی، دو موضوع اصلی مطرح است. اول، پارامترهای بیان وضعیت یک جسم نسبت به یک دستگاه مرجع و بیان معادلات دینامیکی بر اساس آن و دوم، روش کنترلی بر اساس پارامترهای بیان وضعیت انتخابی است. یکی از مرسوم‌ترین پارامترهای بیان وضعیت، کواترنیون‌ها[2] (پارامترهای اویلر) است که معادلات دینامیکی آن در هیچ وضعیتی تکینه[3] نبوده و تمام وضعیت‌ها به‌صورت فراگیر[4] با این پارامتر قابل‌بیان است. تمام بیان وضعیت‌های دیگر مانند زوایای اویلر، پارامترهای رودریگز و پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز در برخی وضعیت‌ها دچار تکینگی شده و به‌صورت فراگیر قابل‌استفاده نمی‌باشند. به‌طور مثال معادلات زوایای اویلر مرسوم در زاویه فراز[5] ۹۰ درجه، پارامترهای رودریگز در زاویه چرخش ۱۸۰ درجه حول محور دوران و پارامترهای اصلاح‌شده رودریگز در زاویه چرخش ۳۶۰ درجه حول محور دوران تکینه می‌شوند [۱]. علت اصلی تکینگی این روش‌ها در برخی وضعیت‌ها، استفاده از تنها سه پارامتر برای بیان وضعیت است؛ درصورتی‌که در کواترنیون‌ها از چهار پارامتر برای بیان وضعیت استفاده می‌شود. با عنایت به این ویژگی کواترنیون‌ها، مرور مراجع در هفت دهه گذشته نشان‌دهنده انتشار مقالات بسیار زیاد در کنترل وضعیت وسایل مانند فضاپیما و ماهواره[۲-۲۹]، بازوهای رباتیک [۳۰ و ۳۱]، ردیاب‌ها [۳۲] و موشک‌ها [۳۴-۳۶] مبتنی بر کواترنیون‌ها است. در این روش، برای بیان وضعیت یک جسم نسبت به دستگاه مرجع از یک چرخش حول یک محور مشخص استفاده می‌شود. این محور با نام محور ویژه[6] یا محور اویلر و زاویه چرخش نیز زاویه ویژه یا اویلر شناخته می‌شود[۲-۴].

اکثر کنترلرهای ارائه‌شده برای کنترل وضعیت بر اساس روش کواترنیون مبتنی بر کنترلرهای خطی خصوصاً کنترلر تناسبی-مشتق‌گیر می‌باشد. تحلیل پایداری برای مسئله غیرخطی بر اساس تابع لیاپانوف ارائه‌شده و محدوده بهره‌های کنترلی برای پایداری دینامیک غیرخطی ارائه‌شده است. عمده تفاوت این مراجع در نوع انتخاب بهره‌کنترلی است. در مراجع [۲]، [۲۳-۳۲]، بهره‌های کنترلی وابسته به پارامترهای مدل، در مرجع [۴، ۲۷ و ۲۸]، بهره‌های کنترلی مستقل از پارامترهای مدل و در مرجع [۳۳] هر دو نوع آن پیشنهادشده است. در برخی از این مراجع برای رسیدن به یک پاسخ زمانی مطلوب، دینامیک غیرخطی حول نقطه تعادل خطی‌سازی شده و بهره‌های کنترلی مناسب بر اساس تحلیل‌های خطی و در محدوده تعیین‌شده توسط روش لیاپانوف تعیین می‌شود[۶، ۲۳، ۲۴ و ۳۲]. اما از آن‌طرف، در صورت طراحی کنترلر بر اساس روش خطی‌سازی پس‌خور، بدون نیاز به خطی‌سازی حول نقطه تعادل می‌توان از تحلیل خطی برای تعیین بهره‌های کنترلی استفاده کرد. در مراجع [۳، ۵، ۱۵، ۱۸، ۲۵، ۲۶ و ۳۱] از روش خطی‌سازی پس‌خور مبتنی بر بیان وضعیت با پارامترهای کواترنیون استفاده‌شده است. در مرجع [۳] برای یک سیستم کنترلی با گشتاورسازهای خارجی، با انتقال مسئله غیرخطی به خطی، از روش کنترل بهینه برای طراحی کنترلر خطی استفاده‌شده است و برخلاف روش‌های عددی کنترل بهینه که دارای مشکلات پیاده‌سازی می‌باشند، در این روش یک کنترلر با حل بسته به‌دست‌آمده است. در مراجع [۵ و ۱۵] نیز با همین روش برای یک سیستم کنترلی با گشتاورسازهای داخلی چرخ عکس‌العملی به طراحی کنترلر وضعیت پرداخته‌شده است. در مرجع [۲۶] این روش برای مسئله‌ای شامل دو جسم صلب متصل‌به‌هم با کنترلرهای مستقل به‌کاربرده شده است. مشکل اصلی در کنترلرهای مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور، وجود وضعیت‌هایی است که در آن سیگنال کنترلی تکینه می‌شوند [۳، ۵، ۱۵، ۲۶ و ۳۱].

در مقابل، روش پسگام[7] یک روش طراحی کنترلر برای سیستم‌های غیرخطی آبشاری[8] است که در آن تابع لیاپانوف

[1] Attitude
[2] Quaternion
[3] Singular
[4] Global
[5] Pitch
[6] Eigen axis

[7] Backstepping
[8] Cascade

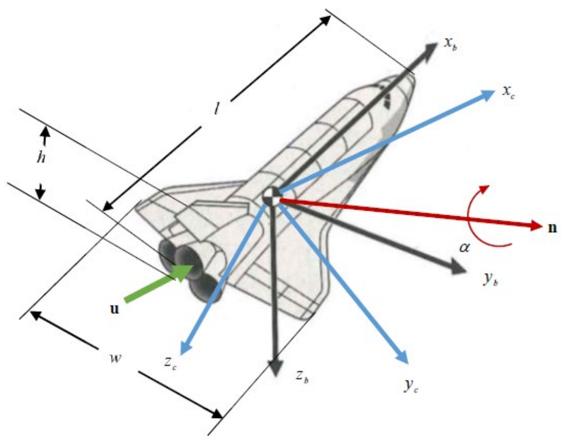
به‌صورت بازگشتی[1] ساخته می‌شود. همچنین در هر مرحله از طراحی، می‌توان با روش‌های مقاوم یا تطبیقی عدم قطعیت آن مرحله را جبران کرد. در مراجع [۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰-۲۲ و ۳۵-۳۶] برای کنترل وضعیت مبتنی بر کواترنیون با استفاده از روش پسگام کنترلرهایی ارائه‌شده است. در مراجع [۱۴، ۲۱، ۳۵ و ۳۶] کنترلرها، دارای سیگنال کنترلی مرحله اول و دوم یکسان هستند. در مراجع [۱۴، ۱۷ و ۲۲] با ارائه یک نرخ چرخش بدنه مطلوب (سیگنال کنترلی مرحله اول) برحسب تابع غیرخطی معکوس تانژانت برای محدود کردن سیگنال کنترلی، کنترلر طراحی‌شده است. در مرجع [۱۴] بر اساس نامساوی گرووال-بلمان حد بیشینه نرخ چرخش بدنه و یا دستور کنترلی را به دست آورده و با یک قید نامساوی بر روی زمان نشست، بیشینه دستور کنترلی کمینه می‌شود. در این مراجع، بهره کنترلی بر اساس بهینه‌سازی عددی تعیین می‌شوند؛ اما نکته مهم در هر سه مرجع، عدم اشاره به نحوه محاسبه زمان نشست است. در مرجع [۲۰]، سیگنال کنترلی مرحله اول برخلاف بقیه کنترلرهای پسگام ارائه‌شده یک تابع غیرخطی از حالت‌ها پیشنهادشده است. متأسفانه در این مرجع نه دلیل پیشنهاد این تابع غیرخطی و نه مقایسه آن با کنترلر متداول پسگام که در آن سیگنال کنترلی مرحله اول به‌صورت یک تابع خطی از خطای ردیابی است، ارائه نشده است. در مراجع [۲۱، ۳۵ و ۳۶] به ارائه کنترل‌های پسگام مقاوم یا تطبیقی در حضور عدم قطعیت و عیب پرداخته‌شده است. در تمام مراجع، بهره‌های کنترلی بر اساس سعی و خطا و دید طراحی در بازه مقیدشده توسط روش لیاپانوف تعیین می‌شود.

