



Effect of Hydrostatic Pressure on the Free Vibrations of Hybrid Cylindrical Shell

Rashid Mohammadi¹, Mohammad Meskini ^{2*}, Heshmatollah Mohammadkhanlo ³

¹ M.Sc Student, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

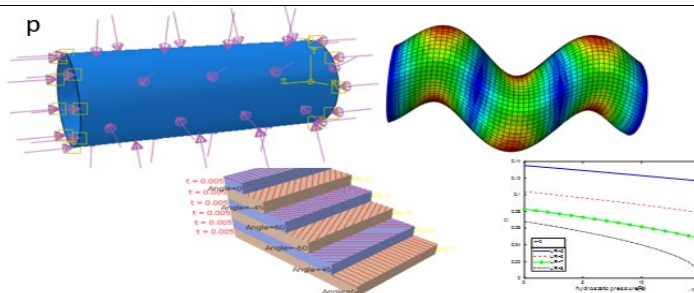
² Assistant Professor, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

³ Associate Professor, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- Increasing hydrostatic pressure decreases the natural frequency.
- Effect of composite material on natural frequency of hybrid cylindrical shell.
- Generalized Differential Quadrature method

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 29 February 2024

Received in revised form: 17 March 2024

Accepted: 11 May 2024

Available online: 18 June 2024

*Correspondence: m.meskini@ssau.ac.ir

How to cite this article:

R. Mohammadi, M. Meskini, H. Mohammadkhanlo. Effect of hydrostatic pressure on the free vibrations of hybrid cylindrical shell. *Journal of Aerospace Mechanics*. 2024; 20(2):87-103.

Keywords:

Hydrostatic pressure

Free vibrations

First order shear deformation theory

Hybrid

Cylindrical shells

ABSTRACT

Considering the increasing use of hybrid cylindrical shells in various industries, the free vibration analysis of these types of structures is very important. In this research, the free vibrations of the hybrid cylindrical shell under the influence of hydrostatic pressure have been analyzed and investigated. Investigating the hydrostatic pressure in hybrid shells is one of the important and required things for the optimal design of the structure, investigating the performance of the structure in different environmental conditions, bearing and resistance to pressure, etc. The boundary conditions for the cylindrical shell have been considered as fixed, free and simple, the equations governing the structure of the hybrid cylindrical shell are based on the displacement field and the stress and strain relations in matrix form using the first-order shear deformation theory of the shell and Hamilton's principle obtained and using generalized differential quadratic numerical method, the governing equations of the structure were solved and the effect of fiber angle, composite materials, hydrostatic pressure, composite to metal ratio, length to radius and thickness to radius of the cylinder on the natural frequency of the shell was investigated and analyzed. Numerical results have been compared and validated with the results of the research. The results show that the hybrid shell with the distribution of composite materials and in a specific volume ratio shows better behavior against different hydrostatic pressure.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.



اثر فشار هیدرو استاتیک بر روی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هیبریدی

رشید محمدی^۱، محمد مسکینی^{۲*}، حشمت‌الله خانلو^۳ ID

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

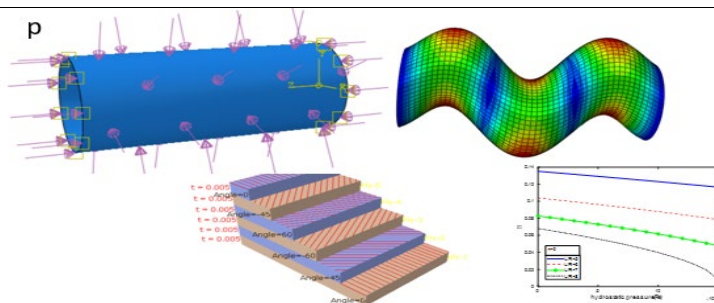
^۲ استادیار، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

^۳ دانشیار، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

برجسته‌ها

- افزایش فشار هیدرو استاتیک فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد.
- تأثیر ماده کامپوزیتی در فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هیبریدی
- روش دیفرانسیلی مربعات تعمیم‌یافته

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۲۲

ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۲۹

*نویسنده مسئول:

m.meskini@ssau.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

فشار هیدرو استاتیک

ارتعاشات آزاد

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

هیبرید

پوسته‌های استوانه‌ای

چکیده

با توجه به استفاده روزافزون از پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی در صنایع مختلف تحلیل ارتعاشات آزاد این نوع سازه‌ها دارای اهمیت زیادی می‌باشد. در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) تحت تأثیر فشار هیدرو استاتیکی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. بررسی فشار هیدرو استاتیکی در پوسته‌های هیبریدی به‌عنوان یکی از موارد مهم و موردنیاز برای طراحی بهینه سازه، بررسی عملکرد سازه در شرایط مختلف محیطی، تحمل و مقاومت در برابر فشار و ... هست. هدف این تحقیق، بررسی تغییرشکل و رفتار سازه تحت فشار هیدرو استاتیکی مختلف است. شرایط مرزی را برای پوسته استوانه‌ای به‌صورت گیردار، آزاد و ساده در نظر گرفته شده است، معادلات حاکم بر ساختار پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر اساس میدان جابجایی و روابط تنش و کرنش به‌صورت ماتریسی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها و اصل همپلتون به‌دست‌آمده و با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، معادلات حاکم بر سازه حل گردیده و تأثیر زاویه الیاف، مواد کامپوزیتی، فشار هیدرو استاتیکی، نسبت کامپوزیت به فلز، طول به شعاع و ضخامت به شعاع استوانه بر روی فرکانس طبیعی پوسته بررسی و تحلیل شده است. نتایج عددی با نتایج تحقیقات انجام‌شده مورد مقایسه و صحت سنجی قرار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که پوسته هیبریدی با توزیع مواد مرکب و در نسبت حجمی خاص، رفتار بهتری در برابر فشار هیدرو استاتیکی مختلف نشان می‌دهد.

۱- مقدمه

پوسته‌های هیبریدی سازه‌هایی هستند که از ترکیب مواد مختلف با خواص متفاوت و با استفاده از ساختارهایی مانند پوسته شکل ساخته می‌شوند. این ساختارها معمولاً از ترکیب مواد فلزی و غیرفلزی (مانند فیبرهای کربنی، فیبرهای شیشه‌ای یا مواد کامپوزیتی دیگر) تشکیل شده و هدف از آن‌ها بهبود خواص مکانیکی و سازگاری با محیط است. مزایای استفاده از پوسته‌های هیبریدی ترکیب و بهبود خواص مکانیکی، بهینه‌سازی وزن با حفظ مقاومت، انعطاف‌پذیری طراحی و ... است. پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی به دلیل خصوصیات مکانیکی، سبکی و مقاومت در برابر فشار، در صنایع متنوعی از جمله صنایع هوافضا، صنایع دفاعی، خودروسازی، خطوط لوله انتقال، صنایع دریایی، انرژی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ردی ولیو [۱] با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییرشکل برشی، پوسته‌های چندلایه الاستیک را بررسی کردند، این تئوری حالت اصلاح‌شده تئوری پوسته سندرز است و توزیع سهمی‌وار کرنش برشی عرضی در سرتاسر ضخامت پوسته را در نظر می‌گیرد. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که نظریه مرتبه بالاتر از نظریه مرتبه اول دقیق‌تر است. در سال ۱۹۹۶ راند و استاوسکی [۲] پاسخ و فرکانس‌های ویژه را برای پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای دوار و تحت شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیقاتشان از تئوری تقریب لاو و روش گالرکین استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که سفتی محیطی یکی از مهم‌ترین عوامل در محاسبه فرکانس‌های طبیعی است. در سال ۱۹۹۸ لام و لوی [۳] اثر شرایط مرزی را بر یک پوسته استوانه‌ای دوار جدار نازک مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در پژوهش خود از تئوری لاو و روش گالرکین استفاده کردند و نتایج را با منابع دیگر تطبیق داده‌اند. پوسته مورد مطالعه دارای آرایش لایه‌ای [0 90 0] است. با افزایش تعداد موج‌های محیطی، فرکانس‌ها در شرایط مرزی مختلف به هم نزدیک می‌شوند، همچنین با افزایش موج‌های محیطی فرکانس‌ها ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند. در سال ۱۹۹۸ لی و کیم [۴] ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای در حال چرخش با تقویت‌کننده‌های متعامد مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند، آن‌ها در تحقیقاتشان

