



Investigation of the Natural Frequency and Damping Coefficient of the Sandwich Beam Consisting of a Viscoelastic Core and Nanocomposite Face-Sheets

Hadi Teymouri¹ , Aliasghar Naderi^{2*}

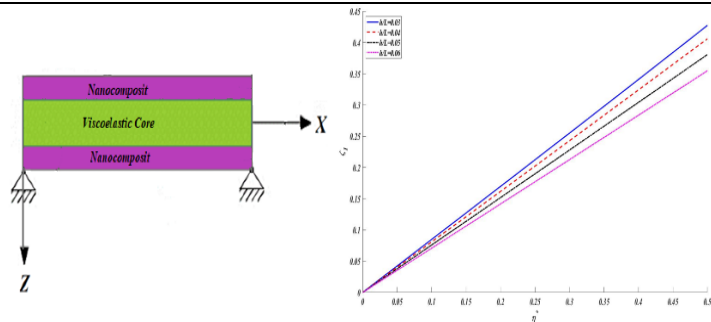
¹ PhD Student, University of Tabriz, Tabriz, Iran (Email: hteymouri@tabrizu.ac.ir)

² Associate Professor, Imam Ali Military University, Tehran, Iran (*Correspondence: aa.naderi@modares.ac.ir)

HIGHLIGHTS

- Employing the three-layer sandwich beam theory to derive the governing equations of the structure.
- Utilizing the Kelvin-Voigt model to represent the viscoelastic core.
- Investigating the effects of carbon nanotube (CNT) volume fraction on the system's natural frequency and damping coefficient.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 26 September 2025

Received in revised form: 8

Accepted: 13 December 2025

Available online: 21 January 2026

*Correspondence:

aa.naderi@modares.ac.ir

Keywords:

Sandwich Beam

Viscoelastic Core

Nanocomposite

Three-layer Sandwich Beam

Theory

Kelvin-Voigt Model

ABSTRACT

In this research, the free vibrations of a sandwich beam with a viscoelastic core and carbon nanotube-reinforced polymer face sheets, under simply supported boundary conditions and using the three-layer sandwich beam theory, have been investigated. Given the fundamental application of sandwich structures with viscoelastic cores in critical industries such as military and aerospace, they are of significant importance for vibration reduction and noise control. The Kelvin-Voigt model has been used to model the viscoelastic core, and using the aforementioned theory and Hamilton's principle, the governing equations of the sandwich structure are derived. The obtained equations are in the form of partial differential equations, and to solve these equations of motion, the analytical Navier method in the spatial domain has been employed. To ensure the validity and accuracy of the numerical results, a comparative approach with reputable published articles has been presented. Finally, the effects of various material and geometric parameters on the natural frequency of the system have been examined. The results indicate that as the structural loss factor increases, the damping of the sandwich beam also increases, consequently reducing the natural frequency of the system.

Cite this article: Teymouri H[®], Naderi A[®]. Investigation of the Natural Frequency and Damping Coefficient of the Sandwich Beam Consisting of a Viscoelastic Core and Nanocomposite Face-Sheets. Journal of Aerospace Mechanics. 2025; 21 (4): 53-64. DOI <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1531>

© Author(s) retain the copyright and full publishing rights

Publisher: Imam Hossein Comprehensive University.





بررسی فرکانس طبیعی و ضریب میرایی تیر ساندویچی متشکل از هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های نانو کامپوزیتی

هادی تیموری^۱ ID، علی اصغر نادری^۲ ID*

^۱ دانشجوی دکتری، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران (hteymouri@tabrizu.ac.ir)

^۲ دانشیار، دانشگاه افسری امام علی، تهران، ایران (نویسنده مسئول: aa.naderi@modares.ac.ir)

برجسته‌ها

- استفاده از تئوری سه لایه تیر ساندویچی برای بدست آوردن معادلات حاکم بر سازه
- استفاده از مدل کلویین-ویت برای مدل سازی هسته ویسکوالاستیک
- بررسی اثرات کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر فرکانس طبیعی و ضریب میرایی سیستم

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۰۴ مهر ۱۴۰۴

بازنگری: ۱۳ آذر ۱۴۰۴

پذیرش: 22 آذر ۱۴۰۴

ارائه آنلاین: ۰۱ بهمن ۱۴۰۴

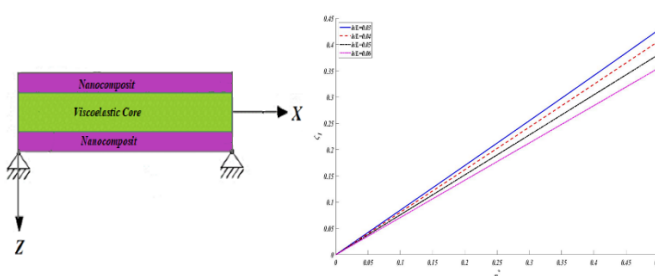
*نویسنده مسئول:

aa.naderi@modares.ac.ir

کلید واژه‌ها:

تیر ساندویچی
هسته ویسکوالاستیک
نانوکامپوزیت
تئوری سه لایه تیر ساندویچی
مدل کلویین-ویت

چکیده گرافیکی



چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، تحت شرایط تکیه‌گاه ساده و با بهره‌گیری از تئوری سه لایه‌ای تیر ساندویچی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به کاربرد اساسی سازه‌های ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک در صنایع مهمی هم‌چون صنایع نظامی و هوافضا، به منظور کاهش ارتعاشات و کنترل نویز از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشند. برای مدل سازی هسته ویسکوالاستیک از مدل کلویین-ویت استفاده شده است و هم‌چنین با استفاده از تئوری یاد شده و اصل همیلتون معادلات حاکم بر سازه ساندویچی به دست می‌آید. معادلات به دست آمده به صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند که برای حل این معادلات حرکت، از روش تحلیل ناپیر در حوزه‌ی مکان استفاده شده است. به منظور صحت و دقت نتایج عددی به دست آمده، یک رویکرد مقایسه‌ای با مقالات معتبر ارائه شده است. در انتها بررسی اثر پارامترهای مختلف مادی و هندسی بر روی فرکانس طبیعی سیستم پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش ضریب اتلاف سازه، استهلاک تیر ساندویچی نیز افزایش پیدا می‌کند، در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش پیدا می‌کند.

استناد: تیموری، هادی^①، نادری، علی اصغر^②. بررسی فرکانس طبیعی و ضریب میرایی تیر ساندویچی متشکل از هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های نانو کامپوزیتی. مکانیک هوا فضا. ۱۴۰۴؛ ۲۱ (۳): ۶۴-۵۳.

<https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1531>

© نویسنده(گان) حق نشر و حقوق کامل انتشار را برای خود محفوظ می‌دارند.

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع).



۱- مقدمه

رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی به دلیل کاربردهای گسترده آن در زمینه‌های دریایی، فضایی، هوایی، شهری و خودرو توجه قابل توجهی را به خود جلب کرده است. پل‌های ساندویچی یک ساختار سبک و مرکب با ظرفیت تحمل بالای بار کششی، فشاری، خمشی و پیچشی می‌باشد که دارای نسبت سفتی و استحکام به وزن بالا است که از دو طرف به دو رویه محدود شده و در وسط یک لایه به نام هسته قرار گرفته است [۱]. مهم‌ترین قسمت سازه‌های ساندویچی، هسته این مواد می‌باشد که بایستی دارای چگالی کم باشد، به همین امر هسته پانل‌های ساندویچی معمولاً از مواد لانه زنبوری، چوب‌های بالسا و فوم‌های پلیمری الاستومری یا همان مواد ویسکوالاستیک ساخته می‌شود و از طرف دیگر رویه‌ها از موادی با استحکام بالا مانند چند لایه‌های کامپوزیتی، فلزات و یا کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ساخته می‌شوند [۲].

ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی چند لایه بر اساس تئوری‌های مختلف تیر، توسط ردی [۳] مورد مطالعه قرار گرفت. یانگ و همکاران [۴] ارتعاشات آزاد تیرهای باریک هدفمند (FGM^۱) را مورد بررسی و تحقیق قرار دادند و از مدل فنر چرخشی برای در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری مقطعی ناشی از ترک‌های لبه باز استفاده کردند. ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ساندویچی با هسته مشبک کامپوزیتی با استفاده از روش نیمه تحلیلی گالرکین و المان محدود توسط رهنما و همکاران [۵] مورد مطالعه قرار گرفت. سیمسک و کوچاترک [۶] ویژگی‌های ارتعاش آزاد و انحرافات گذرای یک تیر FGM، با تکیه گاه ساده را که تحت یک بار هارمونیک متحرک متمرکز قرار دارد را با استفاده از روش معادله لاگرانژ، در چارچوب تئوری تیر اویلر-برنولی مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل ارتعاشات آزاد سازه‌های ساندویچی لانه زنبوری با شرایط مرزی مختلف توسط صفایی و همکاران [۷] مورد بررسی واقع شد و عوامل اصلی مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی با رویه‌های متخلخل مدرج تابعی و هسته آلومینیومی تقویت‌شده با صفحات گرافن با استفاده از تئوری جدید شبه سه‌بعدی تغییر شکل برشی توسط بلخوجا و همکاران [۸] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شد. یوسفزاده و دوستدار [۹] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو مخروطی چرخان با لایه محرک پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش سرعت زاویه‌ای تیر، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

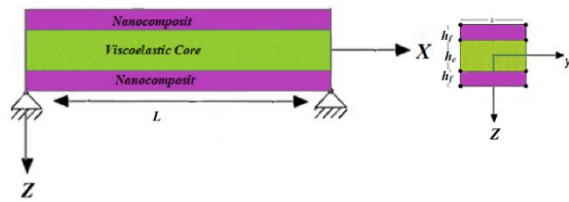
به طور کلی کامپوزیت‌های مشمول مواد نانو از دو فاز تشکیل شده‌اند، فاز اول زمینه یا ماتریس کامپوزیت است که می‌تواند از جنس پلیمر، فلز یا سرامیک باشد؛ فاز دوم، تقویت‌کننده‌هایی در

مقیاس نانو هستند که به منظور افزایش استحکام، مقاومت و سایر خواص مکانیکی به فاز اول افزوده می‌شوند [۱۰]. کی و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای نانوکامپوزیت هدفمند تقویت شده توسط نانولوله‌های کربنی تک جداره در چارچوب تئوری تیر تیموشنکو و رابطه جابجایی-کرنش نوع فون کارمان را ارائه کردند. بررسی تأثیرات تراکم نانولوله‌های کربنی بر رفتار فرکانس طبیعی صفحات نانوکامپوزیت هیبریدی توسط ابراهیمی و همکاران [۱۲] بررسی شد. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با یک هسته انعطاف‌پذیر و رویه‌های نانوکامپوزیتی مدرج تابعی که بر روی بستر الاستیک دو پارامتری قرار گرفته شده بود، توسط مرادی دستجردی و همکاران [۱۳] مورد بررسی قرار گرفت. بیگری و همکاران [۱۴] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ساندویچی با هسته متخلخل و رویه‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با استفاده از تئوری شبه سه‌بعدی تغییر شکل برشی، تحلیل و بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که فرکانس طبیعی سازه توسط تئوری شبه سه‌بعدی تغییر شکل برشی کم‌تر از بقیه تئوری‌ها است.

مواد ویسکوالاستیک دارای ویژگی الاستیک و ویسکوز هم‌زمان باهم می‌باشند. این مواد در برابر نیروهای خارجی، واکنش‌هایی بین رفتار مواد الاستیک و سیال ویسکوز از خود نشان می‌دهند. کرنش مواد الاستیک به صورت لحظه‌ای بوده و هنگامی که تحت بارگذاری قرار گرفته می‌شوند، بعد از برداشتن بار به حالت اولیه خود باز می‌گردند. در مقابل آن، مواد لزج در مقابل جریان برشی از خود مقاومت نشان می‌دهند و در هنگام بارگذاری به این مواد، کرنش آن‌ها با زمان تغییر پیدا می‌کند؛ در نتیجه، مواد ویسکوالاستیک ترکیبی از خواص بالا را دارا بوده و کرنش آن‌ها به زمان وابسته است [۱۵]. در این زمینه تحقیقات زیادی توسط محققان مختلف بررسی شده است که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود.

رفتار دینامیکی تیر ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک انعطاف‌پذیر تحت انواع بارگذاری‌های دینامیکی توسط حامد و برونویچ [۱۶] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها برای محاسبه‌ی روابط ساختاری هسته‌ی ویسکوالاستیک از دو مدل کلین-ویت و ماکسول به صورت جداگانه بهره گرفتند. تحلیل دینامیکی ورقه‌های ساندویچی FRP با هسته‌ی ویسکوالاستیک^۲ PVC توسط مونیر و شنوی [۱۷] مورد بررسی و تجزیه قرار گرفت. معادلات حرکت ارتعاشی حاکم بر ورقه‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی حاصل شده است، آن‌ها با بهره‌گیری از اصل الاستیک-ویسکوالاستیک در شرایط پایا توانستند فرکانس‌های طبیعی و ضرایب اتلاف برای ورق ساندویچی را محاسبه کنند. ون و همکاران [۱۸]، به تحلیل دینامیکی تیر ساندویچی سه لایه با هسته ویسکوالاستیک تحت بارگذاری دینامیکی خارجی با استفاده از روش المان محدود

^۲ Polyvinyl Chloride^۱ Functionally Graded Material



شکل (۱): شماتیک تیر ساندوپیچی و نمایش دستگاه مختصات

۲-۱- تئوری سه لایه تیر ساندوپیچی

برای تحلیل ارتعاشات آزاد سازه مدنظر از تئوری سه لایه تیر ساندوپیچی استفاده شده است، که در آن رویه‌های تیر ساندوپیچی با استفاده از تئوری مرتبه بالای فراسیتیگ مدل سازی شده است. انتخاب تئوری مرتبه بالا (تئوری فراسیتیگ) برای هسته و تئوری تیر تیموشنکو برای رویه‌ها بر اساس ماهیت مکانیکی و نقش هر بخش در سازه ساندوپیچی صورت گرفته است. هسته ویسکوالاستیک به‌عنوان بخش میانی با ضخامت بیشتر و رفتار وابسته به زمان، نقش اصلی را در انتقال برش ایفا می‌کند؛ از این‌رو، استفاده از تئوری فراسیتیگ برای مدل سازی دقیق تر تغییر شکل‌های برشی در آن ضروری بوده است. در مقابل، رویه‌های نانوکامپوزیتی به‌عنوان لایه‌های نازک‌تر با رفتار نسبتاً صلب‌تر در برابر خمشی، عمدتاً تحت تنش‌های کششی و خمشی قرار دارند و سهم کمتری در انتقال برش دارند. بنابراین، استفاده از تئوری تیموشنکو که شامل تغییر شکل برشی مرتبه اول است، برای رویه‌ها کفایت می‌کند. میدان جابه‌جایی برای رویه‌ها بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۱]:

$$\begin{aligned} U_i(x, z_i, t) &= u_i(x, t) + z_i \phi_i(x, t) \\ W_i(x, z_i, t) &= w_i(x, t) \end{aligned} \quad i = t, b \quad (1)$$