با توجه به دانش نویسنده، مرجعی در خصوص استخراج معادلات سه کنترلر مطرح خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور و غیرخطی مبتنی بر پسگام بر اساس یک نمادسازی یکسان و تحلیل و مقایسه آن‌ها ارائه نشده است. در این مقاله سعی شده است به طراحی و تحلیل این سه کنترلر و مقایسه دستور کنترلی هر سه روش پرداخته شود. همچنین، شرایط چرخش حول محور ویژه ثابت نیز برای هر سه کنترلر اثبات و بهره‌های کنترلر بر اساس خطی‌سازی حول نقطه تعادل تعیین‌شده است. درنهایت، عملکرد این سه کنترلر در سناریوهای مختلف با هم مقایسه شده است.

در بخش ۲ معادلات دینامیکی و سینماتیکی یک فضاپیما به‌عنوان یک جسم صلب ارائه‌شده است. در بخش ۳ طراحی کنترلرهای خطی تناسبی-مشتق‌گیر، خطی‌سازی شده پس‌خور و پسگام به همراه تحلیل پایداری آن‌ها و نحوه تنظیم بهره‌ها ارائه‌شده است. در بخش ۵ شبیه‌سازی و مقایسه عملکرد کنترلرها و درنهایت در بخش ۶ نتیجه‌گیری و جمع‌بندی ارائه می‌شود.

۲- سینماتیک و دینامیک جسم صلب

در این بخش، یک مدل فضاپیمای صلب که تحت تأثیر ابزارهای گشتاورساز در دستگاه بدنه می‌چرخد، در نظر گرفته‌شده است (شکل ۱). برای سادگی، یک گشتاورساز ایده‌ال فرض می‌شود.



شکل (۱): مشخصات سینماتیکی و هندسی فضاپیما.

۲-۱- دینامیک جسم صلب

معادلات اویلر، حرکت چرخشی یک جسم صلب حول محورهای متعامد متصل به بدنه با مبدأ مرکز جرم را با رابطه (۱) توصیف می‌کند [۲۷]:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \qquad (۱)$$

که $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ بردار سرعت زاویه‌ای، $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ بردار گشتاور کنترلی، $\mathbf{J}$ ممان اینرسی و

[1] Recursive

$[\boldsymbol{\omega}]^{\times}$ ماتریس شبه متقارن می‌باشد که به این صورت تعریف می‌شود:

$$[\boldsymbol{\omega}]^{\times}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \quad (۲)$$

زیرنویس‌های ۱، ۲ و ۳ بیانگر محورهای کنترلی متعامد ثابت در بدنه هستند. فرض می‌شود که مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در امتداد محورهای بدنه با جایروهای نرخی اندازه‌گیری شده و برای محاسبه وضعیت بدنه هم استفاده می‌شود.

۲-۲- سینماتیک مبتنی بر کواترنیون

قضیه چرخشی اویلر بیان می‌کند که چرخش هر جسم صلب را می‌توان با چرخش حول یک محور به نام محور ویژه بیان کرد. کواترنیون، وضعیت هر جسم را بر اساس چرخش حول محور ویژه بیان می‌کند. بخش برداری کواترنیون (سه مؤلفه اول) جهت بردار ویژه و بخش عددی کواترنیون (مؤلفه چهارم) نیز زاویه چرخش حول محور ویژه را نشان می‌دهد. چهار مؤلفه کواترنیون برحسب بردار محور ویژه و زاویه ویژه به این صورت بیان می‌شود:

$$q_i=n_i\sin(\alpha/2);\ i=1,2,3 \quad (۳)$$

$$q_4=\cos(\alpha/2) \quad (۴)$$

که α زاویه چرخش حول بردار ویژه و $\mathbf{n}=[n_1,n_2,n_3]^T$ بردار هادی محور ویژه در دستگاه مرجع است (شکل **۱**). طبق معادلات (۳) و (۴) به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{q}^T\mathbf{q}+q_4^2=1 \quad (۵)$$

که $\mathbf{q}=[q_1,q_2,q_3]^T$ معادله دیفرانسیلی سینماتیک برای کواترنیون به این صورت توصیف می‌شود [۲۷]:

$$\dot{\mathbf{q}}=0.5[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{q}+0.5q_4\boldsymbol{\omega} \quad (۶)$$

$$\dot{q}_4=-0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q} \quad (۷)$$

کواترنیون اولیه $[\mathbf{q}^T(0),q_4(0)]^T$ مقدار کواترنیونها را در لحظه $t=0$ و کواترنیون فرمان $[\mathbf{q}_c^T,q_{4c}]^T$ کواترنیون مطلوب را نشان می‌دهند. کواترنیون خطا که بیان‌گر خطای وضعیت بین وضعیت کنونی و وضعیت مطلوب است به این صورت به دست می‌آید [۶]:

$$\mathbf{q}_e=q_{4c}\mathbf{q}-[\mathbf{q}_c]^{\times}\mathbf{q}-q_4\mathbf{q}_c\ ,\ q_{4e}=\mathbf{q}_c^T\mathbf{q}+q_4q_{4c} \quad (۸)$$

چون در این مقاله، مسئله مانور سکون‌به‌سکون[۱] مدنظر است، مقادیر مطلوب $q_{ic},i=1,...,4$، اعداد ثابت می‌باشند و بنابراین دینامیک خطای کواترنیون‌ها مشابه (۶)، (۷) به‌صورت روابط (۹) و (۱۰) نوشته می‌شود:

$$2\dot{\mathbf{q}}_e=(-[\mathbf{q}_e]^{\times}+q_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega} \quad (۹)$$

$$2\dot{q}_{4e}=-\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e \quad (۱۰)$$

در ادامه چند قضیه که در استخراج روابط کاربرد دارد، ارائه می‌شود.

