



Reduced-Order Sliding Mode and Super-Twisting Observers for Nonlinear Electro-Hydraulic Systems: Lyapunov-Based Design and Accuracy–Complexity Analysis

Hamidreza NasrEsfahani¹, Seyed Ali Zahiripour^{2*} 

¹ Master's Student, University of Kashan, Kashan, Iran. Email: hrnsr315@gmail.com

² Assistant Professor, University of Kashan, Kashan, Iran. (*Correspondence: Zahiripour@kashanu.ac.ir)

HIGHLIGHTS

- The RO-HOSMO observer reduces the model dimension and focuses on reconstructing unmeasured states, thereby improving computational speed.
- The performance of RO-HOSMO is preserved in the presence of parametric uncertainties, measurement noise, and inherent system nonlinearities, providing a stable estimation.

ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 24 March 2026

Received in revised form: 19 May 2026

Accepted: 09 June 2026

Available online: 24 June 2026

*Correspondence:

Zahiripour@kashanu.ac.ir

Keywords:

Electrohydraulic System

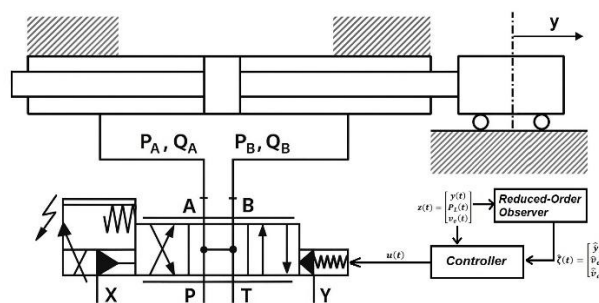
Sliding-Mode Observer

Reduced-Order Observer

Super-Twisting Algorithm

State Estimation

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

Electrohydraulic systems (EHSs), despite their high power and force density, pose significant challenges for accurate and robust state estimation due to inherent nonlinearities, friction effects, fluid compressibility, and various uncertainties. In this paper, two reduced-order sliding mode observer (SMO) structures are developed, including a first-order sliding mode observer and a high-order sliding mode observer based on the Super-Twisting Algorithm (STA). Within this framework, a Lyapunov-based stability analysis is established for the reduced-order configurations, and sufficient analytical conditions for selecting the observer gains are derived. Furthermore, the high-order sliding mode observer is reformulated into a reduced-order structure, and its stability is rigorously analyzed according to the resulting estimation error dynamics.

The adoption of reduced-order structures leads to decreased computational burden and faster state reconstruction compared to their full-order counterparts. To evaluate performance, the proposed observers are implemented on a five-state electrohydraulic system model under measurement noise, external disturbances, and parametric uncertainties. Their performance is compared with that of an Extended Kalman Filter (EKF) and a derivative-based observer employing a low-pass filter. Simulation results demonstrate that the reduced-order Super-Twisting sliding mode observer achieves superior estimation accuracy, faster convergence, and enhanced robustness against noise and disturbances relative to the other observers considered.

Cite this article: NasrEsfahani, H R[®], Zahiripour, S A[®]. Reduced-Order Sliding Mode and Super-Twisting Observers for Nonlinear Electro-Hydraulic Systems: Lyapunov-Based Design and Accuracy–Complexity Analysis. Journal of Aerospace Mechanics. 2025; 22 (2): 61-78.

DOI: <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1564>

© Author(s) retain the copyright and full publishing rights

Publisher: Imam Hossein Comprehensive University.



Comprehensive Abstract

Electro-hydraulic systems (EHSs) are widely used in industrial and aerospace applications due to their high power-to-weight ratio and fast response. However, achieving accurate and robust state estimation for these systems is a significant challenge because of their inherent strong nonlinearities, including Coulomb friction, fluid compressibility, and complex servo-valve dynamics, as well as parametric uncertainties and measurement noise. While full-order sliding mode observers (FO-SMOs) offer robustness, they often come with high computational complexity, making them unsuitable for real-time applications.

This paper addresses this challenge by proposing two novel reduced-order sliding mode observer structures designed specifically for nonlinear EHSs: a reduced-order first-order sliding mode observer (RO-SMO) and a reduced-order high-order sliding mode observer (RO-HOSMO) based on the Super-Twisting Algorithm (STA). The core innovation of this work lies in the systematic reduction of the observer's dynamic order, focusing solely on reconstructing the unmeasured states (piston velocity and spool velocity), while using the available measured states (position, load pressure, and spool position) as auxiliary variables. This approach significantly reduces the computational burden and enhances processing speed compared to standard full-order configurations, without sacrificing the inherent robustness of sliding mode methodologies.

A central contribution of this research is the rigorous Lyapunov-based stability analysis performed for both proposed reduced-order structures. Unlike many prior studies that focus on full-order observers or lack a comprehensive stability proof, this paper provides explicit, analytical sufficient conditions for selecting the observer gains. For the RO-SMO, a detailed Lyapunov analysis is conducted that considers the Lipschitz nonlinearity of the friction model, leading to straightforward gain selection criteria. For the more advanced RO-HOSMO, the design process involves reformulating the estimation error dynamics into a standard super-twisting form. A dedicated Lyapunov function is then employed to derive the necessary and sufficient conditions for finite-time convergence and stability, explicitly accounting for the bounded disturbances and model uncertainties.

The performance of the proposed reduced-order observers (RO-SMO and RO-HOSMO) is rigorously evaluated through extensive numerical simulations on a comprehensive five-state nonlinear EHS model. The simulation environment includes the effects of Coulomb friction, fluid compressibility, and servo-valve nonlinearities. To create realistic operating conditions, the observers are tested under three distinct input scenarios (sinusoidal, step, and ramp), in the presence of significant measurement noise (white Gaussian), external bounded disturbances, and parametric uncertainties of up to 15%. The results are benchmarked against two established estimation methods: the Extended Kalman Filter (EKF) and a derivative-based observer combined with a low-pass filter (FDOB).

The simulation results are analyzed using a comprehensive set of performance metrics, including Root Mean Square (RMS) error, Peak error, settling time, error energy, and the RMS of the error derivative to assess smoothness and chattering. Key findings demonstrate that the proposed RO-HOSMO consistently outperforms all other observers across most metrics. It achieves superior estimation accuracy (lower RMS and peak errors) and the fastest convergence rate for both unmeasured states. Furthermore, the use of the Super-Twisting algorithm effectively mitigates chattering, providing smoother and more robust estimates compared to the conventional RO-SMO, while the RO-SMO, in turn, is significantly more robust and accurate than the EKF and FDOB. In contrast, the FDOB exhibited the worst performance, with very high sensitivity to noise and significant estimation errors. The EKF demonstrated reasonable accuracy but slower convergence and less robustness compared to the sliding mode-based observers.

A crucial aspect of this study is the analysis of computational efficiency. A time-benchmark analysis was conducted under identical conditions. The results confirm the theoretical advantage of the reduced-order structures: the RO-SMO achieved a 63% reduction in execution time compared to its full-order counterpart, while the RO-HOSMO achieved a 34% reduction. This trade-off between accuracy and computational cost positions the RO-HOSMO as the superior choice for applications demanding high precision and robustness, whereas the RO-SMO emerges as an excellent cost-effective solution for real-time implementations with limited processing resources.

In conclusion, this paper presents a significant advancement in the state estimation of nonlinear electro-hydraulic systems. The proposed RO-HOSMO, with its rigorous Lyapunov-based stability guarantees, superior estimation performance, and reduced computational cost, offers a robust, accurate, and efficient solution for real-world industrial applications. The RO-SMO also provides a valuable, simpler, and computationally lighter alternative. This work establishes a clear framework for designing and analyzing reduced-order nonlinear observers, potentially improving the performance and reliability of modern electro-hydraulic control systems.