در رابطه بالا اندیس‌های t و b به ترتیب برای تفکیک رویه‌های بالایی و پایینی می‌باشد. جابجایی طولی و عرضی تیر ساندوپیچی به ترتیب با U و W نشان داده شده است. هم چنین u و w جابجایی‌های طولی، عرضی صفحه میانی و اثرات چرخش رویه‌ها را نشان می‌دهند. میدان جابه‌جایی برای هسته ویسکوالاستیک طبق تئوری مرتبه بالای فراسیتیگ بصورت زیر در نظر گرفته می‌گردد [۲۲]:

$$\begin{aligned} U_c(x, z_c, t) &= u_0(x, t) + z_c u_1(x, t) \\ &+ z_c^2 u_2(x, t) + z_c^3 u_3(x, t), \quad W_c(x, z_c, t) \\ &= w_0(x, t) + z_c w_1(x, t) + z_c^2 w_2(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط بالا، U_c و W_c به ترتیب مربوط به جابجایی‌های طولی و عرضی هسته ویسکوالاستیک می‌باشند. هم چنین u_0 و w_0 به ترتیب جابجایی طولی، عرضی در صفحه میانی و اثرات چرخش هسته ویسکوالاستیک را نشان می‌دهند. علاوه بر این، متغیرهای u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 پارامترهای مجهولی هستند که با اعمال شرایط پیوستگی جابجایی در سطح مشترک بین صفحات رویه و هسته تعیین می‌شوند. شرایط پیوستگی در سطح مشترک بین صفحات رویه و هسته به صورت زیر تعریف می‌گردد.

پرداختند. ارتعاشات اجباری تیر ساندوپیچی با رویه‌های مواد متخلخل و هسته ویسکوالاستیک توسط تفرشی و همکاران [۱۹] مورد مطالعه واقع شد؛ روش GHM^۳ برای مدل سازی هسته ویسکوالاستیک بکار گرفته شد و از تئوری تیر اویلر-برنولی و اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم بهره گرفته شد. تیموری و همکاران [۲۰] رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ویسکوالاستیک را با استفاده از دو روش کلون-ویت و وابسته به فرکانس، را مورد بحث و مطالعه قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که روش وابسته به فرکانس دارای کاهش لگاریتمی کمتری نسبت به روش کلون-ویت دارد.

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد تیر ساندوپیچی شامل هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مورد بررسی قرار گرفته است. مدل سازی تیر با بهره‌گیری از تئوری سه لایه تیر ساندوپیچی انجام شده است؛ به طوری که برای رویه‌ها از تئوری تیموشنکو و برای هسته از تئوری مرتبه بالای فراسیتیگ استفاده شده است. این ترکیب تئوریک، در کنار استفاده از مدل کلون-ویت برای رفتار ویسکوالاستیک هسته، ساختاری نوآورانه را ارائه می‌دهد که در مطالعات پیشین کمتر مورد توجه قرار گرفته است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و به کمک روش تحلیلی ناویر حل گردیده‌اند. اعتبارسنجی نتایج با مقایسه با منابع معتبر انجام شده و تحلیل عددی دقیق به صورت نمودارها و جداول ارائه شده است. این رویکرد جامع، امکان بررسی هم‌زمان اثرات میرایی، خواص نانوکامپوزیتی و رفتار وابسته به زمان را فراهم ساخته و پژوهش حاضر را از مطالعات مشابه متمایز می‌سازد.

۲-۲- مدل سازی تیر ساندوپیچی

تیر ساندوپیچی متشکل از رویه‌های نانوکامپوزیتی و هسته ویسکوالاستیک، در دستگاه مختصات (x, y, z) بر روی صفحه میانی هسته در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۱ طول، پهنا، ضخامت هسته و ضخامت لایه نانوکامپوزیتی به ترتیب با h_c, h_f, b, L نشان داده شده است. برای بررسی و تحلیل تحقیق حاضر فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- در معادلات حاکم بر سازه، از ترم‌های غیر خطی صرف نظر شده است.
- رویه‌ها و هسته تیر ساندوپیچی بصورت کامل بر روی هم چسبیده شده‌اند.

این فرضیات در محدوده‌ای که پاسخ سیستم در چارچوب خطی باقی بماند قابل قبول هستند و اعتبار مدل در این محدوده با مقایسه نتایج عددی با داده‌های مرجع تأیید شده است. با این حال، در کاربردهایی که رفتار غیر خطی یا وابستگی‌های زمانی نقش مهمی دارند، استفاده از مدل‌های پیشرفته‌تر توصیه می‌شود.

¹ Golla-Hughes-McTavish

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(f)} & 0 \\ 0 & k_s Q_{55}^{(f)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(i)} \\ \gamma_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad i = t, b \quad (9)$$

σ_{ij} ، Q_{ij} به ترتیب تانسور تنش، کرنش و ماتریس سفتی لایه نانو کامپوزیتی را نشان می‌دهند و هم‌چنین ضریب تصحیح برشی تئوری تیموشنکو نیز با k_s نشان داده شده است. ضرایب سختی رویه‌های نانو کامپوزیتی و ضریب تصحیح برشی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(f)} &= E^f \quad Q_{55}^{(f)} = G^f \\ k_s &= \frac{5}{6} \end{aligned} \quad (10)$$

مدول یانگ و مدول برشی لایه‌های نانو کامپوزیتی به ترتیب E^f و G^f می‌باشد که با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند [۲۳]:

$$\begin{aligned} E^f &= \eta_1 V_{CNT} E^{CNT} + V_m E^m \\ \frac{\eta_2}{E^f} &= \frac{V_{CNT}}{E^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m} \\ \frac{\eta_3}{G^f} &= \frac{V_{CNT}}{G^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m} \end{aligned} \quad (11)$$

که در رابطه بالا، η_i ضرایب بازدهی نانو لوله‌های کربنی، E^{CNT} و G^{CNT} مدول یانگ و مدول برشی نانولوله‌های کربنی، E^m و G^m مدول یانگ و مدول برشی ماتریس (زمینه)، V_m و V_{CNT} درصد حجمی ماتریس و نانولوله‌های کربنی می‌باشند. ضرایب بازدهی انواع کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در جدول ۱ نشان داده شده است [۲۴].

جدول (۱): ضرایب بازدهی برای کسر حجمی‌های مختلف نانولوله‌های کربنی

η_3	η_2	η_1	V_{CNT}
۰/۷۱۵۴	۱/۰۲۲	۰/۱۳۷	۰/۱۲
۱/۱۳۸	۱/۶۲۶	۰/۱۴۲	۰/۱۷
۱/۱۰۹	۱/۵۸۵	۰/۱۴۱	۰/۲۸

با جایگذاری رابطه ۶ در رابطه ۹، روابط تنش-جابجایی برای رویه‌های تیر ساندویچی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(i)} &= Q_{11}^{(f)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + z_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \\ \sigma_{xz}^{(i)} &= k_s Q_{55}^{(f)} \left(\phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad i = t, b \quad (12)$$

۲-۳- معادلات ساختاری هسته ویسکوالاستیک

معادلات ساختاری هسته ویسکوالاستیک طبق مدل کلین-ویت برای تیر ساندویچی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} Q_{11}^{(c)} & Q_{13}^{(c)} & 0 \\ Q_{13}^{(c)} & Q_{33}^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U_c \left(x, \frac{h_c}{2}, t \right) &= U_b \left(x, -\frac{h_b}{2}, t \right), U_c \left(x, -\frac{h_c}{2}, t \right) \\ &= U_t \left(x, \frac{h_t}{2}, t \right), W_c \left(x, \frac{h_c}{2}, t \right) = W_b \left(x, -\frac{h_b}{2}, t \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$W_c \left(x, -\frac{h_c}{2}, t \right) = W_t \left(x, \frac{h_t}{2}, t \right)$$