قضیه ۱: معکوس ماتریس $(-[\mathbf{q}_e]^{\times}+q_{4e}\mathbf{I})$ عبارت است از [۳]:

$$(-[\mathbf{q}_e]^{\times}+q_{4e}\mathbf{I})^{-1}=(q_{4e}^2\mathbf{I}+\mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T+q_{4e}[\mathbf{q}_e]^{\times})/q_{4e} \quad (۱۱)$$

اثبات: کافی است نشان دهیم:

$$(-[\mathbf{q}_e]^{\times}+q_{4e}\mathbf{I})(q_{4e}^2\mathbf{I}+\mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T+q_{4e}[\mathbf{q}_e]^{\times})/q_{4e}=\mathbf{I} \quad (۱۲)$$

با بسط ضرب و ساده‌سازی سمت چپ رابطه (۱۲) و با توجه به اینکه $[\mathbf{q}_e]^{\times}\mathbf{q}_e=0$ و $\mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T+[\mathbf{q}_e]^{\times}[\mathbf{q}_e]^{\times}=\mathbf{q}_e^T\mathbf{q}_e\mathbf{I}$ داریم:

$$(-[\mathbf{q}_e]^{\times}+q_{4e}\mathbf{I})(q_{4e}^2\mathbf{I}+\mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T+q_{4e}[\mathbf{q}_e]^{\times})/q_{4e}=(q_{4e}^2+\mathbf{q}_e^T\mathbf{q}_e)\mathbf{I} \quad (۱۳)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۵) سمت راست (۱۳) ماتریس یکه می‌شود.

قضیه ۲: مشتق مقدار عددی کواترنیون برحسب بخش برداری به‌صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود [۴]:

$$\dot{q}_{4e}=-\mathbf{q}_e\dot{\mathbf{q}}_e^T/q_{4e} \quad (۱۴)$$

اثبات: این رابطه با مشتق‌گیری از رابطه (۵) برای بردار کواترنیون خطا به‌سادگی قابل‌استخراج است.

قضیه ۳: رابطه (۱۵) بین مشتق کواترنیون و نرخ چرخش بدنه برقرار است [۴]:

$$(-[\dot{\mathbf{q}}_e]^{\times}+\dot{q}_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega}/2 \quad (۱۵)$$

اثبات: با استفاده از رابطه (۹) و (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned}(-[\dot{\mathbf{q}}_e]^{\times}+\dot{q}_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega}&=-[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\dot{\mathbf{q}}_e+\dot{q}_{4e}\boldsymbol{\omega}\\&=-0.5[\boldsymbol{\omega}]^{\times}(-[\mathbf{q}_e]^{\times}\boldsymbol{\omega}+q_{4e}\boldsymbol{\omega})+0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \quad (۱۶)$$

حال با استفاده از ویژگی $\boldsymbol{\omega}\mathbf{q}_e^T+[\boldsymbol{\omega}]^{\times}[\mathbf{q}_e]^{\times}=\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\mathbf{I}$ و $[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\boldsymbol{\omega}=0$ می‌توان رابطه (۱۶) را به این صورت بازنویسی کرد:

[۱] Rest-to-rest

$$(-[\dot{\mathbf{q}}_e]^{\times} + \dot{q}_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega}$$
$$= 0.5(\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{q}_e^T\boldsymbol{\omega}) + 0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega} \quad (۱۷)$$
$$= 0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega}$$

قضیه ۴: رابطه (۱۸) بین مشتق کواترنیون و نرخ چرخش بدنه برقرار است [۴]:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^T\boldsymbol{\omega} = 0.5q_{4e}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} \quad (۱۸)$$

اثبات: با استفاده از رابطه (۹) داریم:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^T\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T(-[\mathbf{q}_e]^{\times}\boldsymbol{\omega} + q_{4e}\boldsymbol{\omega}) \quad (۱۹)$$

حال با توجه به ویژگی $\boldsymbol{\omega}^T[\mathbf{q}_e]^{\times}\boldsymbol{\omega} = 0$ داریم:

$$\dot{\mathbf{q}}_e^T\boldsymbol{\omega} = 0.5q_{4e}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} \quad (۲۰)$$

۳- طراحی کنترلر

در این بخش به طراحی، تحلیل پایداری و استخراج بهره‌های کنترلی کنترلرهای مدنظر پرداخته می‌شود.

۳-۱- کنترلر خطی تناسبی-مشتق‌گیر

در کنترلر خطی، سه عبارت شامل فیدبک خطی خطای کواترنیون، فیدبک خطی نرخ چرخش بدنه و عبارت غیرخطی برای حذف گشتاور ژیروسکوپی وجود دارد:

$$\mathbf{u} = -[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}_p\mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d\boldsymbol{\omega} \quad (۲۱)$$

در این صورت معادله (۱) به این صورت نوشته می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_d\boldsymbol{\omega} \quad (۲۲)$$

با پیشنهاد تابع لیاپانوف به‌صورت:

$$V = \mathbf{q}_e^T\mathbf{q}_e + (1-q_{4e})^2 + 0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (۲۳)$$

و با توجه به‌شرط نرمال بودن بردار کواترنیون، تابع لیاپانوف به این صورت ساده می‌شود:

$$V = 2(1-q_{4e}) + 0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (۲۴)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف و جایگزینی معادلات (۹)، (۱۰) و (۲۲) در آن، مشتق تابع لیاپانوف به این صورت ساده می‌شود:

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{K}_d\boldsymbol{\omega} \quad (۲۵)$$

بنابراین اگر $\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{K}_d$ مثبت معین باشد، پایداری مجانبی فراگیر تضمین می‌شود. درصورتی‌که ماتریس‌های بهره به‌صورت $\mathbf{K}_p = k_p\mathbf{J}$ و $\mathbf{K}_d = k_d\mathbf{J}$ انتخاب شوند، به‌شرط $k_p > 0$ و $k_d > 0$، علاوه بر تضمین پایداری، معادله حلقه بسته نرخ چرخش بدنه مستقل از ماتریس ممان اینرسی به این صورت نوشته می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -k_p\mathbf{q}_e - k_d\boldsymbol{\omega} \quad (۲۶)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۹) و (۱۰) داریم:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e = (-[\dot{\mathbf{q}}_e]^{\times} + \dot{q}_{4e}\mathbf{I})\boldsymbol{\omega} + (-[\mathbf{q}_e]^{\times} + q_{4e}\mathbf{I})\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (۲۷)$$

$$2\ddot{q}_{4e} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{q}_e - \boldsymbol{\omega}^T\dot{\mathbf{q}}_e \quad (۲۸)$$