رؤیتگرهای مد لغزشی و فرا پیچشی مرتبه کاهش یافته برای سیستم‌های الکتروهیدرولیک غیر خطی: طراحی مبتنی بر لیاپانوف و تحلیل دقت - پیچیدگی

حمیدرضا نصر اصفهانی^۱، سید علی ظهیری پور^{۲*} ID

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران. (hrnsr315@gmail.com)

^۲ دانشجوی دکتری، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران. (نویسنده مسئول: Zahiripour@kashanu.ac.ir)

برجسته‌ها

- رؤیتگر RO-HOSMO با کاهش ابعاد مدل و تمرکز بر بازسازی حالت‌های اندازه‌گیری نشده، موجب افزایش سرعت پردازش می‌شود.
- کارایی RO-HOSMO در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری، نویز اندازه‌گیری و غیرخطی‌های ذاتی سیستم حفظ شده و تخمین پایدار ارائه می‌دهد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

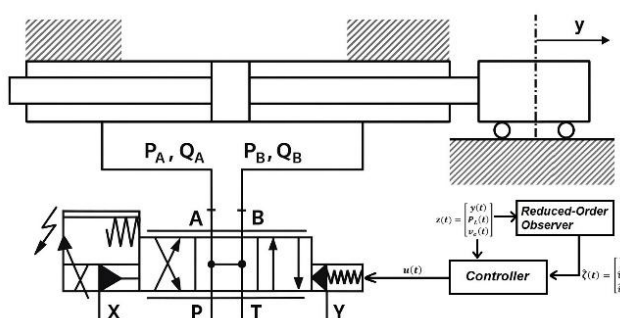
نوع مقاله: علمی پژوهشی
دریافت: ۰۴ فروردین ۱۴۰۴
بازنگری: ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۵
پذیرش: ۱۹ خرداد ۱۴۰۵
ارائه آنلاین: ۰۳ تیر ۱۴۰۵
*نویسنده مسئول:

Zahiripour@kashanu.ac.ir

کلید واژه‌ها:

سامانه الکتروهیدرولیک
رؤیتگر مد لغزشی
رؤیتگر مرتبه کاهش یافته
الگوریتم فرا پیچشی
تخمین حالت

چکیده گرافیکی



چکیده

سامانه‌های الکتروهیدرولیک با وجود توان و چگالی نیروی بالا، به دلیل رفتارهای غیر خطی، اصطکاک، تراکم‌پذیری سیال و عدم قطعیت‌ها، تخمین پایدار و دقیق متغیرهای حالت را با چالش روبه‌رو می‌سازند. در این مقاله، دو ساختار رؤیتگر مود لغزشی مرتبه کاهش یافته شامل رؤیتگر مود لغزشی مرتبه اول و رؤیتگر مود لغزشی مرتبه بالا مبتنی بر الگوریتم فرا پیچشی توسعه داده می‌شوند. در این چارچوب، تحلیل پایداری مبتنی بر تابع لیاپانوف برای ساختارهای کاهش مرتبه ارائه شده و شرایط کافی برای انتخاب ضرایب رؤیتگر به صورت تحلیلی استخراج می‌گردد. افزون بر این، رؤیتگر مود لغزشی مرتبه بالا در قالب یک ساختار کاهش مرتبه بازطراحی شده و تحلیل پایداری آن متناسب با دینامیک جدید خطای تخمین ارائه می‌گردد. به کارگیری ساختارهای کاهش مرتبه منجر به کاهش بار محاسباتی و افزایش سرعت بازسازی حالت‌ها در مقایسه با نسخه‌های مرتبه کامل می‌شود. به منظور ارزیابی عملکرد، رؤیتگرهای پیشنهادی بر روی مدل پنج‌حالت سامانه الکتروهیدرولیک و در حضور نویز اندازه‌گیری، اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت‌های پارامتری شبیه‌سازی شده و نتایج با فیلتر کالمن توسعه یافته و یک رؤیتگر مشتق‌گیر مبتنی بر فیلتر پایین گذر مقایسه شده‌اند؛ نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد رؤیتگر مود لغزشی مرتبه بالای فرا پیچشی کاهش یافته برتری محسوس در دقت تخمین، سرعت همگرایی و مقاومت در برابر نویز و اغتشاش نسبت به سایر رؤیتگرهای مورد بررسی ارائه می‌دهد.

استناد: نصر اصفهانی، حمیدرضا، ظهیری پور، سید علی. رؤیتگرهای مد لغزشی و فرا پیچشی مرتبه کاهش یافته برای سیستم‌های الکتروهیدرولیک غیر خطی: طراحی مبتنی بر لیاپانوف و تحلیل دقت - پیچیدگی. مکانیک هوا فضا. ۱۴۰۵؛ ۲۲ (۲): ۷۸-۶۱.

DOI: <https://doi.org/10.47176/MAJ.2025.1564>

© نویسنده(گان) حق نشر و حقوق کامل انتشار را برای خود محفوظ می‌دارند.

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع).



1- مقدمه

در سیستم‌های الکتروهیدرولیک¹ (EHS)، دستیابی به کنترل دقیق مستلزم دسترسی به متغیرهای داخلی نظیر فشار و سرعت است [1]؛ اما اندازه‌گیری مستقیم آن‌ها در کاربردهای صنعتی، به دلیل هزینه و حساسیت بالای حسگرها، محدودیت فضای نصب و نویز اندازه‌گیری، اغلب عملی نیست. افزون بر این، وجود غیرخطی‌های شدید، ناحیه‌مرده شیرها، اصطکاک و عدم قطعیت‌های پارامتری، مدل‌سازی دقیق این سامانه‌ها را با چالش مواجه می‌سازد. از این رو، طراحی یک ریتگر مقاوم با قابلیت تحمل غیرخطی‌ها و اغتشاشات و فراهم‌سازی تخمین دقیق و بلادرنگ متغیرهای حیاتی، امری ضروری است.

طراحی ریتگر برای EHSها طی سال‌های اخیر مسیر تکاملی گسترده‌ای را طی کرده است. نخستین تلاش‌ها باتکیه بر ریتگرهای خطی کلاسیک نظیر روش لیون برگر² صورت گرفت؛ اما این رویکرد به دلیل اتکای کامل به مدل‌های خطی، در مواجهه با رفتارهای ذاتاً غیرخطی و دینامیک پیچیده سامانه، فاقد دقت و پایداری لازم بود [2]. به‌منظور عبور از این محدودیت‌ها، نسل نخست ریتگرهای غیرخطی بر پایه فیلترهای کالمن توسعه‌یافته³ (EKF) برای این سامانه‌ها پیشنهاد شد [3]؛ EKF با خطی‌سازی موضعی دینامیک سیستم، تخمینی سازگار اما وابسته به دقت مدل خطی شده فراهم می‌کرد [4]. در ادامه، برای بهبود این مسئله و کاهش حساسیت به خطی‌سازی، فیلتر کالمن بی‌اثر⁴ (UKF) معرفی گردید که با استفاده از تقریب آماری مبتنی بر نقاط سیگما، تخمینی دقیق‌تر و پایدارتر نسبت به EKF ارائه داد [5]. اما همچنان به مدل دقیق سیستم متکی بوده و در برابر نامعینی‌های ساختاری و اغتشاشات غیرمدل‌شده از استحکام کافی برخوردار نبودند. این کاستی‌ها توجه پژوهشگران را به رویکردهای مقاوم جلب کرد و ریتگرهای مود لغزشی⁵ (SMO) به‌عنوان یکی از بنیادی‌ترین ابزارهای تخمین مقاوم مطرح شدند. ساختارهای SMO با بهره‌گیری از دینامیک لغزشی قادر به تحمل اغتشاشات محدود و عدم قطعیت‌های پارامتری هستند [6]؛ با این حال، یکی از چالش‌های شناخته‌شده آن‌ها، وقوع پدیده‌ی ناخواسته‌ای موسوم به پدیده چت رینگ است که می‌تواند موجب تضعیف عملکرد تخمین و افزایش خطای مشاهدات گردد. در همین راستا، ریتگرهای مود لغزشی مرتبه بالا⁶ (HOSMO) به‌عنوان راه‌حلی مؤثر برای کاهش پدیده چت رینگ توسعه‌یافته و دستیابی به دقت بالاتر را در نواحی لغزشی امکان‌پذیر ساخته‌اند [7,8]. اخیراً ترکیب سازوکارهای تطبیقی با

HOSMO، تحت عنوان ریتگر مود لغزشی مرتبه بالا با ضرایب تطبیقی⁷ (A+HOSMO)، با تنظیم خودکار ضرایب مقاوم، منجر به بهبود پایداری و عملکرد این ساختار شده است [9,10]. همچنین ریتگرهای حالت توسعه‌یافته مبتنی بر مود لغزشی⁸ (ESMO)، امکان تخمین هم‌زمان حالت‌ها و عدم قطعیت‌ها را فراهم کرده و نتایج چشمگیری را در کاربردهای الکتروهیدرولیک نشان داده‌اند [11,12].