میدان جابجایی برای هسته با جایگذاری روابط فوق در میدان‌های جابجایی ۱ و ۲ و حل معادلات حاصل بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} U_c(x, z_c, t) &= f_0(z_c) u_0(x, t) + f_3(z_c) u_1(x, t) \\ &+ f_4(z_c) u_b(x, t) + f_5(z_c) u_t(x, t) \\ &+ f_6(z_c) \phi_b(x, t) + f_7(z_c) \phi_t(x, t) \\ W_c(x, z_c, t) &= f_0(z_c) w_0(x, t) \\ &+ f_1(z_c) w_b(x, t) + f_2(z_c) w_t(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

که در رابطه بالا

$$\begin{aligned} f_0(z_c) &= \left[1 - \left(\frac{2z_c}{h_c} \right)^2 \right], f_1(z_c) = \frac{z_c}{h_c} \left(1 + \frac{2z_c}{h_c} \right) \\ f_2(z_c) &= -\frac{z_c}{h_c} \left(1 - \frac{2z_c}{h_c} \right), f_3(z_c) = z_c f_0(z_c) \\ f_4(z_c) &= 2 \left(\frac{z_c}{h_c} \right)^2 \left(1 + \frac{2z_c}{h_c} \right), f_5(z_c) = 2 \left(\frac{z_c}{h_c} \right)^2 \left(1 - \frac{2z_c}{h_c} \right) \\ f_6(z_c) &= -\frac{h_b}{2} f_4(z_c), f_7(z_c) = \frac{h_t}{2} f_5(z_c) \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از روابط کرنش-جابجایی، میدان‌های کرنش برای رویه‌های تیر ساندویچی به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۰]:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + z_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad i = t, b \quad (6)$$

$$\gamma_{xz}^{(i)} = \phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial x}$$

روابط کرنش هسته تیر ساندویچی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(c)} &= f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} \\ &+ f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} &= g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t \\ \gamma_{xz}^{(c)} &= g_0 u_0 + g_3 u_1 + g_4 u_b + g_5 u_t \\ &+ g_6 \phi_b + g_7 \phi_t + f_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + f_1 \frac{\partial w_b}{\partial x} + f_2 \frac{\partial w_t}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

که در رابطه بالا داریم:

$$g_i = \frac{df_i}{dz_c}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

۲-۲- معادلات ساختاری رویه‌های تقویت شده با نانو

لوله‌های کربنی

معادلات ساختاری رویه‌های نانو کامپوزیتی برای تیر ساندویچی به صورت زیر بیان می‌شود [۲۳]:

انرژی جنبشی تیر ساندویچی بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T = \frac{1}{2} \left[\int_{V_c} \rho_c \left[\left(\frac{\partial U_c}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_c}{\partial t} \right)^2 \right] dV_c + \int_{V_b} \rho_f \left[\left(\frac{\partial U_b}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_b}{\partial t} \right)^2 \right] dV_b + \int_{V_t} \rho_f \left[\left(\frac{\partial U_t}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_t}{\partial t} \right)^2 \right] dV_t \right] \quad (17)$$

با جاگذاری میدان‌های جابه‌جایی گفته شده برای هسته و رویه‌های

بالا و پایین، تغییرات انرژی جنبشی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta T = \int_0^L \left(J_{044} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{055} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{011} \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + J_{022} \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \delta w_t}{\partial t} + J_{266} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{277} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{00}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{33}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + J_{00}^{(c)} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + J_{46}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{46}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{57}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{04}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{04}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{05}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{05}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{06}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{06}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{07}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{07}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{34}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + J_{34}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{35}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{35}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{36}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{36}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + J_{37}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + J_{37}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{45}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{45}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{47}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{47}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{56}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{56}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{67}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{67}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{01}^{(c)} \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + J_{01}^{(c)} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + J_{02}^{(c)} \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + J_{02}^{(c)} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_t}{\partial t} + J_{12}^{(c)} \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + J_{12}^{(c)} \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_t}{\partial t} \right) dx \quad (18)$$

که در رابطه بالا ثوابت بصورت زیر نوشته می‌شوند:

ضرایب سفتی و ضریب اتلاف هسته و اسکوالاستیک به ترتیب با Q_{ij}^c و η نشان داده شده است. ضرایب سفتی در رابطه بالا به شکل زیر بیان می‌شود:

$$Q_{11}^{(c)} = Q_{33}^{(c)} = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \\ Q_{13}^{(c)} = \nu_c Q_{11}^{(c)} \\ Q_{55}^{(c)} = G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} = \xi Q_{11}^{(c)} \\ \xi = \frac{1 - \nu_c}{2} \quad (14)$$

در نظر داریم با توجه به نقش محوری هسته در توزیع تنش‌های عرضی و برشی، و نیز با استناد به روابط تنش-کرنش وابسته به زمان، لحاظ اثرات ضریب پواسون در معادلات هسته و اسکوالاستیک امری ضروری تلقی شده است [۲۵ و ۲۶]. با جایگذاری رابطه ۷ در رابطه ۱۳، روابط تنش-جابه‌جایی برای هسته و اسکوالاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{(c)} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(Q_{11}^{(c)} \left(f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \right) + Q_{13}^{(c)} (g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t) \right) \\ \sigma_{zz}^{(c)} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(Q_{13}^{(c)} \left(f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \right) + Q_{33}^{(c)} (g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t) \right) \\ \sigma_{xz}^{(c)} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) Q_{55}^{(c)} \left(g_0 u_0 + g_3 u_1 + g_4 u_b + g_5 u_t + g_6 \phi_b + g_7 \phi_t + f_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + f_1 \frac{\partial w_b}{\partial x} + f_2 \frac{\partial w_t}{\partial x} \right) \quad (15)$$

۲-۴- معادلات حاکم بر تیر ساندویچی

معادلات حاکم بر تیر ساندویچی با هسته و اسکوالاستیک و رویه‌های نانوکامپوزیتی با اعمال اصل همپلتون مطابق رابطه زیر بدست می‌آیند [۲۷]:

$$\int_0^t \delta(U - T) dt = 0 \quad (16)$$

که در رابطه بالا U و T به ترتیب انرژی جنبشی و انرژی کرنشی سازه را نشان می‌دهد.

با جاگذاری روابط ۱۸ و ۲۱ در اصل همیلتون، معادلات حاکم بر تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های نانو کامپوزیتی بصورت زیر بدست می‌آیند:

δu_b :

$$\frac{\partial N_{xx}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(4)}}{\partial x} - S_{xz}^{(4)} - J_{044} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{45} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{46}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{47}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{04}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{34}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

δu_t :

$$\frac{\partial N_{xx}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(5)}}{\partial x} - S_{xz}^{(5)} - J_{45} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{055} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{56}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{57}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{05}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{35}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

δw_b :

$$\frac{\partial Q_{xz}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^{(1)}}{\partial x} - P_{zz}^{(1)} - J_{011} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - J_{12}^{(c)} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - J_{01}^{(c)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

δw_t :

$$\frac{\partial Q_{xz}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}^{(2)}}{\partial x} - P_{zz}^{(2)} - J_{12}^{(c)} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - J_{022} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - J_{02}^{(c)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

$\delta \phi_b$:

$$\frac{\partial M_{xx}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(6)}}{\partial x} - Q_{xz}^{(b)} - S_{xz}^{(6)} - J_{46}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{56}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{266} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{67}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{06}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{36}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (27)$$

$\delta \phi_t$:

$$\frac{\partial M_{xx}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(7)}}{\partial x} - Q_{xz}^{(t)} - S_{xz}^{(7)} - J_{57}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{47}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{67}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{277} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{07}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{37}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (28)$$

δu_0 :

$$\frac{\partial P_{xx}^{(0)}}{\partial x} - S_{xz}^{(0)} - J_{04}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{05}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{06}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{07}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{00}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (29)$$

δu_1 :

$$\frac{\partial P_{xx}^{(3)}}{\partial x} - S_{xz}^{(3)} - J_{34}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{35}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{36}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{37}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{33}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (30)$$