از روش انرژی استفاده کردند. آن‌ها اثر پارامترهایی از قبیل نسبت ارتفاع به عرض تقویت‌کننده‌ها، ضخامت پوسته و نسبت طول به شعاع پوسته را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند تقویت‌کننده‌ها فرکانس طبیعی پوسته‌های کامپوزیتی را افزایش می‌دهند. در سال ۱۹۹۸ سوزوکی، شیکانای و چینو [۵] بررسی‌های عددی بر روی مخازن استوانه‌ای با سطح مقطع متقارن لمینت و اپوکسی تقویت‌شده در جهت بافت الیاف انجام دادند. با استفاده از روش مینیمم لاگرانژین فرکانس طبیعی، شکل مودها و توزیع گشتاور خمشی را به دست آوردن و ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند. نگ و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۳ به بررسی کردن تأثیر پارامترهای مختلف بر روی ویژگی‌های فرکانس پوسته‌های مخروطی چندلایه کامپوزیتی پرداختند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که ویژگی‌های مواد کامپوزیتی تأثیر قابل توجهی بر ویژگی‌های فرکانسی دارد، که این تأثیر برای شماره مود محیطی بزرگ‌تر، بیشتر اهمیت پیدا می‌کند. جعفری و باقری [۷] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک تقویت‌شده با رینگ را بررسی کردند که در آن فواصل بین رینگ‌ها و نیز خروج از مرکز آن‌ها متغیر بود. روش آن‌ها برای بهینه‌سازی مسئله غیریکنواخت پوسته‌های استوانه‌ای با ترکیبات شرایط مرزی مختلف مناسب بود. آن‌ها دریافتند با بهینه‌سازی مقادیر پارامترهای توزیع در تقویت‌کننده‌ها با جرم ثابت، فرکانس‌های طبیعی را می‌توان به‌طور قابل توجهی افزایش داد. از اولین فعالیت‌های تحقیقاتی در حوزه بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌های مشبک کامپوزیتی از نوع استوانه‌ای می‌توان به تحقیق گلفمن [۸] در سال ۲۰۰۷ اشاره نمود. این محقق با محاسبه فرکانس طبیعی پوسته مشبک کامپوزیتی استوانه‌ای ساخته‌شده از الیاف کربن و رزین اپوکسی به بررسی پایداری دینامیکی این سازه با در نظر گرفتن خواص میرایی سازه پرداخت. گلفمن خرابی مخزن سوخت را با نیروهای محاسبه‌شده از معادلات حرکتی که ضرایب میرایی و امتدادهای خطی ناشی از تغییرات بارهای ضربه‌ای را در برمی‌گیرد، پیش‌بینی کرد. در سال ۲۰۱۲ خلیلی و همکارانش [۹] به بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مرتبه بالا پرداختند. لانگ ژائو [۱۰] در

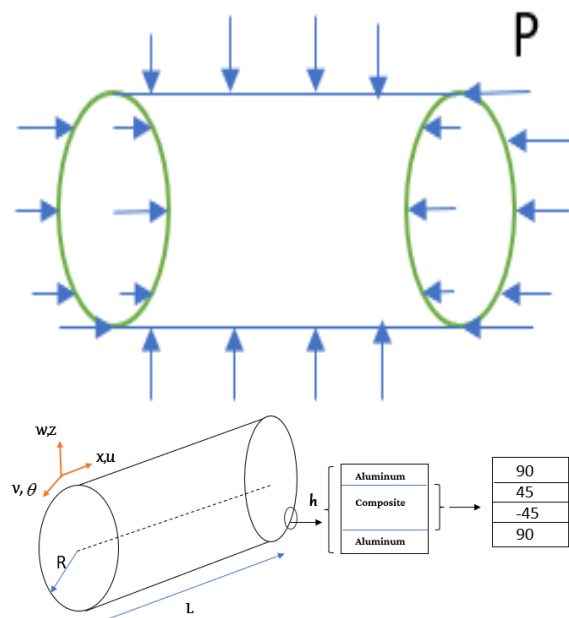
کاهش می‌یابد اما نسبت فرکانس غیرخطی به خطی افزایش می‌یابد. در مقابل، با افزایش سختی اولیه، فرکانس‌های طبیعی پل‌ها افزایش می‌یابد اما نسبت فرکانس غیرخطی به خطی کاهش می‌یابد. کین و همکاران [۱۵] به تجزیه و تحلیل تأثیر شرایط مرزی، نیروی کوریولیس و اثر گریز از مرکز به وجود آمده توسط چرخش بر روی ویژگی‌های ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای پرداختند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد طول پوسته در مقایسه با ضخامت و شعاع بیرونی دیسک، تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی دارد، همچنین تغییرات سفتی فنرهای چرخشی کمترین تأثیر را بر مدهای متقارن دارد. لویاتین و همکارانش [۱۶] در سال ۲۰۱۷ با استفاده از تجزیه فوریه و روش گالرکین به بررسی یک‌راه حل تحلیلی برای مشکل کماتش برای یک پوسته استوانه‌ای مرکب که انتهای آن توسط دیسک‌های صلب بسته شده و تحت فشار هیدرو استاتیکی قرار گرفته پرداختند. کیانی و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۱۸ با توجه به نظریه پوسته تغییرشکل برشی مرتبه اول و نظریه دانل، فرکانس‌های طبیعی در پل‌های مخروطی کامپوزیتی ساخته شده از ماتریس پلیمری تقویت شده یکنواخت را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نتایج تحقیق نشان داد افزایش کسر حجمی CNT در پل‌های مخروطی، فرکانس طبیعی آن را به دلیل سفتی بالاتر CNT ها در مقایسه با ماتریس پلیمری افزایش می‌دهد. در سال ۲۰۲۱ شن [۱۸] کماتش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی کربن/اپوکسی تحت فشار هیدرو استاتیکی را مورد تحقیق و بررسی قرار داد. او با استفاده از روش گالرکین، فشار بحرانی، پاسخ کرنش و مسیر ترک را بررسی کرد. آن‌ها یک تفاوت نسبی $3/47\%$ بین فشار کماتش بحرانی محاسبه شده از تجزیه و تحلیل عددی و داده‌های تجربی مشاهده کردند. شاهگلین و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۲۲ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی ساندویچی با هسته شبکه را به صورت عددی و تجربی مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد فرکانس طبیعی پوسته کامپوزیتی ساندویچی به ترتیب $1/6$ و $4/68$ برابر فرکانس طبیعی پوسته‌های تقویت شده و تقویت نشده است. جیانگ وو و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۲۳ بر روی ویژگی‌های

سال ۲۰۱۳ با استفاده از فرضیه لیروایز فرکانس‌های طبیعی و رفتارهای ارتعاشی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصله را با نتایج تحلیل تجربی مقایسه نمودند و با ترکیب روش‌های تحلیلی و تجربی به پیش‌بینی رفتار ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های چندلایه پرداختند. در سال ۲۰۱۴ همت نژاد و رحیمی [۱۱] ارتعاشات آزاد استوانه تقویت شده کامپوزیتی را بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار دادند. ایشان نتایج حل تحلیلی را با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار المان محدود اعتبارسنجی نموده‌اند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد به طور کلی فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده بیشتر است، اما با افزایش ضخامت تأثیر تقویت کننده‌ها کاهش یافته و برای یک ضخامت مشخص، حضور تقویت کننده اثر چندانی روی فرکانس ندارد. در سال ۲۰۱۶ تیولو و همکاران [۱۲] به بررسی تغییرشکل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با سفتی متغیر پرداختند. آن‌ها در تحقیق خود برای دست‌یابی به مزیت‌های کامل تغییر سفتی پوسته‌ها با تغییر جهت‌گیری فیبرها، پاسخ آن‌ها به انواع مختلف بارگذاری‌های خارجی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند شرایط مرزی نیز نقش مهمی در توزیع تنش و رفتار تغییرشکل پوسته مخروطی بریده شده دارد، همچنین با یک لبه بریده ثابت، تنش کششی با دور شدن از لبه بریده افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۷ زارعی و رحیمی [۱۳]، به بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های کامپوزیتی استوانه‌ای و مخروطی تحت شرایط مرزی مختلف پرداختند و معادلات مربوطه را بر مبنای تئوری استخراج نمودند. آن‌ها اثرات تغییرات پارامترهای هندسی را نیز بر فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که برای ضخامت‌های پایین فرکانس طبیعی سازه تقویت شده نسبت به سازه بدون تقویت کننده بیشتر است زیرا در ضخامت‌های پایین سرعت افزایش سفتی بیشتر از سرعت افزایش جرم سازه است. شن و یانگ [۱۴]، در سال ۲۰۱۷ درباره تأثیر خواص گرادیان مواد، تغییرات دما، محتوای آب و پارامترهای هندسی پوسته بر روی ویژگی‌های ارتعاش آن تحقیق و بررسی انجام دادند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش دما، فرکانس‌های طبیعی پل‌ها

طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک با سایر مقالات و همچنین فرکانس طبیعی پوسته هیبریدی با نرم‌افزار المان محدود آباکوس صحه‌گذاری شده است، سپس اثر فشار هیدرو استاتیکی را در معادلات وارد کرده و تأثیر آن روی فرکانس طبیعی پوسته هیبریدی بررسی شده است.