در راستای رفع محدودیت‌های رویکردهای پیشین که عمدتاً بر ریتگرهای مرتبه کامل در سامانه‌های الکتروهیدرولیک متمرکز بوده‌اند، نوآوری این مقاله بر طراحی و تحلیل ریتگرهای مود لغزشی در چارچوب کاهش مرتبه استوار است. در بسیاری از مطالعات پیشین، تمامی حالات سیستم به‌صورت هم‌زمان تخمین زده می‌شوند که این موضوع علاوه بر افزایش ابعاد دینامیک ریتگر، منجر به افزایش پیچیدگی محاسباتی، حساسیت بیشتر به نویز اندازه‌گیری و افزایش زمان پردازش می‌گردد؛ درحالی‌که در بسیاری از کاربردهای عملی، تنها بخشی از حالات سیستم نیازمند بازسازی هستند.

بر همین اساس، در این مقاله یک ریتگر مرتبه کاهش‌یافته مود لغزشی⁹ (RO-SMO) و همچنین یک ریتگر مرتبه کاهش‌یافته مود لغزشی مرتبه بالا¹⁰ (RO-HOSMO) توسعه داده می‌شوند که صرفاً بر بازسازی حالت‌های اندازه‌گیری نشده تمرکز دارند. این باز فرموله‌سازی موجب کاهش مرتبه دینامیک ریتگر، کاهش بار محاسباتی و افزایش سرعت پردازش شده و درعین حال ویژگی مقاوم‌بودن ساختارهای مود لغزشی در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات حفظ می‌شود.

برخلاف بخش قابل‌توجهی از مطالعات پیشین که عمدتاً بر نسخه‌های مرتبه کامل ریتگرهای مود لغزشی یا صرفاً ارائه ساختار کنترلی متمرکز بوده‌اند، در این مقاله ساختار ریتگرهای مود لغزشی در فضای کاهش مرتبه به‌صورت تحلیلی بازطراحی شده است. به‌طور مشخص، برای ریتگر RO-SMO تحلیل پایداری صریح مبتنی بر تابع لیاپانوف ارائه شده و شرایط کافی برای انتخاب ضرایب ریتگر استخراج می‌شود. همچنین اثر ضرایب طراحی بر دقت تخمین حالات مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این، ساختار ریتگر مود لغزشی مرتبه بالا نیز در قالب یک فرم کاهش مرتبه بازطراحی شده و تحلیل پایداری آن متناسب با دینامیک جدید خطای تخمین ارائه می‌شود. در نهایت، عملکرد ساختارهای پیشنهادی از نظر دقت تخمین، رفتار مقاوم و هزینه محاسباتی با ساختارهای متناظر مرتبه کامل مقایسه شده است.

⁷ Adaptive + HOSMO (A+HOSMO)⁸ Extended Sliding Mode Observer (ESMO)⁹ Reduced-Order Sliding Mode Observer (RO-SMO)¹⁰ Reduced-Order High-Order Sliding Mode Observer¹ Electro-Hydraulic System (EHS)² Luenberger³ Extended Kalman Filter (EKF)⁴ Unscented Kalman filter (UKF)⁵ Sliding Mode Observers (SMO)⁶ High-Order Sliding Mode Observer (HOSMO)

که در آن، m جرم بار، b ضریب اصطکاک لزج^۲، $F_f(\dot{y})$ نیروی اصطکاک، A_p سطح مقطع پیستون و $P_L(t) = P_A(t) - P_B(t)$ فشار بار است؛ به طوری که $P_A(t)$ و $P_B(t)$ به ترتیب فشارهای موجود در دو محفظه سیلندر هستند. نیروی اصطکاک با استفاده از معادلات زیر مدل سازی می شود:

$$F_f(\dot{y}) = \begin{cases} F_c \text{sign}(\dot{y}) + \mu m g \text{sign}(\dot{y}), & \dot{y} \neq 0 \\ Z |Z| \leq F_{c0} + \mu_0 m g, & \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن F_c نیروی اصطکاک کولمب^۳ در عملکرد هیدرولیکی است که برابر با مقدار ثابت آن F_{c0} فرض شده است. μ ضریب اصطکاک کولمب در ریل خطی است که برابر با مقدار ثابت آن μ_0 فرض شده است. g شتاب گرانشی و Z نیروی مماسی خالص است که در حالت سکون بر عملکرد وارد می شود [14]. دینامیک فشار بار به شرح زیر است [15]:

$$\frac{V_0}{2\beta} \dot{P}_L = -A_p \dot{y} + Q_L \quad (3)$$

که در آن V_0 حجم هر محفظه برای موقعیت مرکزی پیستون، $Q_L = (Q_A + Q_B)/2$ جریان بار و β مدول بالک^۴ مؤثر سیال است. جریان بار به فشار تغذیه P_s ، فشار بار P_L و موقعیت قرقره شیر^۵ مطابق با معادله زیر بستگی دارد:

$$Q_L = \psi(v_e) \sqrt{P_s - |P_L|} \quad (4)$$

که در آن $v_e(t)$ سیگنال جابه جایی قرقره شیر و $\psi(v_e)$ یک بهره است که به هندسه شیر سروو اتخاذ شده بستگی دارد. بیان تحلیلی $\psi(v_e)$ را می توان چنین فرض کرد:

$$\psi(v_e) = \begin{cases} k_{qp} \left[v_e + \left(\frac{k_{q0}}{k_{qp}} - 1 \right) v_{ep} \right], & v_e > v_{ep} \\ k_{q0} v_e, & v_{en} \leq v_e \leq v_{ep} \\ k_{qn} \left[v_e + \left(\frac{k_{q0}}{k_{qn}} - 1 \right) v_{en} \right], & v_e < v_{en} \end{cases} \quad (5)$$

که در آن $k_{qp}, k_{qn}, k_{q0}, v_{ep}, v_{en}$ پارامترهایی هستند که باید به صورت تجربی شناسایی شوند. دینامیک شیر سروو را می توان به خوبی با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر نشان داد [16]:

$$\frac{\ddot{v}_e}{w_{nv}^2} + \frac{2\epsilon_v}{w_{nv}} \dot{v}_e + v_e = k_e u + v_{e0} \quad (6)$$

که در آن پارامترهای w_{nv} و ϵ_v به ترتیب فرکانس طبیعی و نسبت میرایی شیر هستند، v_{e0} بایاس موقعیت قرقره، k_e بهره ورودی و $u(t)$ فرمان شیر است. در نهایت، معادلات حاکم بر دینامیک کل سیستم عبارت اند از:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + b\dot{y} + F_f(\dot{y}) = A_p P_L \\ \frac{V_0}{2\beta} \dot{P}_L = -A_p \dot{y} + Q_L \\ Q_L = \psi(v_e) \sqrt{P_s - |P_L|} \\ \ddot{v}_e = -w_{nv}^2 v_e - 2\epsilon_v w_{nv} \dot{v}_e + w_{nv}^2 (k_e u + v_{e0}) \end{cases} \quad (7)$$