با جایگزینی نرخ چرخش بدنه از معادله (۲۶) در معادلات (۲۷) و (۲۸) و با توجه به $[\mathbf{q}_e]^{\times}\mathbf{q}_e = 0$ و با استفاده از قضایای ۳ و ۴، معادلات (۲۷) و (۲۸) به این صورت ساده می‌شود:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e = -0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega} - k_pq_{4e}\mathbf{q}_e - 2k_d\dot{\mathbf{q}}_e \quad (۲۹)$$

$$2\ddot{q}_{4e} = k_p(1-q_{4e}^2) - 2k_d\dot{q}_{4e} - 0.5q_{4e}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} \quad (۳۰)$$

با خطی‌سازی معادلات (۲۹) و (۳۰) حول نقطه تعادل $\mathbf{q}_e = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ و $q_{4e} = 0$ داریم:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e + 2k_d\dot{\mathbf{q}}_e + k_p\mathbf{q}_e = \mathbf{0} \quad (۳۱)$$

در این صورت بهره‌های کنترلی بر اساس ضریب میرایی و فرکانس مطلوب به این صورت به دست می‌آیند:

$$k_p = 2\omega_n^2, k_d = 2\xi\omega_n \quad (۳۲)$$

برای اثبات چرخش حول محور ویژه باید نشان داده که جهت $\mathbf{q}_e(t)$ مستقل از زمان است. برای اثبات عدم‌تغییر جهت $\mathbf{q}_e(t)$، می‌توان نشان داد که $\mathbf{q}_e(t)$ در راستای مقدار اولیه آن باقی می‌ماند؛ بنابراین، فرض می‌شود که $\mathbf{q}_e(t) = c_q(t)\mathbf{q}_{e0}$. طبق معادله (۲۶) می‌توان نتیجه گرفت که $\boldsymbol{\omega}(t)$هم در راستای $\mathbf{q}_{e0}$ خواهد بود و بنابراین می‌توان آن را به‌صورت $\boldsymbol{\omega}(t) = c_\omega(t)\mathbf{q}_{e0}$ نوشت. حال اگر این دو رابطه را در معادله (۹) قرار دهیم، با توجه به $[c_q(t)\mathbf{q}_e]^{\times}c_\omega(t)\mathbf{q}_{e0} = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\dot{\mathbf{q}}_e = q_{4e}(t)c_\omega(t)\mathbf{q}_{e0}/2$ و بنابراین فرض $\mathbf{q}_e(t) = c_q(t)\mathbf{q}_{e0}$، فرض صحیح بوده است.

۳-۲- کنترلر خطی‌سازی‌شده پس‌خور

خروجی مطلوب کنترل در بیان با کواترنیون بردار $\mathbf{q}_e$ است. با دو بار مشتق‌گیری از این بردار رابطه (۲۷) حاصل می‌شود که با توجه به ویژگی $[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{q}_e = -[\mathbf{q}_e]^{\times}\boldsymbol{\omega}$ به این صورت بازنویسی می‌شود:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e = (-[\mathbf{q}_e]^{\times} + q_{4e}\mathbf{I})\dot{\boldsymbol{\omega}}$$
$$0.5[\boldsymbol{\omega}]^{\times}([\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{q}_e + q_{4e}\boldsymbol{\omega}) - 0.5\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega} \qquad (۳۳)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در (۳۳) ورودی کنترلی ظاهر می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega})\mathbf{u} \qquad (۳۴)$$

که

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega}) = (-[\mathbf{q}_e]^{\times} + q_{4e}\mathbf{I})\mathbf{J}^{-1}/2$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega}) = 0.5(-[\mathbf{q}_e]^{\times} + q_{4e}\mathbf{I})\mathbf{J}^{-1}[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \qquad (۳۵)$$
$$+0.25[\boldsymbol{\omega}]^{\times}([\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{q}_e + q_{4e}\boldsymbol{\omega}) - 0.25\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega}$$

درصورتی‌که دستور کنترلی به‌صورت رابطه (۳۶) انتخاب شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega})(-\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}_e - \mathbf{f}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega})) \qquad (۳۶)$$

سیستم دینامیکی مدنظر به این صورت خطی می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_p\mathbf{q}_e + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}_e = 0 \qquad (۳۷)$$

برای پایداری معادله (۳۷) کافی است که ریشه‌های معادله درجه ۲ در سمت چپ محور موهومی قرار گیرد. با توجه به اینکه $[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\boldsymbol{\omega} = 0$، رابطه (۳۶) به این صورت ساده می‌شود:

$$\mathbf{u} = -[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega}) \times$$
$$(-\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}_e - 0.25([\boldsymbol{\omega}]^{\times}[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{q}_e + \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_e\boldsymbol{\omega})) \qquad (۳۸)$$

معکوس تابع $\mathbf{g}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega})$ طبق قضیه ۱ عبارت است از:

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega}) = \frac{2}{q_{4e}}\mathbf{J}(q_{4e}^2\mathbf{I} + \mathbf{q}_e\mathbf{q}_e^T + q_{4e}[\mathbf{q}_e]^{\times}) \qquad (۳۹)$$

تنها شرط برای اینکه سیستم دینامیکی موردنظر، قابل خطی‌سازی ورودی-خروجی باشد، این است که $\mathbf{g}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega})$ معکوس‌پذیر باشد؛ بنابراین، همان‌طور که در رابطه (۳۹) مشاهده می‌شود در $q_{4e}=0$، $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega}) = 2\mathbf{J}/q_{4e}$ و بنابراین تابع $\mathbf{g}(\mathbf{q}_e,\boldsymbol{\omega})$ در $q_{4e}=0$ معکوس‌پذیر نیست. این مقدار معادل زوایای چرخش ویژه صفر و ۳۶۰ درجه است؛ بنابراین، دستور کنترلی به‌دست‌آمده از خطی‌سازی پس‌خور یک کنترلر فراگیر نیست؛ اما در خصوص پایداری حلقه‌بسته سیستم، همان‌طور که مشاهده شد با ۲ بار مشتق‌گیری از خروجی مطلوب، دستور کنترلی ظاهر شد و این نشان‌دهنده درجه نسبی ۲ برای هر مؤلفه و درجه نسبی ۶ برای کل معادلات است. از طرفی درجه معادلات دینامیکی ۷ است (معادلات (۱)، (۹) و (۱۰)). ولیکن با توجه به قید رابطه (۵) درجه معادلات دینامیکی بدون قید برابر ۶ است؛ بنابراین، با توجه به یکسان بودن درجه نسبی و درجه معادلات دینامیکی، سیستم دینامیکی حلقه‌بسته بدون دینامیکی داخلی بوده و پایدار مجانبی فراگیر است.

در صورت انتخاب $\mathbf{K}_p = k_p\mathbf{I}$ و $\mathbf{K}_d = k_d\mathbf{I}$ مؤلفه‌های معادله (۳۷) از هم مستقل شده و پاسخ معادله به‌صورت کلی $\mathbf{q}_e(t) = c_q(t)\mathbf{q}_{e0}$ به دست خواهد آمد که به معنی چرخش حول محور ویژه اولیه است.