۲- معادلات حاکم

پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز با مختصات استوانه‌ای در شکل ۱ نشان داده شده است. محورهای u ، v و w به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی‌های طولی، محیطی و شعاعی در طول مختصات استوانه‌ای α ، θ و z می‌باشند. ماده تشکیل‌دهنده بخش کامپوزیتی از کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و آرامید/اپوکسی، همچنین قسمت فلزی از جنس آلومینیوم است که تحت فشار هیدرو استاتیکی قرار گرفته است.



شکل (۱): پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) تحت فشار هیدرو استاتیکی.

۲-۱- میدان جابجایی

میدان جابجایی برای پوسته استوانه‌ای با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت معادله (۱) بیان می‌گردد.

ارتعاش-اکوستیک آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای چندلایه پر از مایع، تحت فشار هیدرو استاتیک اولیه پرداختند. آن‌ها از تئوری لایه برای به دست آوردن معادلات استفاده کردند. نتایج به دست‌نشان داد که شرایط مرزی و زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی تأثیر دارند همچنین افزایش فشار هیدرو استاتیک داخلی باعث افزایش سفتی و فرکانس طبیعی می‌شود. در سال ۲۰۲۳ جی چو [۲۱] به تجزیه و تحلیل ارتعاشات پنل‌های استوانه‌ای متخلخل تقویت‌شده با صفحه‌های گرافن پرداخت. چو از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول با روش المان طبیعی استفاده کرد. او دریافت که ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای تحت تأثیر الگوی توزیع و تخلخل است. تانر کوسکن و همکاران [۲۲] به بررسی پاسخ ارتعاشی مودال و تصادفی با پروفیل‌های گنبدی تحت فشار داخلی ۵۰، ۱۰۰ و ۱۵۰ بار به‌صورت عددی پرداختند و اثرات شدت فشار داخلی بر ویژگی‌های دینامیکی شناسایی شد. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد، شدت فشار داخلی فرکانس طبیعی به فرکانس‌های بالاتر منتقل می‌کند. منگ و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۲۴ به بررسی عددی بر روی خواص ارتعاش آزاد و تصادفی پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی پرداختند. آن‌ها از روش ریلی-ریتز استفاده کردند و صحت سنجی نتایج به‌دست‌آمده را با المان محدود مقایسه کردند. تأثیر ابعاد هندسی و خواص مواد را بر فرکانس‌های ذاتی و پاسخ‌های تصادفی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی سه‌بعدی بررسی کردند.

با توجه به پژوهش‌های انجام‌شده در سال‌های اخیر، کارهای تحقیقاتی در حوزه پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی متشکل از کامپوزیت - فلز عمدتاً به رفتار ارتعاشی بدون در نظر گرفتن تأثیر فشار هیدرو استاتیک بر روی فرکانس طبیعی است. در این پژوهش ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد تحت فشار هیدروستاتیک با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پوسته و روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بررسی و تحلیل شده است که استخراج معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای هیبریدی با استفاده از اصل همیلتون انجام‌شده است. در ابتدا برای اطمینان از درستی نتایج فرکانس

با اضافه کردن مشخصات برشی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، روابط تنش و کرنش برای پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۴) است:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ماتریس $[\bar{Q}]$ همان ماتریس سختی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \quad (5) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q)m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \end{aligned}$$

و داریم:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} = \frac{\nu_{21}E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (6) \end{aligned}$$

$Q_{66} = G_{12}$
 $Q_{44} = G_{23}$
 $Q_{55} = G_{13}$
 E_1 و E_2 مدول‌های الاستیسیته، G_{12} ، G_{13} و G_{23} مدول‌های برشی و ν_{21} و ν_{12} ضرایب پواسون هستند.

۲-۲- اصل همیلتون

برای استخراج معادلات حاکم و به دست آوردن شرایط مرزی از روش انرژی و اصل همیلتون [۲۵] استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z\varphi_x \quad (1) \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z\varphi_\theta \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varphi_\theta &= \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

که در آن u_0 ، v_0 و w_0 تغییر مکان‌های لایه میانی پوسته، z موقعیت نقطه مورد بررسی نسبت به لایه میانی φ_x و φ_θ چرخش حول محورهای x و θ می‌باشد.

با داشتن میدان جابجایی برای پوسته در تئوری برشی مرتبه اول در دستگاه استوانه‌ای (روابط ۱) و روابط سینماتیکی برای مؤلفه‌های میدان کرنش‌ها به صورت روابط (۲) است: [۲۴]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x \quad (2) \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + zk_{x\theta} \\ \varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \end{aligned}$$

در این روابط ε_x و ε_θ به ترتیب، کرنش‌ها در جهت‌های محوری و محیطی و $\varepsilon_{x\theta}$ ، ε_{xz} ، $\varepsilon_{\theta z}$ کرنش‌های برشی در فاصله z از سطح میانی می‌باشند. ε_x^0 ، ε_θ^0 ، $\gamma_{x\theta}^0$ ، γ_{xz}^0 و $\gamma_{\theta z}^0$ کرنش‌های سطح میانی و k_x ، k_θ و $k_{x\theta}$ انحناهای سطح میانی می‌باشند و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3) \\ \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^0 &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z}^0 &= \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \\ k_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ k_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \\ k_{x\theta} &= \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \end{aligned}$$

که در این روابط u ، v و w به ترتیب، مؤلفه‌های تغییر مکان لایه میانی پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند و φ_x و φ_θ به ترتیب شیب در صفحه $x-z$ و شیب در صفحه $\theta-z$ می‌باشند.

$$\int \rho(1, z, z^2) dz = I_0, I_1, I_2 \quad (۲۱)$$

که I و Q, M, N به ترتیب نشان‌دهنده نیروی منتجه، ممان منتجه، نیروی برشی و ممان اینرسی بوده است، Ks بیانگر ضریب تصحیح برشی بوده که برابر با مقدار ۵/۶ است. با قراردادن روابط جابجایی و روابط تنش-کرنش در معادلات تعادل روابط زیر به دست آمده است.

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + A_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \quad (۲۲) \\ & B_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) + A_{16} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \\ & B_{16} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + \\ & A_{26} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + A_{66} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + B_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ & I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + A_{26} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \quad (۲۳) \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + B_{26} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + \\ & A_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + \\ & A_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right) + B_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + A_{22} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + B_{22} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) + A_{44} k_s \left(\frac{1}{R} \varphi_\theta + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} v \right) + A_{45} k_s \left(\frac{1}{R} \varphi_x + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \\ & I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \quad (۲۴) \\ & A_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - A_{11} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A_{44} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - B_{11} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - A_{12} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{w}{R^2} \right) - B_{12} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) - A_{16} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ & B_{16} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \right) + N_x^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & N_\theta^0 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + B_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \quad (۲۵) \\ & B_{16} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D_{16} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + \\ & B_{26} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \\ & + B_{66} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + D_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + A_{55} k_s \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\ & A_{45} k_s \left(\varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \right) - I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ & I_{02} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta \partial x} + B_{22} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \right. \quad (۲۶)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (۷)$$

انرژی کرنشی [۲۶] و [۲۷] پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} R d\theta dx \quad (۸)$$

$$\delta U = \int_v (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dv \quad (۹)$$

انرژی جنبشی [۲۸] پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۱۰) است.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{h}{2}} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dz dx d\theta \quad (۱۰)$$

تغییرات انرژی جنبشی برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta T = \int_v \rho v \delta v dv = \int_v \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\delta w}{\partial t} \right) dv \quad (۱۱)$$

با فرض اینکه فشار هیدرو استاتیک فشار یکنواخت وارد شده از طرف سیال به اطراف استوانه به مقدار p باشد، کار خارجی برای نیروهای وارد شده به بدنه استوانه به شکل زیر محاسبه می‌شود [۲۹]. N_x^0 نیروی شعاعی و N_θ^0 نیروی محوری است.

$$W_{\text{external}} = \frac{1}{2} N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} N_\theta^0 \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} N_x^0 &= \frac{-PR}{2} \\ N_\theta^0 &= -PR \end{aligned}$$

معادلات تعادل به دست آمده از اصل همیلتون:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (۱۳)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} Q_{\theta z} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (۱۴)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + N_x^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & N_\theta^0 \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial v}{R \partial x} \right) + N_\theta^0 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۱۵) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xz} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (۱۶)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_{\theta z} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (۱۷)$$

تمامی نیروها و ممان‌هایی که بر یک چند لایه استوانه‌ای وارد می‌شود، به صورت رابطه (۲۱) است.

$$\int \sigma_i dz = N_i, \quad (i = x, \theta, x\theta) \quad (۱۸)$$

$$\int \sigma_i z dz = M_i, \quad (i = x, \theta, x\theta) \quad (۱۹)$$

$$\int k_s \sigma_i dz = Q_i, \quad (i = xz, \theta z) \quad (۲۰)$$

تابع نسبت به یک جهت مختصاتی به صورت مجموع وزنی مقادیر آن تابع در برخی نقاط مشخص استوار است.