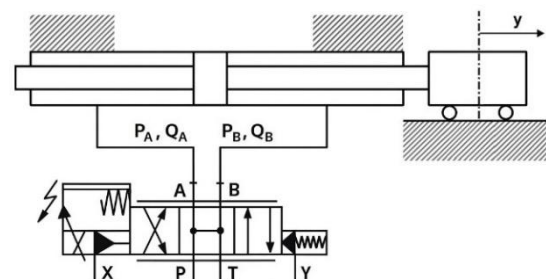
سیستم غیرخطی معادله (7) را می توان به صورت زیر نوشت:

ساختار مقاله به صورت زیر ساماندهی شده است:

- 1- در بخش دوم، مدل سازی سامانه الکتروهیدرولیک ارائه شده و معادلات دینامیکی سیستم تشریح می گردد.
- 2- در بخش سوم، طراحی رُویتگر مود لغزشی مرتبه کاهش یافته و تحلیل پایداری آن بررسی می شود.
- 3- در بخش چهارم، طراحی رُویتگر مرتبه کاهش یافته فرا پیچشی و تحلیل پایداری آن برای بهبود عملکرد تخمین حالت ارائه می گردد.
- 4- در بخش پنجم، نتایج شبیه سازی به همراه تفسیر و ارزیابی عملکرد رُویتگرها نمایش داده می شود.
- 5- در بخش ششم، جمع بندی و نتیجه گیری نهایی پژوهش به همراه مقایسه خلاصه عملکرد رُویتگرها و پیشنهادها پژوهشی آتی ارائه شده است.

2- مدل سازی سامانه الکتروهیدرولیک

سامانه الکتروهیدرولیک مورد بررسی شامل یک شیر سروو کنترل جهت و یک سیلندر هیدرولیکی دوطرفه^۱ است که به جرمی متصل بوده و بر روی یک راهنمای خطی حرکت می کند؛ این ساختار در شکل ۱ نمایش داده شده است. مدل دینامیکی این سامانه و مفروضات مدل سازی آن مطابق مرجع [13] استخراج شده و در این مقاله به عنوان بستر طراحی و ارزیابی رُویتگرهای پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۱: دیاگرام سیستم الکتروهیدرولیک [13]

برای استخراج مدل ریاضی، چند فرض در نظر گرفته شده است:

- فشار مخزن (P_T) برابر صفر فرض می شود
- خواص سیال مستقل از دما هستند
- مساحت پیستون ها و حجم محفظه ها برابر فرض شده
- نشتی داخلی و خارجی سیال قابل اغماض است
- برای اختصار، وابستگی زمانی متغیرها در معادلات لحاظ نشده است. دینامیک جابه جایی جرم متحرک $y(t)$ توسط رابطه زیر توصیف می شود:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + F_f(\dot{y}) = A_p P_L \quad (1)$$

² Viscous

³ Coulomb Friction Force

⁴ Bulk Modulus

⁵ Valve Spool

¹ Double Rod Cylinder

3- طراحی رؤیتگر مود لغزشی مرتبه کاهش یافته

به منظور ایجاد مبنای مقایسه و شفاف سازی تفاوت های ساختاری، ابتدا ساختار رؤیتگر مود لغزشی مرتبه کامل معرفی شده در مرجع [17] مرور می شود. براین اساس، ساختار کلی رؤیتگر مود لغزشی مرتبه کامل¹ (FO-SMO) برای سامانه مورد مطالعه به صورت زیر بیان می گردد:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + Bu(t) - H(\hat{z} - z) - Ksgn(\hat{z} - z) \quad (15)$$

کسه در آن بردار حالت تخمین، $\hat{x}(t)$ بردار خروجی تخمین، $\hat{z}(t) = C\hat{x}(t) = [\hat{y}(t) \ \hat{P}_L(t) \ \hat{v}_e(t)]^T$ و $z(t)$ بردار خروجی اندازه گیری شده است. ماتریس های H و K به ترتیب ضرایب میرایی² و مقاومتی³ بوده و ابعادی برابر 5×3 دارند. این ساختار، تمامی حالات سیستم را به صورت هم زمان تخمین می زند و تزریق لغزشی در فضای کامل خروجی انجام می شود.

در طراحی رؤیتگرهای مرتبه کاهش یافته، هدف آن است که صرفاً حالت های اندازه گیری نشده تخمین زده شوند؛ رویکردی که موجب کاهش پیچیدگی محاسباتی و بهبود سرعت همگرایی می گردد. در سامانه مورد مطالعه، خروجی های اندازه گیری شده شامل y ، P_L و v_e هستند؛ بنابراین فقط دو حالت $\dot{y}$ و $\dot{v}_e$ نیازمند تخمین هستند. مطابق رویکرد ارائه شده در [17]، یک حالت اندازه گیری شده نیز به عنوان «حالت کمکی» در بردار کاهش یافته وارد می شود تا امکان تعریف سطح لغزش پایدار، تزریق مؤثر سیگنال تصحیح و حذف نیاز به مشتق گیری از داده های نویزی فراهم گردد.

از میان حالات اندازه گیری شده، انتخاب v_e به عنوان حالت کمکی از دو جهت مناسب ترین گزینه است:

1- این متغیر در دینامیک شیر، معادلات فشار و معادلات حرکت ظاهر می شود و حاوی اطلاعات غنی برای تخمین سایر حالات است؛

2- وارد کردن آن در ساختار رؤیتگر موجب اجتناب از مشتق گیری نویزی و بهبود همگرایی تخمین v_e می شود. براین اساس، بردار حالت کاهش یافته شامل دو حالت اندازه گیری نشده و یک حالت کمکی به صورت زیر تعریف می شود و مبنای طراحی رؤیتگر مرتبه کاهش یافته مود لغزشی قرار می گیرد:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ v_e \\ \dot{v}_e \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 \\ \hat{\zeta}_2 \\ \hat{\zeta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\dot{x}}_2 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\dot{y}} \\ \hat{v}_e \\ \hat{\dot{v}}_e \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{F_f(\dot{y})}{m} + \frac{A_p P_L}{m} \\ \dot{P}_L = -\frac{2\beta A_p}{V_0}\dot{y} + \frac{2\beta\psi(v_e)\sqrt{P_s - |P_L|}}{V_0} \\ \dot{v}_e = -w_{nv}^2 v_e - 2\epsilon_v w_{nv} \dot{v}_e + w_{nv}^2 (k_e u + v_{e0}) \end{cases} \quad (8)$$

بردار حالت سیستم (8) به صورت زیر داده شده است:

$$x(t) = [y(t) \ \dot{y}(t) \ P_L(t) \ v_e(t) \ \dot{v}_e(t)]^T \quad (9)$$

براین اساس، فرم فضای حالت سامانه الکترو هیدرولیک به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B u(t) + d(t) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (10)$$

که در آن بردار خروجی، $f(x(t))$ دینامیک حالت و بردار اغتشاش است. دینامیک سیستم به صورت زیر است:

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\frac{b}{m}\dot{y} + \frac{A_p P_L}{m} - \frac{F_f(\dot{y})}{m} \\ -\frac{2\beta A_p}{V_0}\dot{y} + \frac{2\beta\psi(v_e)\sqrt{P_s - |P_L|}}{V_0} \\ \dot{v}_e \\ -w_{nv}^2 v_e - 2\epsilon_v w_{nv} \dot{v}_e + w_{nv}^2 v_{e0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_{nv}^2 k_e \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} \eta_y(t) \\ \eta_{P_L}(t) \\ 0 \\ \eta_{v_e}(t) \end{bmatrix}, z(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ P_L(t) \\ v_e(t) \end{bmatrix}$$

که در آن $\eta(t) = [\eta_y(t) \ \eta_{P_L}(t) \ \eta_{v_e}(t)]^T$ بیانگر اغتشاشات خارجی وارد بر سامانه است. فرض می شود این اغتشاشات کران دار بوده و کران آن ها محدود است:

$$\|\eta(t)\| \leq \eta_{max} \quad (12)$$

به منظور بررسی عملکرد رؤیتگرهای پیشنهادی در شرایط عملی و در حضور عدم قطعیت ها، علاوه بر اغتشاشات غیر پارامتری لحاظ شده در مدل، اثر عدم قطعیت های پارامتری سیستم نیز در نظر گرفته می شود. در سامانه الکترو هیدرولیکی مورد مطالعه، مهم ترین منابع عدم قطعیت پارامتری شامل تغییرات جرم بار، ضریب میرایی ویسکوز و نیروی اصطکاک کولمبی هستند. از این رو، پارامترهای متناظر به صورت زیر مدل سازی می شوند:

$$\begin{cases} m = m_{nom}(1 + \Delta_m) \\ b = b_{nom}(1 + \Delta_b) \\ \mu = \mu_{nom}(1 + \Delta_\mu) \end{cases} \quad (13)$$