۳-۳- کنترلر پسگام

در طراحی کنترل با استفاده از روش پسگام یا گام به عقب، از برخی متغیرهای حالت میانی به‌عنوان ورودی کنترلی استفاده می‌شود. در این مسئله از نرخ چرخش بدنه به‌عنوان ورودی کنترلی مسئله سینماتیکی استفاده‌شده و بعد از به دست آمدن نرخ چرخش بدنه مطلوب در گام بعد، گشتاور کنترلی مناسب برای تعقیب نرخ چرخش بدنه مطلوب طراحی می‌شود. مشابه کنترل خطی، نرخ چرخش بدنه مطلوب فیدبک خطی از خطای کواترنیون در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین،:

$$\boldsymbol{\omega} := -\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e - \mathbf{e} \qquad (۴۰)$$

تابع لیاپانوف برای مرحله اول روش پسگام به‌صورت رابطه (۴۱) پیشنهاد می‌شود:

$$V_1 := \mathbf{q}_e^T\mathbf{q}_e + (1-q_{4e})^2 \qquad (۴۱)$$

در این صورت با توجه به ویژگی $\mathbf{q}_e^T[\mathbf{q}_e]^{\times}\mathbf{e} = 0$، مشتق لیاپانوف به‌صورت رابطه (۴۲) به دست می‌آید:

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{q}_e^T\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_e^T\mathbf{e} \qquad (۴۲)$$

با جایگذاری معادله (۴۰) در (۱) داریم:

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_p\dot{\mathbf{q}}_e - \mathbf{J}^{-1}[\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{u} \qquad (۴۳)$$

در مرحله دوم، تابع لیاپانوف به این صورت تعریف می‌شود:

$$V_2 = V_1 + \mathbf{e}^T\mathbf{e}/2 \qquad (۴۴)$$

درصورتی‌که ورودی کنترلی به‌صورت رابطه (۴۵) انتخاب شود:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J}\mathbf{K}_p\dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{J}\mathbf{q}_e - [\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\mathbf{K}_d\mathbf{e} \qquad (۴۵)$$

مشتق تابع لیاپانوف مرحله دوم عبارت است از:

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{q}_e^T\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e - \mathbf{e}^T\mathbf{K}_d\mathbf{e} \qquad (۴۶)$$

درصورتی‌که ماتریس‌های $\mathbf{K}_p$ و $\mathbf{K}_d$ مثبت معین باشند، تابع لیاپانوف منفی معین بوده و نقاط تعادل $\mathbf{q}_e = \mathbf{e} = \mathbf{0}$، پایدار مجانبی فراگیر است. با تعیین ورودی کنترلی،

معادلات حلقه بسته سیستم به‌صورت روابط (۴۷) تا (۴۹) استخراج می‌شود:

$$\dot{\mathbf{q}}_e = 0.5([\mathbf{q}_e]^{\times} - q_{4e}\mathbf{I})(\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e + \mathbf{e}) \quad (۴۷)$$

$$\dot{q}_{4e} = \mathbf{q}_e^T(\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e + \mathbf{e}) \quad (۴۸)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{q}_e - \mathbf{K}_d\mathbf{e} \quad (۴۹)$$

با خطی‌سازی معادله (۴۷) حول $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$، این معادله به‌صورت $2\dot{\mathbf{q}}_e = -(\mathbf{K}_p\mathbf{q}_e + \mathbf{e})$ نوشته می‌شود که با مشتق‌گیری از آن و جایگزینی $\dot{\mathbf{e}}$ از (۴۹) و $\mathbf{e}$ برحسب $\dot{\mathbf{q}}_e$، معادله مرتبه ۲ بردار $\mathbf{q}_e$ به این صورت به دست می‌آید:

$$2\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_p + 2\mathbf{K}_d)\dot{\mathbf{q}}_e + (1 + \mathbf{K}_d\mathbf{K}_p)\mathbf{q}_e = 0 \quad (۵۰)$$

در صورت انتخاب $\mathbf{K}_p = k_p\mathbf{I}$ و $\mathbf{K}_d = k_d\mathbf{I}$ علاوه بر اینکه مشابه روش خطی‌سازی پس‌خور می‌توان نشان داد که چرخش حول محور ویژه اولیه انجام خواهد شد، ریشه‌های معادله (۵۰) به‌صورت $r_{\pm} = (-(k_p + 2k_d) \pm \sqrt{\Delta})/4$ به دست می‌آید که $\Delta = -8 + (k_p - 2k_d)^2$. همچنین ارتباط بین ضریب میرایی و فرکانس طبیعی با بهره‌های کنترلی به‌صورت رابطه (۵۱) برقرار است:

$$2\xi\omega_n = 0.5k_p + k_d \;,\; \omega_n^2 = 0.5(1 + k_p k_d) \quad (۵۱)$$

بنابراین، بهره‌های کنترل به این صورت به دست می‌آید:

$$k_p = 2\xi\omega_n \mp \sqrt{2 + 4\omega_n^2(\xi^2 - 1)} \quad (۵۲)$$

$$k_d = \xi\omega_n \pm \sqrt{1/2 + \omega_n^2(\xi^2 - 1)} \quad (۵۳)$$

با توجه به‌شرط پایداری $k_p > 0$ و $k_d > 0$ باید:

$$4\xi^2\omega_n^2 > 2 + 4\omega_n^2(\xi^2 - 1) \Rightarrow \omega_n^2 > 0.5 \quad (۵۴)$$

با این قید، حداکثر زمان نشستی که می‌توان به دست آورد محدود می‌باشد. برای دستیابی به یک‌زمان نشست مطلوب که بیشتر از مقدار مقید شده بر اساس رابطه (۵۴) است، باید $\Delta > 0$. در این صورت زمان نشست (t_s)، از حل عددی معادله (۵۵) به دست می‌آید:

$$-r_{-}e^{r_{+}t_s} + r_{+}e^{r_{-}t_s} = 0.02(r_{+} - r_{-}) \quad (۵۵)$$

معادله (۵۵) بیان‌گر این است که در زمان نشست (t_s) خطای بردار کواترنیون به کمتر از 0.02 مقدار اولیه خواهد رسید. درصورتی‌که زمان نشست مطلوبی مدنظر باشد، از حل معادله (۵۵) و به ازای مشخص بودن یکی از ضرایب کنترلی، ضریب کنترلی دیگر به دست می‌آید. به‌طور مثال اگر k_p معلوم باشد، k_d از حل این معادله به دست می‌آید. برای سادگی k_p را صفر در نظر گرفته و با حل این معادله k_d مطلوب را تعیین می‌کنیم. البته در حالتی که $k_p = 0$، تابع لیاپانوف (۴۶) شبه معین خواهد بود. در این حالت طبق قضیه مجموعه نامتغیر، سیستم به سمت مجموعه نامتغیر همگرا خواهد شد. طبق معادله (۴۶) مشتق تابع لیاپانوف به ازای $\mathbf{e} = \mathbf{0}$، صفر است. طبق معادله (۴۹)، برای اینکه بر روی مسیر $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ باقی بماند، باید $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$؛ بنابراین، مجموعه نامتغیر این سیستم، فقط نقطه تعادل است؛ بنابراین، حتی در حالت $k_p = 0$ سیستم پایدار مجانبی است.