δw_0 :

$$\frac{\partial R_{xz}^{(0)}}{\partial x} - P_{zz}^{(0)} - J_{01}^{(c)} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - J_{02}^{(c)} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - J_{00}^{(c)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (31)$$

$$J_{011} = J_0^{(b)} + J_{11}^{(c)} \quad J_{022} = J_0^{(t)} + J_{22}^{(c)}$$

$$J_{044} = J_0^{(b)} + J_{44}^{(c)} \quad J_{055} = J_0^{(t)} + J_{55}^{(c)}$$

$$J_{266} = J_2^{(b)} + J_{66}^{(c)} \quad J_{277} = J_2^{(t)} + J_{77}^{(c)}$$

$$J_n^{(i)} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i z_i^n dz_i \quad i=t,b, \quad n=0,1,2 \quad (19)$$

$$J_{nm}^{(c)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \rho_c f_n(z_c) f_m(z_c) dz_c$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots, 7$$

انرژی کرنشی تیر ساندویچی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sigma_{xx}^{(c)} \varepsilon_{xx}^{(c)} + \sigma_{zz}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + \sigma_{xz}^{(c)} \gamma_{xz}^{(c)} \right) dV_c + \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sigma_{xx}^{(b)} \varepsilon_{xx}^{(b)} + \sigma_{xz}^{(b)} \gamma_{xz}^{(b)} \right) dV_b \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sigma_{xx}^{(t)} \varepsilon_{xx}^{(t)} + \sigma_{xz}^{(t)} \gamma_{xz}^{(t)} \right) dV_t$$

با استفاده از روابط ۶ و ۷ و هم‌چنین روابط ۱۲ و ۱۵، تغییرات انرژی کرنشی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U = b \int_0^L \left(P_{xx}^{(0)} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + P_{xx}^{(3)} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} + P_{xx}^{(4)} \frac{\partial \delta u_b}{\partial x} + P_{xx}^{(5)} \frac{\partial \delta u_t}{\partial x} + P_{xx}^{(6)} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial x} + P_{xx}^{(7)} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial x} + P_{zz}^{(0)} \delta w_0 + P_{zz}^{(1)} \delta w_b + P_{zz}^{(2)} \delta w_t + S_{xz}^{(0)} \delta u_0 + S_{xz}^{(3)} \delta u_1 + S_{xz}^{(4)} \delta u_b + S_{xz}^{(5)} \delta u_t + S_{xz}^{(6)} \delta \phi_b + S_{xz}^{(7)} \delta \phi_t + R_{xz}^{(0)} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + R_{xz}^{(1)} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + R_{xz}^{(2)} \frac{\partial \delta w_t}{\partial x} + N_{xx}^{(b)} \frac{\partial \delta u_b}{\partial x} + M_{xx}^{(b)} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial x} + Q_{xz}^{(b)} \delta \phi_b + Q_{xz}^{(b)} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + N_{xx}^{(t)} \frac{\partial \delta u_t}{\partial x} + M_{xx}^{(t)} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial x} + Q_{xz}^{(t)} \delta \phi_t + Q_{xz}^{(t)} \frac{\partial \delta w_t}{\partial x} \right) dx \quad (21)$$

که در روابط بالا داریم:

$$P_{xx}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xx}^{(c)} f_n(z_c) dz_c \quad P_{zz}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{zz}^{(c)} g_n(z_c) dz_c$$

$$R_{xz}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^{(c)} f_n(z_c) dz_c \quad S_{xz}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^{(c)} g_n(z_c) dz_c \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_{xx}^{(i)} \\ M_{xx}^{(i)} \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{xx}^{(i)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \end{Bmatrix} dz_i \quad Q_{xz}^{(i)} = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{xz}^{(i)} dz_i, \quad i=t,b$$

در رابطه بالا $[M]$ ، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس جرم، ماتریس میرایی و ماتریس سفتی سازه مدنظر می باشد. با حل رابطه ۳۴، مقادیر ویژه به شکل مختلط و بصورت زیر نوشته می شود:

$$\omega_n = \text{Re}(\omega_n) + j \text{Im}(\omega_n) \quad (35)$$

در نتیجه بخش حقیقی مقادیر ویژه فرکانس های طبیعی و بخش موهومی نرخ کاهش دامنه و سرعت میرایی ارتعاشات را نشان می دهند. در نتیجه فرکانس طبیعی و ضریب میرایی تیر به شکل زیر تعریف می گردد [۲۸]:

$$\Omega_n = \text{Re}(\omega_n), \quad \zeta_n = \frac{\text{Im}(\omega_n)}{|\omega_n|} \quad (36)$$

۴- بحث و نتایج

۴-۱- اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی تحقیق حاضر، یک تیر ساندویچی به طول ۰/۳ متر و با هسته ای الاستیک ($\eta = 0$) و رویه های همگن همسان گرد در نظر گرفته شده است. در جدول ۲ مشخصات فیزیکی و هندسی تیر ساندویچی مورد استفاده در اعتبارسنجی حاضر ارائه شده است. فرکانس های طبیعی تیر بر حسب هرتز در جدول ۳ در کنار مقادیر گزارش شده توسط یانگ و کیائو [۲۹] ارائه شده است. همان گونه که طبق نتایج مشخص است، یافته های تحلیلی یانگ و کیائو [۲۹] کاملاً با نتایج مدل بررسی شده در این مطالعه مطابقت دارد.

جدول (۲): مشخصات فیزیکی و هندسی تیر ساندویچی

هسته	رویه ها	
۳۶۰۰۰	۵۰	$E(Mpa)$
۴۴۰۰	۵۲/۰۶	$\rho(\frac{Kg}{m^3})$
۰/۲۵	۰/۳	ν
۲۰	۲۱	$h(mm)$

جدول (۳): مقایسه فرکانس های طبیعی تحقیق حاضر و مقاله یانگ و کیائو

Ω_3	Ω_2	Ω_1	
۱۳۱۴/۳	۸۲۷/۰۶	۳۲۶/۸۲	تحقیق حاضر
۱۳۰۸/۹۰	۸۲۴/۹۶	۳۲۵/۹۸	یانگ و کیائو [۲۹]

همچنین برای اثبات درستی تحقیق حاضر، اعتبار سنجی با پژوهش بیگلری و همکاران [۱۴]، ارائه شده است که در جدول ۴، قابل مشاهده می باشد. همان گونه که طبق نتایج مشخص

۳- روش حل معادلات حاکم بر تیر ساندویچی

در پژوهش حاضر، شرایط مرزی سیستم در دو انتهای تیر به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است؛ به این معنا که در نقاط انتهایی تیر، جابجایی عمودی صفر فرض شده و دوران حول محور عرضی آزاد می باشد. این نوع شرایط مرزی، که از جمله کلاسیک ترین و پرکاربردترین حالات در تحلیل سازه ها محسوب می شود، نه تنها با بسیاری از شرایط تجربی قابل تطبیق است، بلکه از نظر ریاضی نیز مزایای قابل توجهی دارد. به ویژه، این شرایط امکان بهره گیری از روش تحلیلی ناویر را فراهم می سازد، چرا که توابع پایه سینوسی مورد استفاده در این روش به طور ذاتی شرایط مرزی ساده را ارضا می کنند و نیازی به اعمال اصلاحات یا توابع وزن دار ندارند. در چارچوب این روش، متغیرهای وابسته مانند جابجایی، تنش یا تغییر شکل به صورت ترکیبی از سری های سینوسی توسعه داده می شوند که ضرایب آن ها از طریق اعمال معادلات حاکم و شرایط اولیه قابل تعیین هستند. این رویکرد، ضمن حفظ دقت تحلیلی، امکان بررسی رفتار دینامیکی تیر تحت بارهای متغیر را با پیچیدگی محاسباتی نسبتاً پایین فراهم می سازد.