به طوری که کران عدم قطعیت هر پارامتر حداکثر ۱۵٪ در نظر گرفته شده است:

$$|\Delta_{m,b,\mu}| \leq 0.15 \quad (14)$$

¹ Full-Order Sliding Mode Observer

² Damping Coefficient

³ Robust Coefficient

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{\zeta}}(t) - \dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\zeta}}_1 - \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 - \dot{\zeta}_2 \\ \dot{\hat{\zeta}}_3 - \dot{\zeta}_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

در نتیجه با جای گذاری معادلات رُیتگر و سیستم، دینامیک خطا به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{e}(t) = \Delta f_3 - \rho(e_2) - k \operatorname{sgn}(e_2) - d_3(t) \quad (23)$$

که در آن Δf_3 بیانگر عدم تطابق بین دینامیک واقعی و تخمینی بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta f_3 = f_3(\hat{\zeta}(t)) - f_3(\zeta(t)) = \begin{bmatrix} \Delta f_{31} \\ \Delta f_{32} \\ \Delta f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} e_1 - \frac{1}{m} (F_f(\hat{\zeta}_1) - F_f(\zeta_1)) \\ e_3 \\ -w_{nv}^2 e_2 - 2\epsilon_v w_{nv} e_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

لازم به ذکر است که اگرچه ساختار کلی رُیتگر مرتبه کاهش یافته مورد استفاده از چارچوب ارائه شده در [17] الهام گرفته شده است، اما در مرجع مذکور تحلیل پایداری صریح مبتنی بر تابع لیپانوف و استخراج شرایط کافی برای انتخاب ضرایب رُیتگر ارائه نشده است. در مقاله حاضر، این خلأ با ارائه یک تحلیل پایداری جامع مرتفع شده و نقش ضرایب رُیتگر در همگرایی خطای تخمین به صورت تحلیلی بررسی می گردد.

3-1 تحلیل پایداری رُیتگر مود لغزشی مرتبه کاهش یافته

برای انجام تحلیل پایداری بر مبنای لیپانوف، لازم است ترم Δf_3 دارای کران لیپشیتز^۱ باشد [18]. از آن ها که نیروی اصطکاک کولمب در $\dot{y} = 0$ ناپیوسته بوده و ذاتاً لیپشیتز نیست، استفاده مستقیم از مدل دقیق آن منجر به ناپیوستگی در مشتق تابع لیپانوف می شود. از این رو، صرفاً به منظور امکان پذیر شدن تحلیل پایداری، یک تقریب خطی محافظه کارانه از نیروی اصطکاک در اطراف سرعت مرجع عملیاتی $\dot{y}_{nominal}$ در نظر گرفته می شود تا یک کران لیپشیتز برای Δf_3 حاصل گردد. مقدار $\dot{y}_{nominal}$ بر اساس محدوده عملیاتی معمول سامانه و سرعت های غالب در شرایط کاری انتخاب شده و صرفاً نقش یک پارامتر مقیاس دهی در کران بندی لیپشیتز را ایفا می کند [19].

$$F_f(\dot{y}) \approx k_f \dot{y} \rightarrow k_f = \frac{F_{total}}{\dot{y}_{nominal}} = \frac{F_c + \mu mg}{0.05} = 20(F_c + \mu mg) \quad (25)$$

با جای گذاری تقریب خطی نیروی اصطکاک در معادلات خطا، عبارت Δf_3 بازنویسی و به شکل ساده تر زیر به دست می آید:

$$\Delta f_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m} (b + 20(F_c + \mu mg)) e_1 \\ e_3 \\ -w_{nv}^2 e_2 - 2\epsilon_v w_{nv} e_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

برای ساده سازی اثبات لیپانوف، پارامترهای ثابت ترکیبی ظاهرشونده Δf_3 را با نمادهای جدید بازتعریف می کنیم تا نوشتار

برای ادامه ی طراحی، لازم است معادلات دینامیکی زیر فضای کاهش یافته $\zeta(t)$ به صورت مستقل استخراج شود. این معادلات با بازنویسی مدل کامل سیستم به دست می آیند و مبنای اصلی در ساختار رُیتگر خواهند بود:

$$\dot{\zeta}(t) = f_3(\zeta(t)) + B_3 u(t) + d_3(t) \quad (17)$$

در این معادله، $f_3(\zeta(t))$ تابع غیرخطی زیر فضای ζ را نشان می دهد، B_3 اثر ورودی کنترلی را وارد می کند و $d_3(t)$ بیانگر اغتشاشات خارجی سیستم است. روابط هر یک به صورت زیر تعریف می شوند:

$$f_3(\zeta(t)) = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} \dot{y} + \frac{A_p P_L}{m} - \frac{F_f(\dot{y})}{m} \\ -w_{nv}^2 v_e - 2\epsilon_v w_{nv} \dot{v}_e + w_{nv}^2 v_{e0} \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} \zeta_1 + \frac{A_p}{m} z_2 - \frac{F_f(\zeta_1)}{m} \\ -w_{nv}^2 \zeta_2 - 2\epsilon_v w_{nv} \zeta_3 + w_{nv}^2 v_{e0} \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{nv}^2 k_e \end{bmatrix} \quad d_3(t) = \begin{bmatrix} \eta_y(t) \\ 0 \\ \eta_{v_e}(t) \end{bmatrix}$$

مطابق چارچوب ارائه شده در [17]، طراحی رُیتگر کاهش یافته بر مبنای دینامیک ζ انجام می شود؛ به گونه ای که با افزودن ترم های اصلاحی وابسته به خطای e_2 ، پایداری و همگرایی تخمین تضمین گردد. ساختار کلی رُیتگر پیشنهادی به صورت زیر بیان می شود.

$$\dot{\hat{\zeta}}(t) = f_3(\hat{\zeta}(t)) + B_3 u(t) - \rho(\hat{\zeta}_2 - \zeta_2) - k \operatorname{sgn}(\hat{\zeta}_2 - \zeta_2) = f_3(\hat{\zeta}(t)) + B_3 u(t) - \rho(e_2) - k \operatorname{sgn}(e_2) \quad (19)$$

که در آن $f_3(\hat{\zeta}(t))$ تابع غیرخطی بازنویسی شدن بر حسب حالات تخمینی در زیر فضای کاهش یافته را نشان می دهد. با اعمال کاهش مرتبه، ماتریس های ضرایب میرایی H و مقاومتی K که در ساختار مرتبه کامل تعریف می شوند، به بردارهای متناظر ρ و k تقلیل یافته و در طراحی رُیتگر مرتبه کاهش یافته مورد استفاده قرار می گیرند.

$$f_3(\hat{\zeta}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} \hat{\zeta}_1 + \frac{A_p}{m} z_2 - \frac{F_f(\hat{\zeta}_1)}{m} \\ \hat{\zeta}_3 \\ -w_{nv}^2 \hat{\zeta}_2 - 2\epsilon_v w_{nv} \hat{\zeta}_3 + w_{nv}^2 v_{e0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\rho = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3]^T, \rho_i \geq 0$$

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T, k_i \geq 0$$

خطای تخمین به صورت اختلاف بین مقادیر واقعی و تخمینی ζ تعریف می شود:

$$e(t) = \hat{\zeta}(t) - \zeta(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 - \zeta_1 \\ \hat{\zeta}_2 - \zeta_2 \\ \hat{\zeta}_3 - \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

با مشتق گیری از تعریف خطا، دینامیک تکامل خطای تخمین به صورت زیر به دست می آید:

^۱ Lipschitz

اکنون ترم $-e^T P \rho(e_2)$ را بسط داده و به صورت صریح بازنویسی می‌کنیم:

$$-e^T P \rho(e_2) = - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 e_2 \\ \rho_2 e_2 \\ \rho_3 e_2 \end{bmatrix} = -(P_{11}\rho_1 + P_{12}\rho_2 + P_{13}\rho_3)e_1 e_2$$

به همین ترتیب ترم $-e^T P k \operatorname{sgn}(e_2)$ نیز بسط داده شده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-e^T P k \operatorname{sgn}(e_2) = - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \operatorname{sgn}(e_2) \\ k_2 \operatorname{sgn}(e_2) \\ k_3 \operatorname{sgn}(e_2) \end{bmatrix} = -(P_{11}k_1 + P_{12}k_2 + P_{13}k_3)e_1 \operatorname{sgn}(e_2) - (P_{12}k_1 + P_{22}k_2 + P_{23}k_3)|e_2| - (P_{13}k_1 + P_{23}k_2 + P_{33}k_3)e_3 \operatorname{sgn}(e_2)$$

در نتیجه، با جمع‌بندی و بسط تمامی ترم‌ها، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{V}(e) = -P_{11}\alpha e_1^2 - (P_{23}w_{nv}^2 + P_{12}\rho_1 + P_{22}\rho_2 + P_{23}\rho_3)e_2^2 + (P_{23} - P_{33}\gamma)e_3^2 - (P_{13}w_{nv}^2 + P_{12}\alpha + P_{11}\rho_1 + P_{12}\rho_2 + P_{13}\rho_3)e_1 e_2 + (P_{12} - P_{13}\gamma - P_{13}\alpha)e_1 e_3 + (P_{22} - P_{23}\gamma - P_{33}w_{nv}^2 - P_{13}\rho_1 - P_{23}\rho_2 - P_{33}\rho_3)e_2 e_3 - (P_{11}k_1 + P_{12}k_2 + P_{13}k_3)e_1 \operatorname{sgn}(e_2) - (P_{12}k_1 + P_{22}k_2 + P_{23}k_3)|e_2| - (P_{13}k_1 + P_{23}k_2 + P_{33}k_3)e_3 \operatorname{sgn}(e_2)$$

در مشتق تابع لیاپانوف، ترم‌های ضربی $e_1 e_2$ ، $e_1 e_3$ و $e_2 e_3$ به دلیل علامت نامشخص می‌توانند مانع منفی شدن $\dot{V}(e)$ شوند؛ از این رو ضرایب آن‌ها صفر انتخاب می‌شود تا مشتق لیاپانوف تنها به ترم‌های درجه دوم و قدرمطلق خطا وابسته باشد. بر این مبنا، ساختار ماتریس P در رابطه (39) و مقادیر بردارهای ρ و k در رابطه (40) تعیین می‌گردد.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} P_{12} = 0 \\ P_{13} = 0 \\ P_{23} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_3 = 0 \\ k_1 = k_3 = 0 \end{cases} \quad (40)$$

با اعمال ساده‌سازی‌های انجام‌شده، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{V}(e) = -P_{11}\alpha e_1^2 - P_{22}\rho_2 e_2^2 - P_{33}\gamma e_3^2 + (P_{22} - P_{33}w_{nv}^2)e_2 e_3 - P_{22}k_2 |e_2| \quad (41)$$

هدف آن است که مشتق تابع لیاپانوف $\dot{V}(e)$ برای همه $e \neq 0$ منفی شود. تحقق $\dot{V}(e) < 0$ تضمین‌کننده همگرایی متغیر لغزش $s = e$ و در نتیجه پایداری مجانبی خطای تخمین است؛ بنابراین کافی است که هر ضریب مقابل e_1^2 ، e_2^2 ، e_3^2 و $|e_2|$ به صورت جداگانه منفی شود. در رابطه (42) هر یک از این ترم‌ها به صورت مجزا بررسی و شرایط لازم بر روی مؤلفه‌های ρ و k ارائه شده است.

فشرده‌تر شده و پیگیری شروط مربوط به آن‌ها در تحلیل پایداری تسهیل گردد.

$$\begin{cases} \frac{-1}{m}(b + 20(F_c + \mu mg)) = -\alpha, \alpha > 0 \\ -2\epsilon_v w_{nv} = -\gamma, \gamma > 0 \end{cases} \quad (27)$$

باتوجه به نام‌گذاری‌های معرفی‌شده در رابطه (27)، Δf_3 را به شکل ساده‌شده زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\Delta f_3 = \begin{bmatrix} -\alpha e_1 \\ e_3 \\ -w_{nv}^2 e_2 - \gamma e_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

قضیه 1. معادلات حالت سیستم را به صورت (10) و ساختار کلی رُویتگر را به صورت (19) در نظر بگیرید. بردارهای ρ و k را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که خطای تخمین حالت‌های سیستم به صورت مجانبی به صفر همگرا شود. اثبات.

با تعریف $s = e$ تابع لیاپانوف متناظر به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^T P s \rightarrow V(e) = \frac{1}{2} e^T P e \quad (29)$$

از آنجاکه در تابع لیاپانوف از ماتریس P استفاده شد، شکل کلی آن به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (30)$$

P یک ماتریس متقارن است؛ بنابراین ماتریس P را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$P = P^T \rightarrow P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ماتریس P مثبت معین انتخاب می‌شود تا $V(e)$ همواره مثبت باشد؛ بر اساس معیار سیلوستر، این شرط با مثبت بودن مینورهای اصلی P تضمین می‌گردد.

$$\begin{cases} (a) P_{11} \geq 0 \\ (b) \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ (c) \det(P) \geq 0 \end{cases} \quad (32)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف نسبت به زمان، داریم:

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) = e^T P \dot{e} \quad (33)$$

با جای‌گذاری دینامیک خطا در مشتق تابع لیاپانوف، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\dot{V}(e) = e^T P \Delta f_3 - e^T P \rho(e_2) - e^T P k \operatorname{sgn}(e_2) \quad (34)$$

ترم اول در مشتق تابع لیاپانوف یعنی $e^T P \Delta f_3$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$e^T P \Delta f_3 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f_{31} \\ \Delta f_{32} \\ \Delta f_{33} \end{bmatrix} = -P_{11}\alpha e_1^2 - P_{23}w_{nv}^2 e_2^2 + (P_{23} - P_{33}\gamma)e_3^2 - (P_{13}w_{nv}^2 + P_{12}\alpha)e_1 e_2 + (P_{12} - P_{13}\gamma - P_{13}\alpha)e_1 e_3 + (P_{22} - P_{23}\gamma - P_{33}w_{nv}^2)e_2 e_3 \quad (35)$$

تقسیم درایه‌ای A/B به معنای تقسیم هر مؤلفه‌ی A_i بر B_i است؛ بنابراین روابط زیر حاصل می‌شود [20]:

$$\begin{cases} A \odot B = [A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3]^T \\ A \odot A = [A_1^2, A_2^2, A_3^2]^T = A^2 \\ A/B = [\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}]^T \end{cases} \quad (47)$$

به‌منظور ایجاد مبنای مقایسه و تبیین تفاوت‌های ساختاری، ابتدا فرم کلی یک رؤیتگر مود لغزشی مرتبه بالای فرا پیچشی در قالب ساختار مرتبه کامل^۲ (FO-HOSMO)، مطابق با چارچوب ارائه‌شده در مرجع [21]، مرور می‌شود. در این ساختار، تمامی حالات سیستم به‌صورت صریح تخمین زده می‌شوند و متغیر لغزش بر فضای حالت کامل تعریف می‌گردد. برخلاف SMO متداول که از تزریق ناپیوسته کلاسیک استفاده می‌کند، در الگوریتم فرا پیچشی یک سازوکار دومؤلفه‌ای شامل یک ترم پیوسته مبتنی بر توان نیمه درجه خطا u_{STA} و یک متغیر کمکی انتگرالی θ به کار گرفته می‌شود. این ساختار ضمن تضمین همگرایی زمان محدود، موجب کاهش محسوس چت رینگ و بهبود کیفیت بازسازی حالات می‌شود. فرم کلی رؤیتگر به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + Bu(t) + \Lambda \\ \Lambda = -\rho \odot s - k \odot u_{STA} \\ s = \hat{x} - x \\ \rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4 \ \rho_5]^T, \quad \rho_i \geq 0 \\ k = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5]^T, \quad k_i \geq 0 \\ u_{STA} = c_1 \odot |s|^{\frac{1}{2}} \odot \text{sign}(s) + \theta \\ \dot{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T \\ \theta = c_2 \odot \text{sign}(s) \\ c_1 = [c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}]^T, \quad c_{1i} > 0 \\ c_2 = [c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}]^T, \quad c_{2i} > 0 \end{cases} \quad (48)$$