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

در رابطه ۲۸، $f_x(x_i, t)$ مشتق تابع f نسبت به جهت مختصاتی x در نقطه x_i است و $C_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول هستند. نکته اساسی در این روش، نحوه تعیین ضرایب وزنی مناسب است. محققین مختلفی برای تعیین این ضرایب به شیوه مناسب تلاش کرده‌اند. بلمن و همکارانش [۳۰] با استفاده از دو تابع آزمون مختلف، دو شیوه برای تعیین این ضرایب پیشنهاد کردند که هر یک با مشکلاتی همراه بود. در سال ۲۰۱۱ بوچکارو و متونکو [۲۸] برای برطرف کردن این مشکلات، رابطه جدیدی برای ضرایب وزنی ارائه کردند، اما استفاده از این روش برای مشتقات مراتب بالاتر با دشواری‌هایی همراه بود. شو با استفاده از تقریب چندجمله‌ای و آنالیز خطی فضای برداری روش مربعات تفاضلی را گسترش داده و روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته را ارائه کرد [۳۱]. وی با بکارگیری روش GDQ ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری پوسته کلاسیک لاو مطالعه کرد [۳۲]. روشی که شو ارائه کرد، تمامی روش‌های قبل را شامل می‌شود. در روش GDQ که در کتاب شو آمده از توابع درون‌یابی لاگرانژ برای ضرایب وزنی و به دست آوردن رابطه بازگشتی، که از نقاط شبکه و محل قرارگیری نقاط نمونه مستقل است، استفاده می‌شود.

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, & i \neq j \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)}, & i = j \end{cases} \quad (29)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

که در رابطه (۳۱) داریم:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (30)$$

از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته می‌توان برای تقریب مشتق مراتب بالاتر نیز استفاده کرد. برای مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)$ در نقطه x_i به صورت رابطه (۳۳) بیان می‌گردد.

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} D_{22} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + B_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & B_{26} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + D_{26} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + B_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) - A_{55} k_s \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - A_{44} k_s \left(\varphi_\theta + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \right) - I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

ضرایب A_{ij} ، B_{ij} و C_{ij} در آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int \bar{Q}_{ij} dz = A_{ij} \quad (27)$$

$$\int z \bar{Q}_{ij} dz = B_{ij}$$

$$\int z^2 \bar{Q}_{ij} dz = D_{ij}$$

شرایط مرزی مختلف برای پوسته استوانه‌ای در دو انتهای آن به صورت زیر از اصل همیلتون به دست می‌آید.

$$V = W = N_x = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad \text{شرایط مرزی ساده}$$

$$N_x = N_{x\theta} = M_x = M_{x\theta} = \varphi_{xz} = 0 \quad \text{شرایط مرزی آزاد}$$

$$U = V = W = \varphi_x = \varphi_\theta = 0 \quad \text{شرایط مرزی گیردار}$$

۳- روش حل معادلات (روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته)

در سال‌های اخیر روش مربعات دیفرانسیلی به دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران علوم مختلف قرار گرفته است. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بر اساس آنالیز تقریب چندجمله‌ای مرتبه بالا و همچنین تجزیه و تحلیل فضای برداری خطی استوار است. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری هست که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسئله خاصی مربوط نیست و تنها به نقاط شبکه و مرتبه مشتق بستگی دارد. در این روش نقاط شبکه به صورت اختیاری و بدون هیچ محدودیتی انتخاب شده است. روش مربعات دیفرانسیلی، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل جزئی است که علی‌رغم استفاده از تعداد گره کم، از دقت بالایی برخوردار است. اساس این روش بر تخمین مشتق جزئی یک

$$\begin{cases} u(x, \theta, t) = U(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ v(x, \theta, t) = V(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ w(x, \theta, t) = W(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \varphi_x(x, \theta, t) = \varphi_x(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \varphi_\theta(x, \theta, t) = \varphi_\theta(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (35)$$

که در آن ω فرکانس طبیعی پوسته و n شمارنده موج محیطی است.

۴-۱- گسسته سازی معادلات حرکت با استفاده از روش GDQM:

می‌توان با جایگذاری روابط (۳۵) در روابط (۲۱) الی (۲۶) و استفاده از روش GDQM ماتریس K را به صورت روابط (۳۶) الی (۴۰) به دست آورد.

$$K_{11} = A_{11}U^{(2)} - A_{16}\frac{2n}{R}U^{(1)} - A_{66}\frac{n^2}{R^2}U + I_0\omega^2U \quad (36)$$

$$K_{12} = A_{12}\frac{n}{R}V^{(1)} + A_{16}V^{(2)} + A_{66}\frac{n}{R}V^{(1)} - A_{26}\frac{n^2}{R^2}V$$

$$K_{13} = A_{12}\frac{1}{R}W^{(1)} - A_{26}\frac{n}{R^2}W$$

$$K_{14} = B_{11}\varphi_x^{(2)} - B_{16}\frac{2n}{R}\varphi_x^{(1)} - B_{66}\frac{n^2}{R}\varphi_x + I_1\omega^2\varphi_x$$

$$K_{15} = B_{12}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} + B_{16}\varphi_\theta^{(2)} + B_{66}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}\varphi_\theta$$

$$K_{21} = A_{16}U^{(2)} - A_{26}\frac{n^2}{R^2}U - A_{66}\frac{n}{R}U^{(1)} - A_{12}\frac{n}{R}U^{(1)} \quad (37)$$

$$K_{22} = A_{66}V^{(2)} - A_{26}\frac{2n}{R}V^{(1)} - A_{22}\frac{n^2}{R^2}V - A_{44}k_s\frac{1}{R^2}V + I_0\omega^2V$$

$$K_{23} = A_{26}\frac{1}{R}W^{(1)} - A_{22}\frac{n^2}{R}W - A_{44}k_s\frac{n}{R^2}W + A_{45}k_s\frac{1}{R}W$$

$$K_{24} = B_{16}\varphi_x^{(2)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}\varphi_x - B_{66}\frac{n}{R}\varphi_x^{(1)} - B_{12}\frac{n}{R}\varphi_x^{(1)} + A_{45}k_s\frac{1}{R}\varphi_x$$

$$K_{25} = B_{26}\frac{2n}{R}\varphi_\theta^{(1)} + B_{66}\varphi_\theta^{(2)} - B_{22}\frac{n^2}{R^2}\varphi_\theta + A_{55}k_s\frac{1}{R}\varphi_\theta + I_1\omega^2\varphi_\theta$$

$$K_{31} = -A_{12}\frac{1}{R}U^{(1)} - A_{26}\frac{n}{R^2}U \quad (38)$$

$$K_{32} = -A_{54}\frac{1}{R}V^{(1)} - A_{55}\frac{n}{R^2}V - A_{22}\frac{n}{R^2}V - A_{26}\frac{1}{R}V^{(1)}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

که در آن C_{ij} ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه m ، N تعداد نقاط شبکه و x_i مختصات نقطه i ام است.

رابطه کلی برای ضرایب وزنی تقریب مشتقات مراتب بالاتر مطابق رابطه (۳۲) است:

$$C_{ij}^{(n)} = \begin{cases} n \left(C_{ij}^{(1)} C_{ii}^{(n-1)} - \frac{C_{ii}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), & i \neq j \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(n)}, & i = j \end{cases} \quad (32)$$

$$n = 2, 3, \dots, N - 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N;$$

با توجه به قانون مربعیات رابطه (۳۱) ماتریسی به فرم رابطه (۳۳) است:

$$\{f(x)^n\}_j = [C^{(n)}]\{f(x)\}_j \quad (33)$$

هرچند انتخاب مختصات گره‌ها در این روش کاملاً اختیاری است و هیچ محدودیتی ندارد، اما نحوه توزیع گره‌ها بر پایداری نتایج و روند همگرایی آن‌ها تأثیرگذار است. شو نشان داد که توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت یا همان چبیشف-گوس-لوباتو که به انحصار توزیع چبیشف نامیده می‌شود، نتایج پایدارتری نسبت به توزیع یکنواخت خواهد داشت. این توزیع با تعداد گره‌های کم و محاسبات کمتر قادر است جواب‌هایی با دقت بیشتر به دست بیاورد. تراکم نقاط در این نوع توزیع (چبیشف-گوس-لوباتو) در نقاط نزدیک به مرزها بیشتر از نقاط میانی بوده و همگرایی در نقاط پایین‌تر اتفاق خواهد افتاد. همچنین در این تحقیق از تعداد نقاط ۱۵ در شبکه انتخابی صورت گرفته بدین علت است که در این تعداد نقاط، نتایج به دست آمده به همگرایی رسیده است و بعد از آن تغییراتی در نتایج به دست آمده وجود نداشته است. نقاط نمونه چبیشف-گوس-لوباتو شامل:

$$X_i = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) \quad (34)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

در این مقاله توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو انتخاب شده و از روش GDQM استفاده شده است.