در این روش متغیرها به صورت سری های زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned} u_b(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(b)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ u_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(t)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ w_b(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(b)}(t) \sin(\alpha_m x) \\ w_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(t)}(t) \sin(\alpha_m x) \\ \phi_b(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^{(b)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ \phi_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^{(t)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ u_0(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(0)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ u_1(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ w_0(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(0)}(t) \sin(\alpha_m x) \end{aligned} \quad (37)$$

که

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L} \quad (38)$$

با جاگذاری روابط ۳۲ در معادلات ۲۳ تا ۳۱، فرم بسته معادلات دیفرانسیل بصورت زیر حاصل می گردد:

$$\begin{aligned} [M]_{9 \times 9} \{\ddot{s}\}_{9 \times 1} + [C]_{9 \times 9} \{\dot{s}\}_{9 \times 1} \\ + [K]_{9 \times 9} \{s\}_{9 \times 1} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

است، یافته‌های تحلیلی بیگلی و همکاران [۱۴] کاملاً با نتایج مدل بررسی شده در این مطالعه مطابقت دارد.

جدول (۴): مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد مد اول تحقیق حاضر و

مقاله بیگلی و همکاران

$V_{CNT} = 0.17$	$V_{CNT} = 0.17$	$V_{CNT} = 0.12$	
۰٫۸۵۸۲	۰٫۶۷۰۱	۰٫۵۸۳۳	تحقیق حاضر
۰٫۸۰۹۴	۰٫۶۶۸۲	۰٫۵۸۳۰	بیگلی و همکاران [۱۴]

۲-۴- نتایج عددی

در این بخش به بررسی و ارزیابی نتایج عددی پرداخته شده است. هدف از این بخش بررسی تأثیر عوامل مختلف بر ارتعاشات آزاد سازه ساندویچی می‌باشد. مشخصات هندسی تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های نانولوله کربنی در جدول ۵ ارائه شده است. علاوه بر این، جداول ۶ و ۷ به ترتیب، خواص مواد هسته ویسکوالاستیک و خواص فیزیکی رویه‌های نانوکامپوزیتی (ماتریس زمینه و نانولوله‌های کربنی) را ارائه می‌دهند.

جدول (۵): مشخصات هندسی تیر ساندویچی

$\frac{h_c}{h}$	$\frac{h}{L}$	$\frac{b}{L}$	L (m)
۰٫۸	۰٫۰۴	۰٫۰۵	۲

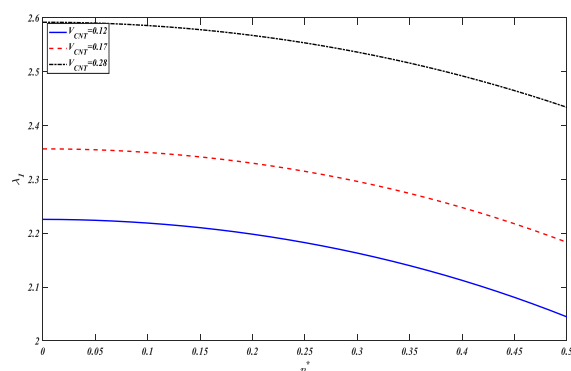
جدول (۶): خواص مواد هسته ویسکوالاستیک [۳۰]

ν	ρ ($\frac{Kg}{m^3}$)	G (Mpa)	E (Mpa)
۰٫۳	۹۶۸/۱	۰٫۶۹	۱/۷۹۴

جدول (۷): خواص فیزیکی رویه‌های نانوکامپوزیتی [۳۱]

	E_m (GPa)	۲/۵
Epoxy	ρ ($\frac{Kg}{m^3}$)	۱۱۵۰
	ν_m	۰٫۳۴
	E^{CNT} (Tpa)	۵/۶۴
CNT	G^{CNT} (Tpa)	۱/۹۴
	ρ^{CNT} ($\frac{Kg}{m^3}$)	۱۴۰۰

نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش پیدا می‌کند؛ چون فرکانس طبیعی سیستم نمادی از انرژی سازه می‌باشد. همچنین با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، سفتی سازه افزایش پیدا کرده و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم نیز افزایش پیدا می‌کند. همان‌گونه که در شکل ۳ نشان داده شده است، افزایش ضریب اتلاف سازه باعث افزایش ضریب میرایی سیستم می‌گردد، ولی در مقابل افزایش سفتی باعث کاهش ضریب میرایی سیستم می‌گردد، زیرا با افزایش سفتی سازه، دوره نوسانات سازه کاهش پیدا کرده و در نتیجه، زمان مؤثر برای اتلاف انرژی توسط نیروهای میرایی کاهش یافته و توانایی میرایی در تضعیف نوسانات نسبت به نیروهای بازگرداننده الاستیک، تضعیف می‌شود. پس در نتیجه با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، ضریب میرایی تیر ساندویچی کاهش پیدا می‌کند. همچنین نتایج حاصل از دو شکل ۲ و ۳ نشان می‌دهند که با افزایش کسر حجمی CNT از ۰٫۱۲ به ۰٫۲۸، فرکانس طبیعی پایه‌ای تیر به‌طور میانگین حدود ۱۵٪ افزایش یافته است؛ این افزایش ناشی از بهبود سختی مؤثر ماده مرکب در حضور CNTها می‌باشد. همچنین، ضریب میرایی معادل با افزایش کسر حجمی CNT از ۰٫۱۲ به ۰٫۲۸، حدود ۱۳٪ کاهش می‌یابد. در مصارف صنعتی، افزودن بیش از حد نانو ممکن است منجر به افزایش وزن، هزینه تولید، و پیچیدگی فرآیند ساخت شود. بنابراین، از منظر صنعتی، استفاده‌ی بهینه و کنترل‌شده از نانوذرات در محدوده‌ای که بیشینه‌ی عملکرد حاصل شود بدون تحمیل هزینه یا افت خواص دیگر، مناسب‌تر و منطقی‌تر است.



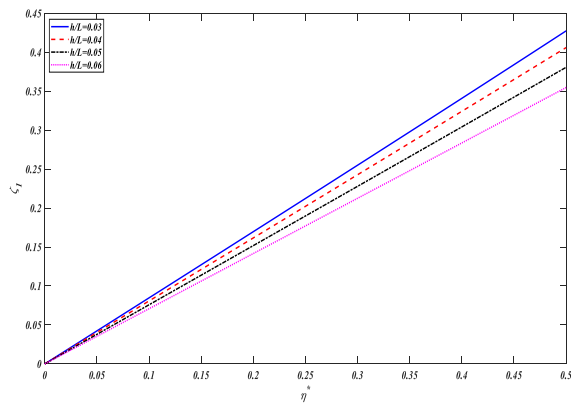
شکل (۲): اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر روی فرکانس طبیعی

مد اول تیر ساندویچی

پارامترهای مورد بررسی در این تحقیق، طبق روابط زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$\lambda_n = \Omega_n L \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (35)$$

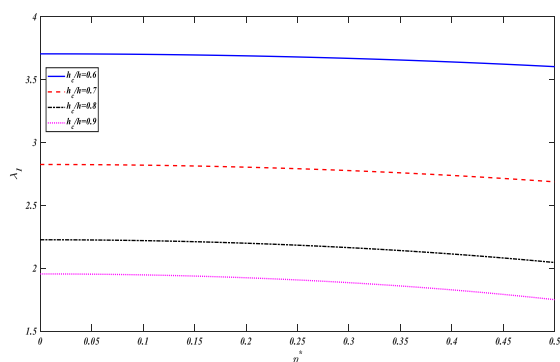
شکل‌های ۲ و ۳، به ترتیب اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی را بر روی فرکانس طبیعی مد اول و ضریب میرایی سازه ساندویچی نشان می‌دهد. در شکل ۲ مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب اتلاف سازه، استهلاک تیر ساندویچی نیز افزایش پیدا می‌کند، در