۴- شبیه‌سازی و ارائه نتایج

در این بخش، یک مثال طراحی و نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شود. فضاپیمای صلب شاتل با مشخصات ارائه‌شده در جدول **۱** در نظر گرفته‌شده است.

جدول (۱): مشخصات فضاپیما.

پارامتر	مقدار
جرم	۱۱۰ تن
طول (l)	۳۷ متر
ارتفاع (h)	۱۴ متر
عرض (w)	۲۳ متر
ممان اینرسی حول x_b ($\mathbf{J}_{11}$)	۱۲۹۰ تن مترمربع
ممان اینرسی حول y_b ($\mathbf{J}_{22}$)	۹۶۸۰ تن مترمربع
ممان اینرسی حول z_b ($\mathbf{J}_{33}$)	۱۰۱۰۰ تن مترمربع

در این جدول ممان اینرسی‌های اصلی ارائه‌شده است و ممان اینرسی‌های ضربی صفر فرض شده است. کواترنیون‌های اولیه، مقادیر $[\mathbf{q}_{e0}^T, q_{40}]^T = [1,0,0,0]^T$ در نظر گرفته‌شده است. بردار مطلوب، یک بردار با کسینوس‌های هادی $[c_1, c_2, c_3]^T = [1,1,\sqrt{2}]^T/2$ فرض شده است و تغییرات زاویه ویژه از صفر تا ۱۸۰ درجه در نظر گرفته‌شده است. عملکرد کنترلرهای مختلف برحسب تغییرات زاویه محور ویژه با هم مقایسه می‌شوند. زمان مطلوب تغییر جهت یا همان زمان نشست عدد $t_s = 40s$ در نظر گرفته‌شده است. با فرض پاسخ میرای بحرانی ($\xi = 1$) طبق مرجع [۳۷]، فرکانس طبیعی برحسب زمان نشست از رابطه $\omega_n = 5.84/t_s$ یا $\omega_n = 0.146$ به دست می‌آید؛ بنابراین،

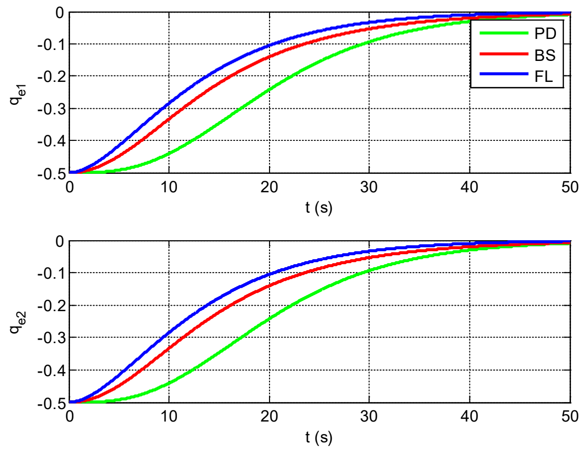
بهره‌های کنترلر خطی طبق رابطه (۳۲)، مقدار $k_p = 0.0426$ و $k_d = 0.292$ و برای کنترلر خطی‌سازی پس‌خور با k_d مشابه خطی و k_p نصف خطی تعیین می‌شود. برای کنترل پسگام نیز با در نظر گرفتن مقدار صفر برای k_p، مقدار k_d با حل معادله (۵۵) عدد $k_d = 5.1854$ به دست می‌آید.

برای بیشترین زاویه ویژه یعنی $\alpha = 180\deg$، چهار مؤلفه کواترنیون در شکل **۲** و شکل **۳**، زوایای اویلر در شکل **۴** و گشتاور کنترلی فرمان در شکل **۵** ارائه‌شده است. همان‌طور که در تاریخچه زمانی کواترنیون و زوایای اویلر مشاهده می‌شود، کمترین زمان خیز را کنترل خطی‌سازی‌شده پس‌خور (FL) و سپس کنترل پسگام (BS) و درنهایت کنترل خطی تناسبی-مشتق‌گیر (PD) دارد؛ اما از آن‌طرف همان‌طور که در شکل **۵** مشاهده می‌شود این کاهش زمان خیز و بالطبع آن زمان نشست، به بهای افزایش دستور گشتاور به‌خصوص در لحظات ابتدایی می‌باشد. به‌منظور مقایسه این سه کنترلر از لحاظ دستور شتاب، تلاش کنترلی به‌صورت $ce := \int_0^{t_f} \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\,dt$ تعریف می‌شود.

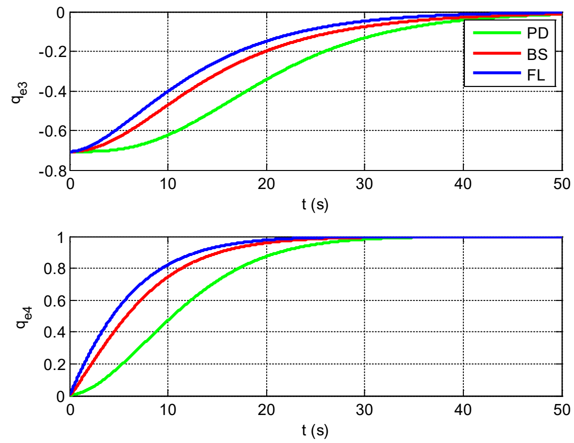
در شکل **۶** تغییرات زمان نشست و تلاش کنترلی هر سه کنترلر برحسب تغییرات زاویه ویژه ترسیم‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنها کنترلر FL می‌تواند زمان نشست مطلوب را در تمام زوایا تأمین کند که البته این نتیجه به بهای افزایش تلاش کنترلی است. سپس کنترلر BS دارای کمترین خطای زمان نشست و البته با تلاش کنترلی به‌مراتب کمتر از کنترلر FL است. عملکرد سه کنترل در زاویه ویژه اولیه ۱۸۰ درجه در جدول **۲** با هم مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خطای زمان نشست کنترلر PD ۲۲٪ و کنترلر BS ۱۷٪ است؛ بنابراین، از لحاظ خطای زمان نشست، کنترل BS ترجیح داده می‌شود. همچنین تلاش کنترلی FL و BS نسبت به PD به ترتیب ۱۰۰٪ و ۴۶٪ افزایش را نشان می‌دهد.

جدول (۲): مقایسه کنترلرها در $\alpha = 180\deg$.

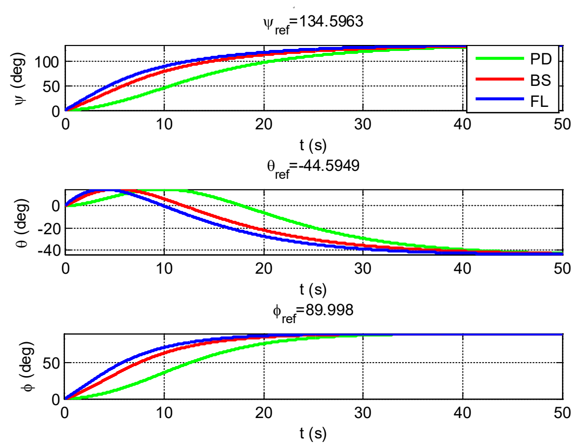
	PD	FL	BS
زمان نشست (ثانیه)	۴۹	۴۰	۴۷
تلاش کنترلی (m^2/s^3)	۱۳۶۹	۲۷۸۰	۲۰۰۵



شکل (۲): دو مؤلفه اول کواترنیون ($\alpha = 180\deg$).