۴- حل معادلات پوسته استوانه‌ای با استفاده از GDQM:

میدان جابجایی در پوسته استوانه‌ای بر اساس روش GDQM به صورت رابطه (۳۵) بیان می‌شود.

خواص مکانیکی آلومینیوم، شیشه/اپوکسی، آرامید/اپوکسی و کربن/اپوکسی در جدول ۱ آمده است.

۵-۱- اعتبارسنجی نتایج

برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، با استفاده از روش تحلیلی (متلب) در این پژوهش، ابتدا نتایج تحلیل ارتعاش آزاد سازه برای فرکانس بدون بعد ω فرکانس طبیعی سازه، ρ چگالی، E مدول الاستیسیته و ν بیانگر ضریب پواسون سازه است را برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد با مقالات چانگ [۳۳]، ارشد [۳۴]، وانگ [۳۵] و لوی [۳۶] در جدول ۲ و جدول ۳ آورده شده است، سپس نتایج حاصل با استفاده از روش حاضر برای فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز ۶ لایه که لایه خارجی و لایه داخلی از جنس آلومینیوم و ۴ لایه میانی از جنس شیشه/اپوکسی با زوایای الباف مختلف است را با نتایج به دست آمده از نرم افزار المان محدود (نرم افزار آباکوس) در جدول ۴ مقایسه گردیده است. لازم به توضیح است که در جدول ۲ مقدار مدول الاستیسیته برابر با ۷۰ گیگاپاسکال، ضریب پواسون طولی ۰/۳ و چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب است. در جدول ۳ نیز $m=1$ است. آباکوس یک نرم افزار معتبر و قدرتمند در زمینه مدل سازی المان محدود برای تحلیل های استاتیکی و دینامیکی است. این نرم افزار امکان ایجاد مدل های پیچیده سازه ها، شبیه سازی، بارگذاری های مختلف و تحلیل نتایج به دقت بالا را فراهم می کند. ابتدا پوسته استوانه ای هیبریدی شامل ۴ لایه شیشه /اپوکسی و ۲ لایه آلومینیوم را در نرم افزار آباکوس شبیه سازی کرده، سپس خواص مکانیکی هر لایه را به آن اختصاص داده و شرایط مرزی سازه را مشخص و سازه تحت فشار هیدرواستاتیک قرار داده شده است. با استفاده از المان های مربعی سازه را مش بندی کرده و با تحلیل استاتیکی فرکانس طبیعی سازه استخراج شده است. همان طور که مشاهده می شود تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده، سایر مراجع و المان محدود است. همچنین لایه چینی، شکل مود طولی اول، دوم و سوم پوسته

$$\begin{aligned} K_{33} &= -A_{54} \frac{1}{R} W^{(1)} + A_{44} W^{(2)} - A_{55} \frac{n^2}{R^2} W - A_{22} \frac{1}{R} W - A_{54} \frac{1}{R} W^{(1)} + \frac{n^2 P}{R} W - \frac{P R}{2} W^{(2)} + I_0 \omega^2 W \\ K_{34} &= -A_{45} \frac{n}{R} \varphi_x + A_{44} \varphi_x^{(1)} - B_{12} \frac{1}{R} \varphi_x^{(1)} + B_{26} \frac{n}{R^2} \varphi_x \\ K_{35} &= A_{55} \frac{n}{R} \varphi_\theta - B_{22} \frac{n}{R^2} \varphi_\theta - B_{26} \frac{1}{R} \varphi_\theta^{(1)} + A_{54} \frac{n}{R} \varphi_\theta^{(1)} \end{aligned}$$

$$K_{41} = B_{11} U^{(2)} - B_{16} \frac{2n}{R} U^{(1)} - B_{66} \frac{n^2}{R^2} U - I_1 \omega^2 U \quad (39)$$

$$K_{42} = B_{16} V^{(2)} + B_{12} \frac{n}{R} V^{(1)} - B_{26} \frac{n^2}{R^2} V + B_{66} \frac{n}{R} V^{(1)} + A_{45} k_s \frac{1}{R} V$$

$$K_{43} = B_{12} \frac{1}{R} W^{(1)} - B_{26} \frac{n}{R^2} W + A_{45} k_s \frac{n}{R} W - A_{44} k_s W^{(1)}$$

$$K_{44} = D_{11} \varphi_x^{(2)} - D_{16} \frac{2n}{R} \varphi_x^{(1)} - D_{66} \frac{n^2}{R^2} \varphi_x - A_{44} k_s \varphi_x + I_2 \omega^2 \varphi_x$$

$$K_{45} = D_{12} \frac{n}{R} \varphi_\theta^{(1)} + D_{16} n \varphi_\theta^{(1)} - D_{26} \frac{n^2}{R^2} \varphi_\theta + D_{66} \frac{n^2}{R} \varphi_\theta - A_{45} k_s \varphi_\theta$$

$$K_{51} = -B_{12} \frac{n}{R} U^{(1)} - B_{26} \frac{n^2}{R^2} U - B_{16} U^{(2)} - B_{66} \frac{n}{R} U^{(1)} \quad (40)$$

$$K_{52} = -B_{22} \frac{n^2}{R^2} V + B_{26} \frac{2n}{R} V^{(1)} + B_{66} V^{(2)} - A_{55} \frac{1}{R} V + I_1 \omega^2 V$$

$$K_{53} = -B_{22} \frac{n}{R^2} W - D_{22} \frac{n}{R^2} W + B_{66} \frac{1}{R} W^{(1)} + A_{55} \frac{n}{R} W - A_{45} W^{(1)}$$

$$K_{54} = -D_{12} \frac{n}{R} \varphi_x^{(1)} - D_{26} \frac{n^2}{R^2} \varphi_x - D_{16} \varphi_x^{(2)} - D_{66} \frac{n}{R} \varphi_x^{(1)} - A_{45} \varphi_x$$

$$K_{55} = -D_{22} \frac{n^2}{R^2} \varphi_\theta + D_{26} \frac{2n}{R} \varphi_\theta^{(1)} + D_{66} \varphi_\theta^{(2)} - A_{55} \varphi_\theta + I_2 \omega^2 \varphi_\theta$$

در روابط بالا $U^i, V^i, W^i, \varphi_x^i, \varphi_\theta^i$ مشتقات مرتبه (i) جابجایی ها می باشد.

۵- نتایج

در این بخش ارتعاش آزاد پوسته کامپوزیت-فلز که دارای ۴ لایه کامپوزیت و ۲ لایه فلز هست مورد تحلیل و بررسی قرار می گیرد. جنس لایه فلزی از آلومینیوم و لایه های کامپوزیتی از شیشه/اپوکسی، آرامید/اپوکسی و کربن/اپوکسی می باشد.

استوانه‌ای کامپوزیت-فلز به روش المان محدود در شکل ۲ و شکل ۳ نشان داده شده است.

جدول (۱): خواص مکانیکی مواد استفاده شده در پوسته استوانه‌ای هیبریدی.