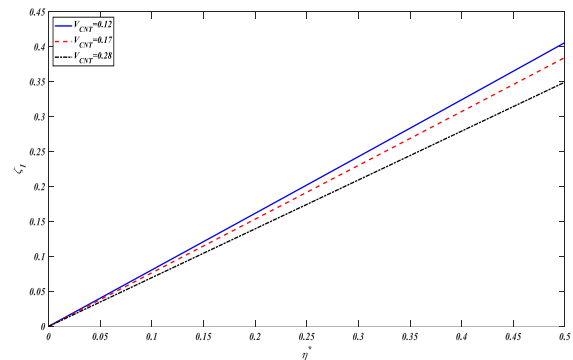
شکل (۵): اثر نسبت ضخامت به طول تیر بر روی ضریب میرایی ساندویچی

در شکل ۶ اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر بر فرکانس طبیعی مود اول سازه بررسی شده است. با افزایش ضخامت هسته و ثابت در نظر گرفتن ضخامت کل، ضخامت رویه‌ها کم می‌شوند. هسته یک ماده ویسکوالاستیک ضعیف است، ولی رویه‌ها، پلیمر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی هستند که با کاهش ضخامت آن‌ها، سفتی سازه کاهش می‌یابد. بنابراین همانطور که نتایج هم نشان می‌دهند، با افزایش ضخامت هسته فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد.

در شکل ۷ اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر بر ضریب میرایی سازه ساندویچی نشان داده شده است. مطابق این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت هسته، میرایی سازه ساندویچی افزایش پیدا می‌کند.



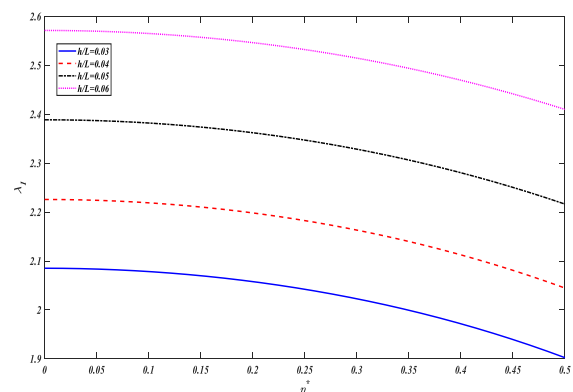
شکل (۶): اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر بر فرکانس طبیعی مود اول تیر ساندویچی



شکل (۳): اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر روی ضریب میرایی تیر ساندویچی

در شکل ۴، تأثیر نسبت ضخامت به طول تیر بر فرکانس طبیعی مود اول سیستم بررسی شده است. با افزایش ضخامت تیر در حالی که طول آن ثابت باقی می‌ماند، سختی خمشی تیر به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد، زیرا ممان اینرسی سطح مقطع با توان سوم ضخامت رشد می‌کند. در مقابل، جرم تیر تنها به‌صورت خطی با ضخامت افزایش می‌یابد. بنابراین، اثر افزایش سفتی بر رفتار دینامیکی سیستم غالب بوده و موجب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. این پدیده به‌وضوح در نتایج مشاهده شده و نشان می‌دهد که افزایش ضخامت تیر منجر به بهبود پاسخ ارتعاشی آن در مود اول خواهد شد.

تغییرات نسبت ضخامت به طول تیر بروی ضریب میرایی سازه در شکل ۵ نشان داده شده است. ضریب میرایی که بیانگر توانایی سازه در جذب و اتلاف انرژی ارتعاشی است، معمولاً با سفتی رابطه‌ای معکوس دارد؛ به‌طوری‌که با افزایش سفتی، میزان اتلاف انرژی کاهش می‌یابد. بنابراین، همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، افزایش ضخامت تیر ساندویچی منجر به کاهش ضریب میرایی سیستم می‌گردد، که این موضوع نشان‌دهنده کاهش توانایی سازه در جذب نوسانات و افزایش پاسخ ارتعاشی آن در شرایط تحریک خارجی است.



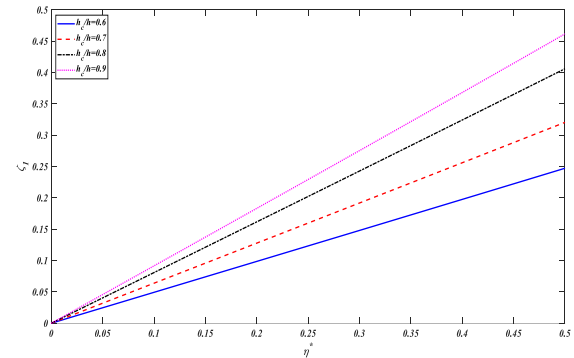
شکل (۴): اثر نسبت ضخامت به طول تیر بر فرکانس طبیعی مود اول تیر ساندویچی

مشتقات جزئی می‌باشند که برای حل این معادلات تعادل، از روش تحلیلی ناویر در حوزه‌ی مکان استفاده شده است. اثر پارامترهای مهمی هم‌چون کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، نسبت ضخامت به طول تیر و نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر بر فرکانس طبیعی و ضریب میرایی سازه ساندویچی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. با تحلیل نتایج ارائه شده، نکات مهمی استنباط شدند که عبارتند از:

- با افزایش ضریب اتلاف سازه، استهلاک تیر ساندویچی نیز افزایش پیدا می‌کند، در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش پیدا می‌کند؛ چون فرکانس طبیعی سیستم نمادی از انرژی سازه می‌باشد.
- با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، سفتی سازه افزایش پیدا کرده و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم نیز افزایش پیدا می‌کند، ولی در مقابل ضریب میرایی تیر ساندویچی کاهش پیدا می‌کند.
- افزایش ضخامت تیر باعث افزایش فرکانس طبیعی و کاهش ضریب میرایی سازه می‌گردد.
- با افزایش ضخامت هسته و ثابت در نظر گرفتن ضخامت کل، ضخامت رویه‌ها کم می‌شوند. هسته یک ماده ویسکوالاستیک ضعیف است، ولی رویه‌ها، پلیمر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی هستند که با کاهش ضخامت آن‌ها، سفتی سازه کاهش می‌یابد. در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش و ضریب میرایی سیستم افزایش پیدا می‌کند.

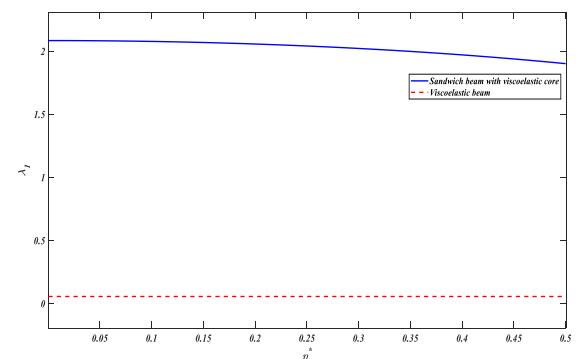
۶- مراجع

- [1] Teymouri H, Biglari H. Evaluation of wave propagation in a transversely isotropic monolayer with finite thickness by the potential functions method. *Aerospace Mechanics*. 2022; 18(3): 13-26. (In Persian) DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1401.18.3.2.4>
- [2] Teymouri H, Biglari H. Elastodynamic Green's functions for sandwich panels with aluminum foam core and transversely isotropic face sheets using potential functions method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024; 160: 258-272. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.12.033>
- [3] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press. 2004.
- [4] Yang J, Chen Y, Xiang Y, Jia X. Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load. *Journal of Sound and Vibration*. 2008; 312(1): 166-181. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.034>
- [5] Rahnama M, Morad Sheikh M, Hamzeloo SR. Free vibration behavior of three-skin conical shells with composite lattice core based on semi-analytical and finite element methods. *Aerospace Mechanics*. 2024; 20(3): 75-86. (In Persian) DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1401.20.3.75.86.4>



شکل (۷): اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر بر روی ضریب میرایی تیر ساندویچی

در شکل ۸، مقایسه‌ای میان فرکانس طبیعی مد اول تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های نانو کامپوزیتی، و تیر تک‌لایه ویسکوالاستیک فاقد رویه‌های نانو کامپوزیتی ارائه شده است. تحلیل نمودار مذکور به‌وضوح نشان می‌دهد که حضور رویه‌های نانو کامپوزیتی در ساختار تیر ساندویچی منجر به افزایش چشمگیر سفتی مؤثر سازه و در پی آن، ارتقاء فرکانس طبیعی آن می‌گردد؛ در حالی که تیر تک‌لایه ویسکوالاستیک، به دلیل فقدان این رویه‌ها، از سفتی مکانیکی به‌مراتب پایین‌تری برخوردار بوده و در نتیجه، فرکانس طبیعی آن به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد.