شکل (۳): دو مؤلفه دوم کواترنیون ($\alpha = 180\deg$).



شکل (۴): زوایای اویلر ($\alpha = 180\deg$).

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با یک نمادسازی یکسان، سه کنترل خطی، غیرخطی مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور و غیرخطی مبتنی

بر پسگام برای کنترل وضعیت یک جسم صلب طراحی و تحلیل شد. تحلیل پایداری هر سه کنترلر به‌صورت پایداری مجانبی فراگیر با استفاده از تابع لیاپانوف برای دو کنترلر خطی تناسبی-مشتق‌گیر و غیرخطی پسگام و بر اساس تحلیل‌های خطی و تحلیل دینامیک داخلی برای کنترلر مبتنی بر خطی‌سازی پس‌خور نیز ارائه شد. بهره‌های کنترلی با خطی‌سازی کنترلرهای خطی و پسگام حول نقطه تعادل و برای کنترلر خطی‌سازی شده پس‌خور، بدون نیاز به خطی‌سازی برای دستیابی به یک زمان نشست مطلوب تعیین شد. نتایج نشان داد اگرچه کنترلر خطی‌سازی‌شده پس‌خور یک کنترلر فراگیر نیست ولیکن در تمام سناریوها، زمان نشست مطلوب را فراهم می‌کند. البته این نتیجه با هزینه افزایش تلاش کنترلی در مقایسه با دو کنترلر دیگر بوده است. در مقایسه بین کنترلر خطی و کنترلر پسگام، کنترلر پسگام دارای عملکرد بهتری در تأمین زمان نشست مطلوب دارد؛ بنابراین، به‌عنوان جمع‌بندی می‌توان گفت با توجه به عملکرد و تضمین پایداری مجانبی فراگیر کنترلر پسگام، این کنترلر گزینه مناسبی در طراحی کنترل وضعیت یک جسم صلب است. از کارهای آینده مقایسه پایداری و عملکرد مقاوم این سه کنترلر در حضور عدم قطعیت و اغتشاش می‌باشد.

۶- فهرست علائم

متغیرها

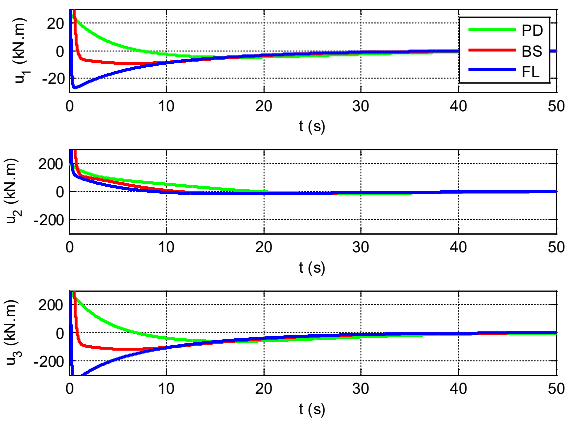
$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$	بردا سرعت زاویه‌ای
$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$	بردار گشتاور کنترلی
$\mathbf{J}$	ممان اینرسی
α	زاویه چرخش حول محور ویژه
$\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T$	بردار هادی محور ویژه
$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$	بخش بردار کواترنیون
q_4	بخش اسکالر کواترنیون
$\mathbf{I}$	ماتریس یکه ۳ در ۳
$k_p, \mathbf{K}_p$	بهره ماتریسی و اسکالر تناسبی
$k_d, \mathbf{K}_d$	بهره ماتریسی و اسکالر مشتق‌گیر
V	تابع لیاپانوف
ξ	ضریب میرایی
ω_n	فرکانس طبیعی
t_s	زمان نشست
ce	تلاش کنترلی

زیرنویس‌ها

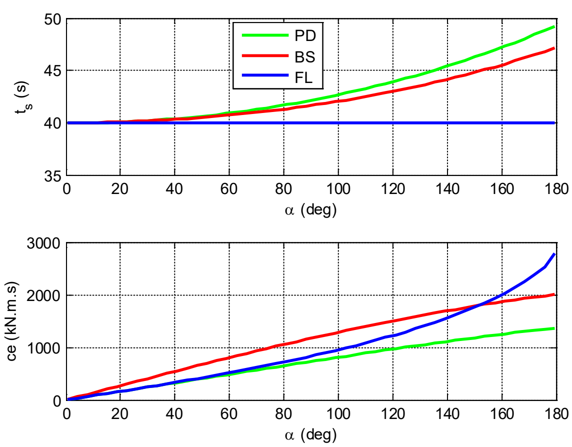
e	خطا
b	دستگاه بدنه
c	دستگاه فرمان

بالانویس‌ها

T	ترانهاده



شکل (۵): سه مؤلفه گشتاور ($\alpha = 180\,\mathrm{deg}$).



شکل (۶): زمان نشست و تلاش کنترلی برحسب α.

۷- مراجع

[1] Markley FL, Crassidis JL. Fundamentals of spacecraft attitude determination and control. New York, NY: Springer New York; 2014.

[2] Mortensen RE. A globally stable linear attitude regulator. International journal of control. 1968 1;8(3):297-302.

[3] Dwyer T. Exact nonlinear control of large angle rotational maneuvers. IEEE Transactions on Automatic Control. 1984;29(9):769-74.

[4] Wie B, Weiss H, Arapostathis A. Quarternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1989;12(3):375-80.

[5] Dwyer III TA. Exact nonlinear control of spacecraft slewing maneuvers with internal momentum transfer. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1986;9(2):240-7.

[6] Wie B, Barba PM. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1985;8(3):360-5.

[7] Wu CS, Chen BS. Attitude Control of Spacecraft: Mixed H/H∞ Approach. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2001;24(4):755-66.

[8] Carrington CK, Junkins JL. Optimal nonlinear feedback control for spacecraft attitude maneuvers. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1986;9(1):99-107.

[9] Wen JY, Kreutz-Delgado K. The attitude control problem. IEEE Transactions on Automatic control. 1991;36(10):1148-62.

[10] Lo SC, Chen YP. Smooth sliding-mode control for spacecraft attitude tracking maneuvers. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995;18(6):1345-9.

[11] Krstic M, Tsiotras P. Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft. IEEE Transactions on Automatic Control. 1999;44(5):1042-9.

[12] Wisniewski R. Linear time-varying approach to satellite attitude control using only electromagnetic actuation. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2000;23(4):640-7.

[13] Kuang J, Leung AY. H Feedback for Attitude Control of Liquid-Filled Spacecraft. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2001;24(5):1053-.