ماده	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G (GPa)	ν_x	ρ (kg/m ³)
آلومینیوم	۷۲/۴	۷۲/۴	۲۸	۰/۳۳	۲۷۰۰
شیشه/اپوکسی	۳۸/۶	۸/۲۷	۴/۱۴	۰/۲۶	۱۸۰۰
کربن/اپوکسی	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸	۱۶۰۰
آرامید/اپوکسی	۷۶	۵/۵	۲/۳	۰/۳۴	۱۴۶۰

جدول (۲): مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برای پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک.

n	m	شرایط مرزی	L/R	R/H	چانگ [۳۳]	نتایج حاضر
۴	۱	گیردار-گیردار	۱۰	۵۰۰	۰/۰۱۵۰۸	۰/۰۱۵۱۱
۲	۱	گیردار-گیردار	۱۰	۲۰	۰/۰۵۷۸۴	۰/۰۵۷۹۴
۲	۵	آزاد-آزاد	۸/۶۷	۵۰۰	۰/۴۴۷۲	۰/۴۴۷۵
۱	۱	آزاد-آزاد	۵	۲۰	۰/۳۵۸۵	۰/۳۵۸۵۶
۲	۳	گیردار-آزاد	۵/۰۷	۲۰	۰/۳۰۷۹	۰/۳۰۸۱۷
۲	۱	گیردار-آزاد	۱۰/۱۴	۲۰	۰/۳۰۷۶	۰/۳۰۷۵
۲	۲	گیردار-آزاد	۲/۸۸	۲۰	۰/۳۰۸۱	۰/۳۰۸۴
۴	۱	ساده-ساده	۱۰	۵۰۰	۰/۰۱۵۰۸	۰/۰۱۴۱۳

جدول (۳): مقایسه چهار فرکانس طبیعی اول برای پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک.

n	ساده-ساده L/R=20 , H/R=0.05		گیردار-گیردار L/R=20 , H/R=0.002		گیردار-ساده L/R=20 , H/R=0.01	
	نتایج حاضر	ارشد [۳۴]	نتایج حاضر	وانگ [۳۵]	نتایج حاضر	لوی [۳۶]
۱	۰/۰۱۶۱۳۲۳	۰/۰۱۶۱۰۶۳	۰/۰۳۳۳۵۱	۰/۰۳۴۰	۰/۰۲۴۲۴۷	۰/۰۲۳۹۷۴
۲	۰/۰۳۹۲۶۴۸	۰/۰۳۹۲۳۳۲	۰/۰۱۱۹۷۷	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱۴۵۷	۰/۰۱۱۲۲۵
۳	۰/۰۱۰۹۴۱	۰/۰۱۰۹۴۷۷	۰/۰۰۷۲۴۷۶	۰/۰۰۷۲	۰/۰۲۲۳۴۴	۰/۰۲۲۳۱۰
۴	۰/۰۲۰۹۰۰۸	۰/۰۲۰۹۰۰۸	۰/۰۰۹۰۵۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۴۲۱۳۷۱	۰/۰۴۲۱۳۹

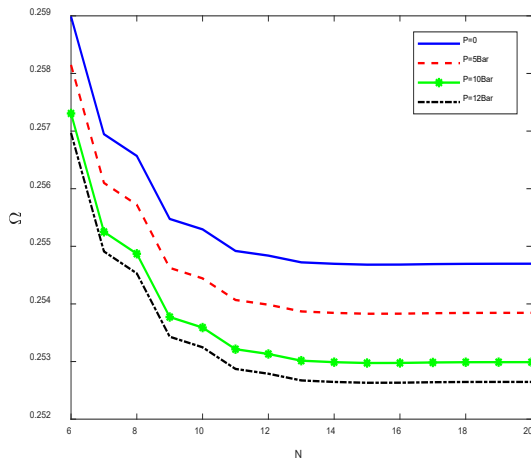
جدول (۴): مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت-فلز ۶ لایه با زاویه الیاف متفاوت در شرایط گیردار-گیردار، روش المان محدود با روش تحلیلی (H/R=0.03 , L/R=5).

N	زاویه چینی الیاف کامپوزیتی ۴۵/-۶۰/۶۰/۱-۴۵		۰/۹۰/۹۰/۰		۹۰/۴۵/-۴۵/۹۰	
	نتایج حاضر	المان محدود	نتایج حاضر	المان محدود	نتایج حاضر	المان محدود
۱	۱۷۴۳/۲۴	۱۷۴۲/۲	۱۵۷۶/۴۸	۱۵۵۴/۵	۱۶۷۰/۵	۱۶۸۱/۸
۲	۳۳۸۵/۶۷	۳۴۱۰	۳۰۴۸/۹۸	۳۰۵۰/۸	۳۲۴۱/۴۱	۳۲۹۱/۶
۳	۴۸۵۲/۳۱	۵۰۳۸/۴	۴۴۲۶/۰	۴۵۱۴/۹	۴۷۳۶/۶۸	۴۸۸۰/۳

۵-۲- تأثیر فشار هیدرو استاتیک

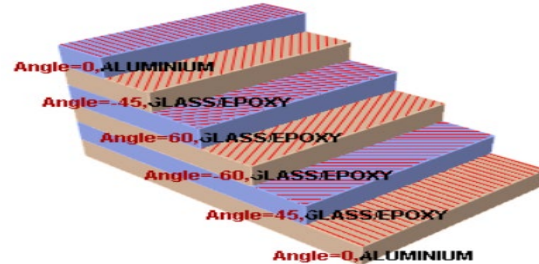
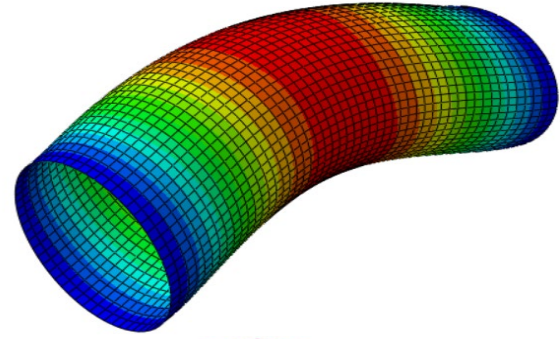
در طراحی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز از ۲ لایه آلومینیوم و ۴ لایه شیشه/اپوکسی با زاویه الیاف $[۹۰/۴۵/-۴۵/۹۰]$ که لایه‌های کامپوزیتی در وسط و لایه فلزی شامل لایه داخلی و خارجی هست استفاده شده است. کلیه نتایج در تحلیل ارتعاش آزاد سازه برای فرکانس طبیعی بدون بعد $H/R=0.03$ ، $L/R=5$ ، $R=0.1m$ ، $\Omega = \omega \times \sqrt{\frac{\rho \times H \times R^2}{A(1,1)}}$ به دست آمده، شرایط مرزی در ابتدا و انتها سازه گیردار است. در مواردی که شرایط مرزی، فشار هیدرو استاتیک و یا هرکدام از ابعاد تغییر کرده در متن توضیح داده شده است.

در شکل ۴ تأثیر افزایش تعداد نقاط شبکه در همگرایی جواب بررسی شده است. با توجه به شکل با افزایش تعداد نقاط انتخابی شبکه نتایج به همگرایی خوبی رسیده است. همچنین با توجه به شکل تعداد نقاط شبکه انتخابی برای این پژوهش ۱۵ است.

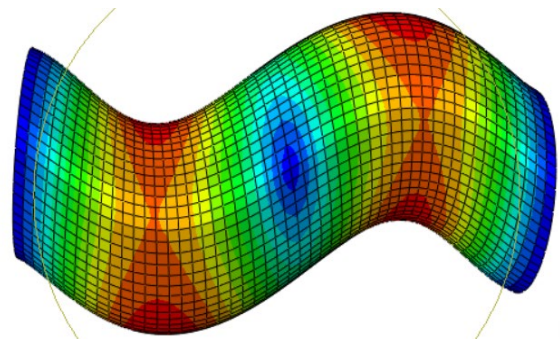


شکل (۴): تأثیر افزایش تعداد نقاط شبکه.

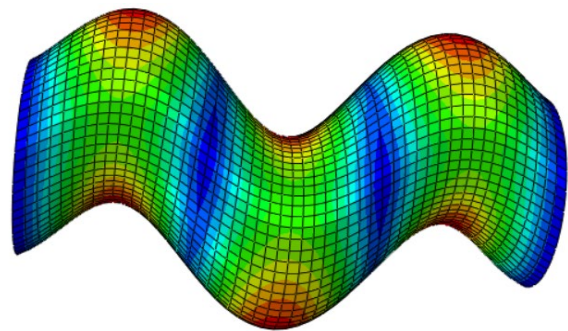
در شکل ۵ تأثیر فشار هیدرو استاتیک بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی به ازای نسبت طول به شعاع مختلف نشان داده شده است. در مورد پوسته استوانه‌ای هیبریدی با افزایش فشار هیدرو استاتیک فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. افزایش فشار هیدرو استاتیک باعث افزایش تنش‌ها در مواد سازه می‌شود که این تنش‌ها به ویژگی‌های مکانیکی سازه اثر می‌گذارند و باعث کاهش انعطاف‌پذیری و استحکام مواد سازه و در نتیجه



شکل (۲): شکل مود طولی اول پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز با زاویه چینی $[۴۵/-۶۰/۶۰/-۴۵]$.