رؤیتگرهای مود لغزشی مرتبه بالای متعارف عموماً در قالب ساختارهای مرتبه کامل تدوین می‌شوند و در آن‌ها تمامی حالات سیستم به‌صورت هم‌زمان تخمین زده می‌شوند. در این مقاله، ساختار پیشنهادی RO-HOSMO نتیجه حذف مستقیم معادلات مرتبه کامل نیست، بلکه با تلفیق چارچوب کاهش مرتبه ارائه‌شده در مرجع [17] و ساختار فرا پیچشی مطرح‌شده در مرجع [21] به‌دست‌آمده است. در این چارچوب، دینامیک خطای تخمین در یک زیر فضای کاهش‌یافته صورت‌بندی می‌شود؛ به‌گونه‌ای که تمرکز اصلی بر حالات اندازه‌گیری نشده قرار می‌گیرد. مشابه رویکرد کاهش مرتبه در [17]، یک حالت اندازه‌گیری‌شده نیز به‌عنوان متغیر کمکی در بردار حالت تخمینی لحاظ می‌شود تا تعریف سطح لغزش، تزریق سیگنال اصلاحی و تضمین همگرایی در چارچوب فرا پیچشی به‌صورت سازگار انجام گیرد. این صورت‌بندی امکان بهره‌گیری از ویژگی مقاومت ذاتی الگوریتم Super-Twisting را در ساختاری با ابعاد کاهش‌یافته فراهم

$$\begin{cases} a) P_{11}\alpha > 0 \rightarrow \frac{P_{11}}{m}(b + 20(F_c + \mu mg)) > 0 \\ b) P_{22}\rho_2 > 0 \rightarrow P_{22} > 0 \\ c) P_{33}\gamma > 0 \rightarrow 2P_{33}\epsilon_v w_{nv} > 0 \rightarrow P_{33} > 0 \\ d) P_{22} - P_{33}w_{nv}^2 = 0 \rightarrow P_{22} = P_{33}w_{nv}^2 \\ e) P_{22}k_2 > 0 \rightarrow P_{22} > 0 \end{cases} \quad (42)$$

با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های پارامتری تعریف‌شده، شرط (a) از معادله (42) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{P_{11}}{m_{nom}(1+\Delta_m)}(b_{nom}(1+\Delta_b) + 20(F_c + \mu_{nom}g)) > 0 \quad (43)$$

باتوجه به اینکه مقدار نسبی عدم قطعیت‌ها در هر پارامتر محدود به ۱۵ درصد است، داریم:

$$|4_{m,b,\mu}| \leq 0.15 \rightarrow (1 + 4_{m,b,\mu}) \geq 0 \rightarrow \alpha > 0 \quad (44)$$

در نتیجه، کافی است که $P_{11} > 0$ باشد؛ در این صورت، شرط (a) حتی در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری نیز معتبر باقی می‌ماند. برای آنکه شروط معادله (42) به‌سادگی برقرار شوند، می‌توان یک انتخاب مناسب و ساده برای ماتریس P در نظر گرفت که به‌صورت زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_{nv}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

به‌طور مشابه، برای بردارهای p و k یک انتخاب ساده و مؤثر در نظر گرفته می‌شود تا شرایط پایداری معادله (42) برآورده شوند:

$$\begin{cases} \rho = [0 \ \theta \ 0], \quad \theta > 0 \\ k = [0 \ \tau \ 0], \quad \tau > 0 \end{cases} \quad (46)$$

و اثبات تمام است.

شرایط به‌دست‌آمده از تحلیل لیاپانوف، شرایط کافی محافظه‌کارانه‌ای هستند که پایداری و همگرایی خطای تخمین را تضمین می‌کنند. این شرایط چارچوبی تحلیلی برای انتخاب ضرایب رؤیتگر فراهم می‌آورند و امکان بررسی اثر افزایش یا کاهش ضرایب بر سرعت همگرایی و نوسانات گذرا را مهیا می‌سازند. در بخش شبیه‌سازی نشان داده خواهد شد که چگونه تنظیم ضرایب در محدوده مجاز نظری و با رویکردی کمتر محافظه‌کارانه می‌تواند عملکرد عملی مطلوب‌تری را بدون نقض قیود پایداری ارائه دهد.

4- طراحی رؤیتگر مرتبه کاهش‌یافته مود لغزشی مرتبه بالا از نوع فرا پیچشی

به‌منظور تعریف عملگرهای مورد استفاده در طراحی RO-HOSMO نوع فرا پیچشی، ابتدا نمادگذاری مربوط به ضرب و تقسیم مؤلفه به مؤلفه معرفی می‌شود. برای دو بردار ستونی $A = [A_1, A_2, A_3]^T$ و $B = [B_1, B_2, B_3]^T$ عملگر $\odot$ بیانگر ضرب درایه‌ای^۱ است و به‌صورت $A \odot B$ تعریف می‌شود. به‌طور مشابه،

^۲ Full-Order High-Order Sliding Mode Observer

^۱ Hadamard Product

مرجع [22]، تحلیل پایداری لیاپانوف الگوریتم فرا پیچشی بر پایه سیستم استاندارد زیر ارائه شده است:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) + x_2 + \varphi_1(x, t) \\ \dot{x}_2 = -k_3 \text{sign}(x_1) + \varphi_2(x, t) \end{cases} \quad (52)$$

که در آن $\varphi_i(x, t)$ اغتشاشاتی با کران مشخص هستند. در این چارچوب، همگرایی زمان محدود از طریق ساخت یک تابع لیاپانوف مناسب تضمین می‌شود. باتوجه به اینکه دینامیک خطای روتیگر RO-HOSMO به صورت مستقیم در فرم استاندارد (52) قرار نمی‌گیرد، در ادامه با تعریف متغیرهای کمکی و تجمیع مناسب ضرایب طراحی، سیستم خطا به ساختاری متناظر با فرم مرجع [22] تبدیل می‌شود. بدین منظور، ضرایب تزریق به صورت زیر بازتعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} k \odot c_1 = \alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}]^T \\ -k \odot \vartheta = \omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T \\ k \odot c_2 = \alpha_2 = [\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}]^T \end{cases} \quad (53)$$

با این تعریف، متغیر ω به عنوان حالت کمکی دوم در ساختار فرا پیچشی ظاهر شده و دینامیک آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -k \odot \dot{\vartheta} = -k \odot c_2 \odot \text{sign}(s) = \\ &= -\alpha_2 \odot \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (54)$$

اکنون با استفاده از تعاریف فوق، دینامیک متغیر لغزش s و حالت کمکی ω به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\alpha_1 \odot |s|^{1/2} \odot \text{sign}(s) + \omega + \varphi_1(s, t) \\ \dot{\omega} = -\alpha_2 \odot \text{sign}(s) + \varphi_2(s, t) \end{cases} \quad (55)$$

که در آن ترم‌های نامعین و باقیمانده مدل در قالب توابع اغتشاشی زیر تجمیع شده‌اند:

$$\begin{cases} \varphi_1(s, t) = \Delta f_3 - \rho \odot s \\ \varphi_2(s, t) = 0 \end{cases} \quad (56)$$

بنابراین، دینامیک خطای روتیگر به ساختاری قابل انطباق با فرم تحلیل شده در مرجع [22] تبدیل شده و امکان بهره‌گیری از چارچوب لیاپانوف ارائه شده در آن مرجع فراهم می‌گردد. در ادامه، به منظور تحلیل پایداری در حضور نامعینی‌ها، تابع لیاپانوفی سازگار با ساختار الگوریتم فرا پیچشی انتخاب می‌گردد که هر دو متغیر s و ω را در بر می‌گیرد. شرایط کران‌داری اغتشاشات و قیود ضرایب طراحی برای سامانه حاضر باید به صورت مستقل بررسی و تطبیق داده شوند.