شکل (۸): مقایسه فرکانس طبیعی مد اول تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های نانو کامپوزیتی، و تیر تک‌لایه ویسکوالاستیک فاقد رویه‌های نانو کامپوزیتی

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و رویه‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی که کاربردهای زیادی در صنایع نظامی، هوافضا، صنایع دریایی و غیره دارد، مورد بررسی واقع شد. با بکارگیری تئوری سه لایه تیر ساندویچی که شامل تئوری تیموشنکو برای رویه‌ها و تئوری فراستیک برای هسته تیر ساندویچی می‌باشد و هم‌چنین به کمک اصل همیلتون، معادلات حاکم بر سیستم بدست آمدند. معادلات به‌دست آمده به صورت معادلات دیفرانسیل پیچیده با

- vibration analysis of symmetric sandwich structures with a viscoelastic core. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2013; 68: 39-51. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.01.004>
- [19] Tafreshi ES, Darabi B, Hamed J, Mahbadi H. Forced vibration analysis of a sandwich beam with functionally porous faces and viscoelastic core using Golla-Hughes-McTavish model. *Acta Mechanica*. 2023; 234(9): 4343-4364. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03600-8>
- [20] Teymouri H, Biglari H, Sadeghi MH. Effects of Frequency Dependency of Materials Behavior on the Dynamic Response of the Viscoelastic Beam Under the Moving Mass. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2025: 2650266. **DOI:** <https://doi.org/10.1142/S0219455426502664>
- [21] Ghorbanpour Arani A, Haghparast E, Ghorbanpour Arani AH. Size-dependent vibration of double-bonded carbon nanotube-reinforced composite microtubes conveying fluid under longitudinal magnetic field. *Polymer Composite*. 2016; 37(5): 1375-1383. **DOI:** <https://doi.org/10.1002/pc.23306>
- DOI:** [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1992\)118:5\(1026\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:5(1026))
- [22] Ke LL, Yang J, Kitipornchai S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Composite Structures*. 2010; 92(3): 676-683. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.024>
- [23] Mohammadimehr M, Okhravi SV, Akhavan Alavi SM. Free vibration analysis of magneto-electro-elastic cylindrical composite panel reinforced by various distributions of CNTs with considering open and closed circuits boundary conditions based on FSDT. *Journal of Vibration and Control*. 2018; 24(8): 1551-1569. **DOI:** <https://doi.org/10.1177/1077546316664022>
- [24] Lakes RS, Wineman A. On Poisson's Ratio in Linearly Viscoelastic Solids. *Journal of Elasticity*. 2006; 85: 287-297. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s10659-006-9070-4>
- [25] Farfan-Cabrera LI, Pascual-Francisco JB. An Experimental Methodological Approach for Obtaining Viscoelastic Poisson's Ratio of Elastomers from Creep Strain DIC-Based Measurements. *Experimental Mechanics*. 2022; 62: 45-63. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s11340-021-00792-9>
- [26] Biglari H, Teymouri H, Foroutan M. Application of Auxetic Core to Improve Dynamic Response of Sandwich Panels Under Low-Velocity Impact. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2024; 49: 11683-11697. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s13369-024-08817-w>
- [27] Gao JX, Liao WH. Vibration analysis of simply supported beams with enhanced self-sensing active constrained layer damping treatments. *Journal of sound and Vibration*. 2005; 280: 329-357. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.12.019>
- [28] Yang M, Qiao P. Higher-order impact modeling of sandwich structures with flexible core. *International Journal of Solids and Structures*. 2005; 42: 5460-5490. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.037>
- [29] Bilasse M, Daya EM, Azrar L. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.037>
- [6] Şimşek M, Kocatürk T. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*. 2009; 90(4): 465-473. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.04>
- [7] Safaei B, Onyibo EC, Goren M, Kotrasova K, Yang Z, Arman S, Asmael M. Free vibration investigation on RVE of proposed honeycomb sandwich beam and material selection optimization. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2023; 21(1): 31-50. **DOI:** <https://doi.org/10.22190/FUME220806042S>
- [8] Belkhouja MEA, Chorfi SM, Belalia SA, Belkhouja Y. Bending and free vibrations analysis of sandwich beams with porous functionally graded face sheets and a graphene platelets-reinforced aluminum core using a new quasi-3D beam theory. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2025; 13(1): 122. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s42417-024-01646-z>
- [9] Yousefzadeh S, Doostdar M. *Natural Frequencies Analysis of a Rotating Tapered Timoshenko Beam Made of Functionally Graded Material with Actuated Piezoelectric Layer*. *Aerospace Mechanics*. 2022; 18(2): 143-156. (In Persian) **DOR:** <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1401.18.2.1.0.0>
- [10] Dzenis Y. Structural nanocomposites. *Science*. 2008; 319(5862): 419-420. **DOI:** <https://doi.org/10.1126/science.1151434>
- [11] Ke L-L, Yang J, Kitipornchai S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Composite Structures*. 2010; 92(3): 676-683. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.04>
- [12] Ebrahimi F, Dabbagh A, Rastgoo A. Free vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite plates with agglomerated nanoparticles. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2021; 49(4): 487-510. **DOI:** <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1692665>
- [13] Moradi-Dastjerdi R, Payganeh GH, Malek-Mohammadi H. Free Vibration Analyses of Functionally Graded CNT Reinforced Nanocomposite Sandwich Plates Resting on Elastic Foundation. *Journal of Solid Mechanics*. 2015; 7(2): 158-172. **DOR:** <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.20083505.2015.7.2.4.7>
- [14] Biglari H, Teymouri H, Shokouhi A. Dynamic Response of Sandwich Beam with Flexible Porous Core Under Moving Mass. *Mechanics of Composite Materials*. 2024; 60(1): 163-182. **DOI:** <https://doi.org/10.1007/s11029-024-10181-7>
- [15] Lakes R. *Viscoelastic materials*. Cambridge university press. 2009.
- [16] Hamed E, Rabinovitch O. Modeling and Dynamics of Sandwich Beams with a Viscoelastic Soft Core. *AIAA Journal*. 2009; 47(9): 2194-2211. **DOI:** <https://doi.org/10.2514/1.41840>
- [17] Meunier M, Shenoi RA. Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2001; 54(2-3): 243-454. **DOI:** [https://doi.org/10.1016/S02638223\(01\)00094-0](https://doi.org/10.1016/S02638223(01)00094-0)
- [18] Won SG, Bae SH, Cho JR, Bae SR, Jeong WB. Three-layered damped beam element for forced

- Journal of Sound and Vibration. 2010; 329(23): 4950-4969. **DOI:** <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.06.012>
- [30] Li C, Li P, Zhong B, Miao X. Large-amplitude vibrations of thin-walled rotating laminated composite cylindrical shell with arbitrary boundary conditions. Thin-Walled Struct. 2020; 156: 106966. **DoI:** <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.106966>.