[14] Kim KS, Kim Y. Backstepping control of rigid spacecraft slew maneuver. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 2001: 4210.

[15] Bang H, Myung HS, Tahk MJ. Nonlinear momentum transfer control of spacecraft by feedback linearization. Journal of Spacecraft and Rockets. 2002;39(6):866-73.

[16] Show LL, Juang JC, Jan YW. An LMI-based nonlinear attitude control approach. IEEE transactions on control systems technology. 2003 29;11(1):73-83.

[17] Kim KS, Kim Y. Robust backstepping control for slew maneuver using nonlinear tracking function. IEEE Transactions on control systems technology. 2003;11(6):822-9.

[18] Bang H, Lee JS, Eun YJ. Nonlinear attitude control for a rigid spacecraft by feedback linearization. KSME International Journal. 2004;18:203-10.

[19] Luo W, Chu YC, Ling KV. H-infinity inverse optimal attitude-tracking control of rigid spacecraft. Journal of guidance, control, and dynamics. 2005;28(3):481-94.

[20] Kristiansen R, Nicklasson PJ. Satellite attitude control by quaternion-based backstepping. InProceedings of the 2005, American Control Conference, 2005:907-912, IEEE.

[21] Hu Q, Xiao B, Zhang Y. Adaptive backstepping based fault tolerant spacecraft attitude control under loss of actuator effectiveness. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference 2010: 8306.

[22] Ali I, Radice G, Kim J. Backstepping control design with actuator torque bound for spacecraft attitude maneuver. Journal of guidance, control, and dynamics. 2010;33(1):254-9.

[23] Yang Y. Analytic LQR design for spacecraft control system based on quaternion model. Journal of aerospace engineering. 2012;25(3):448-53.

[24] Yang Y. Quaternion-based lqr spacecraft control design is a robust pole assignment design. Journal of Aerospace Engineering. 2014;27(1):168-76.

[25] Navabi M, Hosseini MR. Spacecraft quaternion based attitude input-output feedback linearization control using reaction wheels. In2017 8th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST) 2017 Jun 19 (pp. 97-103). IEEE.

[26] Giuseppi A, Pietrabissa A, Cilione S, Galvagni L. Feedback linearization-based satellite attitude control with a life-support device without communications. Control Engineering Practice. 2019;90:221-30.

[27] Xie Y, Lei Y, Guo J, Meng B. Spacecraft Dynamics and Control. Singapore: Springer; 2022.

[28] Gołąbek M, Welcer M, Szczepański C, Krawczyk M, Zajdel A, Borodacz K. Quaternion Attitude Control System of Highly Maneuverable Aircraft. Electronics. 2022;11(22):3775.

[29] Septanto H, Kurniawan E, Suprijanto D. Quaternion feedback attitude control system design based on weighted–L2–gain performance. Results in Engineering. 2023 Mar 1;17:100717.

[30] Yuan JS. Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. IEEE Journal on Robotics and Automation. 1988;4(4):434-40.

[31] Bobrow F, Angelico BA, Martins FP, da Silva PS. The Cubli: modeling and nonlinear attitude control utilizing quaternions. IEEE Access. 2021 Aug 27;9:122425-42.

[32] Weiss H. Quaternion-based rate/attitude tracking system with application to gimbal attitude control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1993;16(4):609-16.

[33] Mazenc F, Yang S, Akella MR. Quaternion-based stabilization of attitude dynamics subject to pointwise delay in the input. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016;39(8):1697-705.

[34] Song C, Kim SJ, Kim SH, Nam HS. Robust control of the missile attitude based on quaternion feedback. Control Engineering Practice. 2006;14(7):811-8.

[35] Xia Y, Lu K, Zhu Z, Fu M. Adaptive back-stepping sliding mode attitude control of missile systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2013;23(15):1699-717.

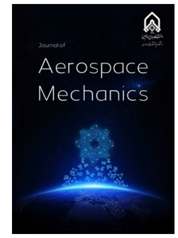
[36] Wu YJ, Zuo JX, Sun LH. Smooth backstepping sliding mode control for missile attitude system based on parameters online adjusting and estimating for square of disturbance upper bound. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2019;233(1):22-33.

[37] Ogata K. Modern control engineering. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall; 2010.

Journal of Aerospace Mechanics/ 2023/ Vol.19/ No.4/ 41-52

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1402.19.4.4.5



Analysis and Comparison of Linear, Feedback Linearized and Backstepping Controllers Based on Quaternion in Spacecraft Attitude Control

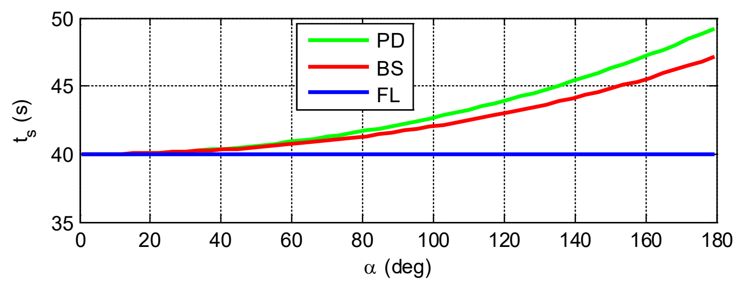
Mahdi Nikusokhan Lame

Ph.D., Aerospace Industry Organization, Tehran, Iran.

HIGHLIGHTS

- Nonlinear stability analysis based on the Lyapunov method.
- Selection of the controller gain matrices for the exact rotation about the initial eigen axis.
- Determining the controller gains based on the local linearized equations for the linear and backstepping controllers

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 27 February 2023

Received in revised form: 26 March 2023

Accepted: 3 May 2023

Available online: 7 May 2023

*Correspondence:

nikusokhan@gmail.com

How to cite this article:

M. Nikusokhan Lame. Analysis and comparison of linear, feedback linearized and backstepping controllers based on quaternion in spacecraft attitude control. Journal of Aerospace Mechanics. 2023; 19(4):41-52.

Keywords:

Attitude control

Quaternion

Linear control

Backstepping

Feedback Linearized

Spacecraft

ABSTRACT

In this paper, the attitude control design and analysis of a spacecraft as a rigid body based on three controllers of linear, nonlinear based on feedback linearization and backstepping is presented. According to the global presentation of the attitude based on quaternion parameters, these parameters have been used to derive the dynamic equations. Global asymptotic stability of linear and backstepping controllers is proved based on the Lyapunov method. The closed-loop stability of the feedback linearized controller is also proved by showing there are no internal dynamics. The controller gains are determined in linear and backstepping controllers based on linearized dynamics, derived from the local linearization around the equilibrium point. While, in the feedback linearized controller, gains are determined based on the global linearized dynamic equation. The performance of these three controllers in different scenarios is compared to each other. The results show that the feedback linearized controller can satisfy accurately the desired rise time. Whereas, the maximum error in achieving the desired rise time is 17% and 22% for backstepping and linear controllers, respectively. Of course, the control effort for the feedback linearized and backstepping is 100% and 46% more than the linear controller, respectively.