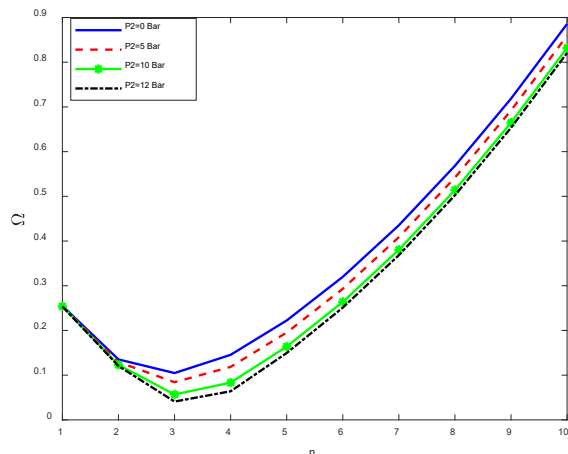


(الف)



(ب)

شکل (۳): شکل مود طولی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز با زاویه چینی $[۴۵/-۶۰/۶۰/-۴۵]$: (الف) مود دوم؛ (ب) مود سوم.



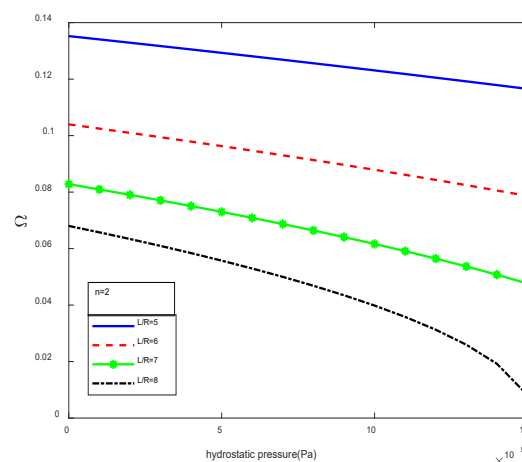
شکل (۷): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سازه برحسب مود جانبی به ازای فشار هیدرو استاتیکی مختلف. این پدیده به این علت است که ابتدا برای تغییر شکل سازه نیروی کمتری نیاز است و در مدهای جانبی بالاتر از ۴ به نیروی بیشتری احتیاج است. با توجه به شکل ۳ با افزایش مود طولی فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای هیبریدی افزایش می‌یابد. همچنین در شکل ۷ نشان داده شده با افزایش فشار هیدرو استاتیک، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده کاهش بیشتری نسبت به فشارهای پایین‌تر دارد. همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود افزایش نسبت طول به شعاع، در ابتدا برای $L/R < 4$ باعث کاهش ناگهانی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده اما در ادامه کاهش کمتری پیدا می‌کند، همچنین برای مدهای جانبی بالاتر کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده کمتر است. در نتیجه تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای استوانه بلند کمتر از استوانه‌های کوتاه است. اثر نسبت ضخامت به شعاع در فرکانس طبیعی بی‌بعد شده

در شکل ۹ نشان داده شده است. با افزایش نسب ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه افزایش پیدا می‌کند. همچنین در نسبت طول به شعاع کمتر، فرکانس طبیعی بی‌بعد بیشتر می‌شود. در نتیجه در یک فشار ثابت، هرچقدر نسبت ضخامت به شعاع بیشتر و نسبت طول به شعاع کمتر باشد پایداری سازه بیشتر می‌شود.

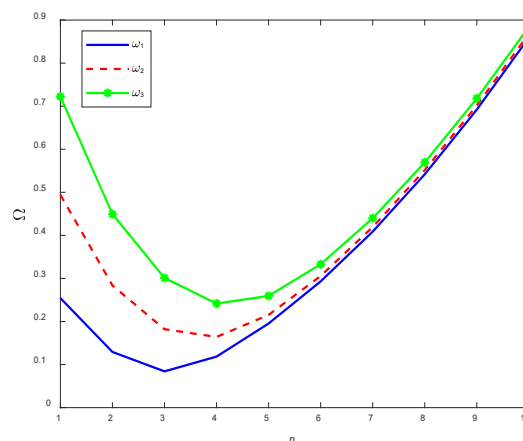
تأثیر مواد کامپوزیتی به کاررفته در سازه بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه به ازای افزایش فشار هیدرو استاتیک،

کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه می‌شود. همچنین با توجه به شکل هر چه نسبت طول به شعاع بیشتر باشد تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده بیشتر تحت تأثیر افزایش فشار هیدرو استاتیک قرار می‌گیرد. با افزایش نسبت طول به شعاع فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در فشار هیدرو استاتیک بالاتر کاهش بیشتری پیدا می‌کند.

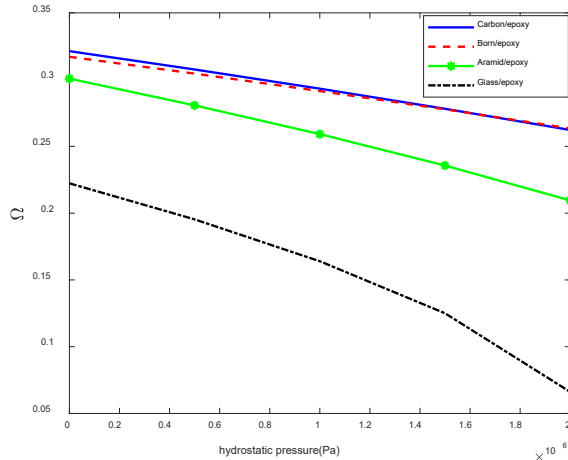
با توجه به شکل ۶ و شکل ۷ در مدهای جانبی $n \leq 3$ فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی کاهش می‌یابد و سپس در $n > 4$ فرکانس طبیعی بی‌بعد شده افزایشی می‌شود.



شکل (۸): تأثیر افزایش فشار هیدرو استاتیکی بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی به ازای نسبت طول به شعاع مختلف در مود جانبی دوم.



شکل (۹): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سازه برحسب مود جانبی به ازای مود طولی اول، دوم و سوم.



شکل (۱۰): تأثیر افزایش فشار هیدرو استاتیک بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به ازای الیاف‌های مختلف.

تأثیر شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سازه در جدول ۵ نشان داده شده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد در حالت دوسرگیردار نسبت به سایر حالت‌ها بیشتر است، این امر بیانگر این است که سفتی سازه در شرایط مرزی دوسرگیردار از دیگر حالت‌ها بیشتر و بالاتر است. همچنین با افزایش فشار کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در حالت دوسرگیردار نسبت به حالت‌های دیگر کمتر است. بنابراین پوسته استوانه‌ای هیبریدی تحت فشار هیدرو استاتیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار دارای بیشترین پایداری است.

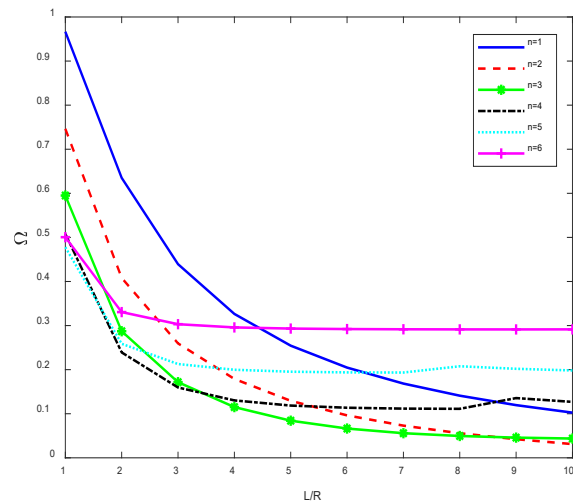
جدول (۵): تأثیر شرایط مرزی در فشارهای مختلف بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده

شرایط مرزی	P=0	P=5Bar	P=10Bar	P=30Bar
C-C	۰/۲۵۴۹	۰/۲۵۴۴	۰/۲۵۳۸	۰/۲۵۱۵
C-SS	۰/۲۲۲۰	۰/۲۲۱۴	۰/۲۲۰۸	۰/۲۱۸۴
SS-SS	۰/۱۹۲۲	۰/۱۹۱۶	۰/۱۹۰۹	۰/۱۸۸۲
C-F	۰/۰۷۷۳	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۴۳	۰/۰۶۷۹

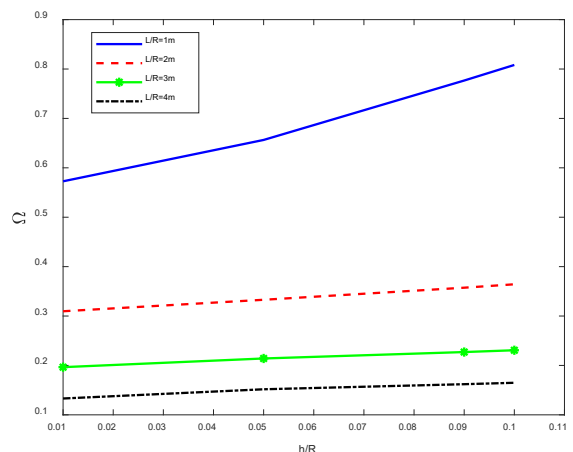
۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز تحت تأثیر فشار هیدرو استاتیک، ضخامت، طول و شعاع متغیر، در شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش

در شکل ۱۰ ترسیم شده است. در هر ۴ ماده کامپوزیتی با افزایش فشار هیدرو استاتیک، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. با توجه به شکل برای حالتی که کامپوزیت مورد استفاده در سازه هیبریدی کربن/اپوکسی می‌باشد، فرکانس طبیعی بی‌بعد از سایر مواد بیشتر است. مواد با سختی بالاتر، فرکانس طبیعی بالاتری دارند، یعنی سرعت انتقال انرژی و توانایی انطباق با ارتعاشات نسبت به مواد دیگر بیشتر است. به همین دلیل، کربن که دارای سختی بالاتری است، فرکانس طبیعی بیشتری دارد.



شکل (۸): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی برحسب مودهای جانبی به ازای نسبت طول به شعاع مختلف.



شکل (۹): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی برحسب نسبت ضخامت به شعاع به ازای نسبت طول به شعاع مختلف.

composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Advances in Engineering Software*. 1999; 30(9-11): 649-655. DOI [https://doi.org/10.1016/S0965-9978\(98\)00115-X](https://doi.org/10.1016/S0965-9978(98)00115-X).

[5] Suzuki K, Shikanai G and Chino T. Vibrations of composite circular cylindrical vessels. *International journal of Solids and Structures*. 1998; 35(22): 2877-2899. DOI [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00356-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00356-9).

[6] Ng TY, Li H and Lam KY. Generalized differential quadrature for free vibration of rotating composite laminated conical shell with various boundary conditions. *International journal of Mechanical Sciences*. 2003; 45(3): 567-587. DOI [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00042-0).

[7] Jafari AA and Bagheri M. Free vibration of rotating ring stiffened cylindrical shells with non-uniform stiffener distribution. *Journal Sound and Vibration*. 2006. 296(1-2): 353-367. DOI <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.001>.

[8] Golfman Y and Sudbury MA. Dynamic stability of the lattice structures in the manufacturing of carbon fiber epoxy/composites including the influence of damping properties. *Journal of Advanced Materials*. 2007; 3:11-20.

[9] Khalili SMR, Davar A and Malekzadeh Fard K. Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory. *International journal of Mechanical Sciences*. 2012; 56(1): 1-25. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.002>.

[10] Zhao L and Wu J. Natural frequency and vibration modal analysis of composite laminated plate. *Advanced Materials Research*. 2013: 711: 396-400. DOI <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.711.396>.

[11] Hemmatnezhad M, Rahimi GH and Ansari R. On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells. *Acta Mechanica*. 2014; 225(2): 609-623. DOI <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0976-1>.

[12] Tullu A, Ku TW and Kang BS. Elastic deformation of fiber-reinforced multi-layered composite conical shell of variable stiffness. *Composite Structures*. 2016; 154: 634-645. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.064>.

[13] Zarei M and Rahimi GH. Free vibration analysis of grid stiffened composite conical shells.

دیفرانسیلی مربعات تعمیم یافته انجام شده است. نتایج نشان می دهند که:

- (۱) با افزایش فشار هیدرو استاتیکی فرکانس طبیعی بی بعد کاهش پیدا می کند.
- (۲) با افزایش مود جانبی فرکانس طبیعی بی بعد سازه ابتدا کاهش، سپس افزایشی می شود.
- (۳) افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته استوانه ای هیبریدی باعث افزایش فرکانس طبیعی بی بعد سازه می شود.
- (۴) در شرایط مرزی گیردار-گیردار پوسته استوانه ای هیبریدی دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی بعد شده است.
- (۵) در حالتی که ماده کامپوزیتی پوسته استوانه ای هیبریدی از جنس کربن/اپوکسی باشد، سازه دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی بعد است.
- (۶) با افزایش مود طولی فرکانس طبیعی بی بعد سازه افزایش می یابد.
- (۷) افزایش مقدار نسبت طول به شعاع همواره باعث کاهش فرکانس طبیعی بی بعد سازه می شود، که این کاهش فرکانس در ابتدا با شیب تندتری شروع شده و در ادامه با شیب کمتری ادامه پیدا می کند.

۷- مراجع

- [1] Reddy JN and Liu CF. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International journal Engineering and Science*. 1985; 23(3): 319-330. DOI [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(85\)90051-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(85)90051-5).
- [2] Rand O and Stavsky Y. Response and eigenfrequencies of rotating composite cylindrical shells. *Journal Sound and Vibration*. 1996; 192(1): 65-77. DOI <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0176>.
- [3] Lam KY and Loy CT. Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell. *Composite Structures*. 1998; 41(3-4): 215-228. DOI [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00012-9).
- [4] Lee YS and Kim YW. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating

- [22] Coskun T, Sahin OS. Modal and random vibration responses of composite overwrapped pressure vessels with various geodesic dome trajectories. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2024; 21:07316844241241567. DOI <https://doi.org/10.1177/07316844241241567>.
- [23] Meng S, Zhong R, Wang Q, Shi X, Qin B. Vibration characteristic analysis of three-dimensional sandwich cylindrical shell based on the Spectro-Geometric method. *Composite Structures*. 2024; 327:117661. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117661>.
- [24] Wang RT and Lin ZX. Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 2006; 295(3-5): 964-987. DOI <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.061>.
- [25] Rao SS. *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, INC. 2007.
- [26] Donnell LH. Stability of thin-walled tubes under torsion. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 1934 Feb 1;56(2):108. DOI <https://doi.org/10.1115/1.4019670>.
- [27] Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. 2008; ISBN:9780521883.
- [28] Bochkarev SA and Matveenko VP. Natural vibrations and stability of a stationary or rotating circular cylindrical shell containing a rotating fluid. *Computers & Structures*. 2011; 89(7-8): 571-580. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.12.016>.
- [29] Sun Z, Hu G, Nie X, Sun J. An analytical symplectic method for buckling of ring-stiffened graphene platelet-reinforced composite cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022;10(12):1834. DOI <https://doi.org/10.3390/jmse10121834>.
- [30] Bellman R and Casti J. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1971; 34(2): 235-238. DOI [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(71\)90110-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90110-7).
- [31] Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer London. 2000.
- [32] Shu C and Du H. Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM. *Composites Part B: Engineering*. 1997; 28(3): Journal of Science and Technology of Composites. 2017; 4(1):1-8.
- [14] Shen HS, Xiang Y, Fan Y and Hui D. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites Part B: Engineering*. 2018; 136: 177-186. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.032>.
- [15] Qin Z, Yang Z, Zu J and Chu F. Free vibration analysis of rotating cylindrical shells coupled with moderately thick annular plates. *International journal of Mechanical Sciences*. 2018; 142-143: 127-139. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.044>.
- [16] Lopatin A. Buckling of composite cylindrical shells with rigid end disks under hydrostatic pressure. *Composite Structures*. 2017; 173: 136-143. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.109>.
- [17] Kiani Y, Dimitri R and Tornabene F. Free vibration study of composite conical panels reinforced with FG-CNTs. *Engineering Structures*. 2018; 172: 472-482. DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.006>.
- [18] Shen KC and Pan G. Buckling and strain response of filament winding composite cylindrical shell subjected to hydrostatic pressure: numerical solution and experiment. *Composite Structures*. 2021; 276(2):114534. DOI <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114534>.
- [19] Shahgholian DS, Rahimi G, Zarei M and Salehipour H. Free vibration analyses of composite sandwich cylindrical shells with grid cores: experimental study and numerical simulation. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2022; 50(2): 687-706. DOI <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1725565>.
- [20] Wu JH, Liu RJ, Duan Y and Sun YD. Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2023; 202:104925. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2023.104925>.
- [21] Cho JR. Free vibration analysis of functionally graded porous cylindrical panels reinforced with graphene platelets. *Nanomaterials*. 2023; 13(9): 1441. DOI <https://doi.org/10.3390/NANO13091441>.

267–274. DOI [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00052-2](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00052-2).

[33] Chung H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells. *Journal of sound and Vibration*. 1981; 74(3): 331–350. DOI [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90303-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90303-5).

[34] Arshad S, Naeem MN, Sultana N, Shah AG and Iqbal ASZ. Vibration analysis of bi-layered FGM cylindrical shells. *Archive of Applied Mechanics* 2011;81:319-43. DOI <https://doi.org/10.1007/s00419-010-0409-8>.

[35] Wang Y and Wu D. Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory. *Aerospace Science and Technology*. 2017; 66: 83–91. DOI <https://doi.org/10.1016/J.AST.2017.03.003>.

[36] Loy CT, Lam KY and Shu C. Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature. *Shock and Vibration*. 1997; 4(3): 193–198. DOI <https://doi.org/10.3233/SAV-1997-4305>.