قضیه 2. معادلات حالت سیستم را به صورت (10) و ساختار کلی روتیگر را به صورت (50) در نظر بگیرید. پارامترهای روت گرا می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که خطای تخمین حالت‌های سیستم به صورت مجانبی به صفر همگرا شود. اثبات.

تابع لیاپانوف مورد استفاده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} V(s, \omega) &= 2\alpha_2 \odot |s| + \frac{1}{2}\omega^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha_1 \odot |s|^{1/2} \odot \text{sign}(s) - \omega)^2 \end{aligned} \quad (57)$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف (57)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, \omega) &= -\frac{1}{\sqrt{|s|}} \theta^T Q \theta + \frac{\varphi_1}{\sqrt{|s|}} q_1^T \theta + \\ &+ \varphi_2 q_2^T \theta \end{aligned} \quad (58)$$

می‌کند. براین اساس، ساختار روتیگر مود لغزشی مرتبه بالای کاهش یافته به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}}(t) = f_3(\hat{\zeta}(t)) + B_3 u(t) + \Lambda \\ \Lambda = -\rho \odot s - k \odot u_{STA} \\ s = e = \hat{\zeta} - \zeta \\ \rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3]^T, \quad \rho_i \geq 0 \\ k = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T, \quad k_i \geq 0 \\ u_{STA} = c_1 \odot |s|^{1/2} \odot \text{sign}(s) + \vartheta \\ \vartheta = [\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3]^T \\ \dot{\vartheta} = c_2 \odot \text{sign}(s) \\ c_1 = [c_{11}, c_{12}, c_{13}]^T, \quad c_{1i} > 0 \\ c_2 = [c_{21}, c_{22}, c_{23}]^T, \quad c_{2i} > 0 \end{cases} \quad (49)$$

برای استخراج مدل RO-HOSMO نوع فرا پیچشی در سطح معادلات حالت، ترم‌های اصلاحی مبتنی بر ضرایب ρ, k و سیگنال‌های کمکی ϑ_i به معادلات دینامیکی اضافه می‌شوند. ساختار نهایی روتیگر به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}_1 &= \frac{-b}{m} \hat{\zeta}_1 + \frac{A_p}{m} z_2 - \frac{F_f(\hat{\zeta}_1)}{m} - \rho_1(e_1) - \\ &+ k_1 c_{11} |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) - k_1 \vartheta_1 \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 &= \hat{\zeta}_3 - \rho_2(e_2) - k_2 c_{12} |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2) - \\ &- k_2 \vartheta_2 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}_3 &= -w_{nv}^2 \hat{\zeta}_2 - 2\epsilon_v w_{nv} \hat{\zeta}_3 + w_{nv}^2 v_{e0} + \\ &+ w_{nv}^2 k_e u(t) - \rho_3(e_3) - \\ &- k_3 c_{13} |e_3|^{1/2} \text{sign}(e_3) - k_3 \vartheta_3 \end{aligned}$$

با جای گذاری معادلات روتیگر و سیستم، دینامیک کلی خطای تخمین به دست می‌آید که به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \Delta f_3 - \rho \odot s - k \odot u_{STA} = \Delta f_3 - \\ &- \rho \odot s - k \odot c_1 \odot |s|^{1/2} \odot \\ &- \text{sign}(s) - k \odot \vartheta \end{aligned} \quad (51)$$

4-1 تحلیل پایداری روتیگر مرتبه کاهش یافته فرا

پیچشی

به منظور تحلیل پایداری روتیگر فرا پیچشی کاهش یافته، دینامیک خطای تخمین استخراج و در چارچوب تحلیل لیاپانوف بررسی می‌شود. اگرچه در مرجع [21] ساختار الگوریتم-Super Twisting معرفی شده، اما اثبات پایداری آن برای ساختار مورد استفاده در این مقاله ارائه نشده است. از سوی دیگر، در مرجع [22] یک چارچوب تحلیلی مبتنی بر تابع لیاپانوف برای الگوریتم‌های لغزشی مرتبه دوم ارائه شده است که برای کلاس خاصی از سیستم‌ها با فرم استاندارد قابل اعمال است. در این مقاله، با الهام از چارچوب تحلیلی مرجع [22]، دینامیک خطای روتیگر RO-HOSMO استخراج و سپس با تعریف متغیرهای کمکی مناسب و انجام یک باز فرموله‌سازی ساختاری، به فرمی قابل انطباق با شرایط تحلیل مذکور تبدیل گردیده است. در ادامه، شروط لازم برای همگرایی زمان محدود در مورد سامانه الکترو هیدرولیکی حاضر به صورت صریح بررسی شده و بر اساس آن، محدوده قابل قبول بهره‌های روتیگر استخراج می‌شود. در

به طور مشابه، برای مؤلفه سوم سیستم داریم:

$$\begin{aligned} |\Delta f_{33} - \rho_3 e_3| &= |-w_{nv}^2 e_2 - \gamma e_3 - \rho_3 e_3| = |-(\gamma + \rho_3) e_3 - w_{nv}^2 e_2| \leq (\gamma + \rho_3) |e_3| + w_{nv}^2 |e_2| \leq \delta_{13} (|e_3| + \epsilon_3)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \delta_{13} \geq w_{nv}^2 \frac{|e_2|}{(|e_3| + \epsilon_3)^{\frac{1}{2}}} + (\gamma + \rho_3) \frac{|e_3|}{(|e_3| + \epsilon_3)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \delta_{13} \geq w_{nv}^2 \frac{M_2^2}{\epsilon_3^{\frac{1}{2}}} + (\gamma + \rho_3) M_3 \end{aligned} \quad (65)$$

بنابراین، با انتخاب ضرایب δ_{1i} به گونه‌ای که روابط (63) تا (65) برقرار باشند، می‌توان کران بالای زیر را برای مشتق تابع لیپانوف استخراج نمود.

$$\dot{V}(s, \omega) \leq -\frac{1}{\sqrt{|s|}} \theta^T \tilde{Q} \theta \quad (66)$$

که در آن ماتریس $\tilde{Q}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{Q} = \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} 2\alpha_2 + \alpha_1^2 - \left(\frac{4\alpha_2}{\alpha_1} + \alpha_1\right) \delta_1 - 2\delta_2 & * \\ -\left(\alpha_1 + 2\delta_1 + \frac{2\delta_2}{\alpha_1}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

مطابق چارچوب تحلیلی ارائه شده در [22,23]، منفی معین بودن کران (67) مستلزم مثبت معین بودن ماتریس $\tilde{Q}$ است. این امر منجر به قیود طراحی زیر می‌شود:

$$\begin{cases} \alpha_1 > 2\delta_1 \\ \alpha_2 > \alpha_1 \frac{5\delta_1 \odot \alpha_1 + 6\delta_2 + 4(\delta_1 + \delta_2/\alpha_1)^2}{2(\alpha_1 - 2\delta_1)} \end{cases} \quad (68)$$

باتوجه به اینکه در سامانه حاضر $\delta_2 = 0$ است، شرایط فوق به فرم ساده شده زیر تقلیل می‌یابند:

$$\begin{cases} \alpha_1 > 2\delta_1 \\ \alpha_2 > \alpha_1 \odot \frac{5\delta_1 \odot \alpha_1 + 4\delta_1^2}{2(\alpha_1 - 2\delta_1)} \end{cases} \quad (69)$$

در نهایت، با اعمال تغییر متغیرهای رابطه (53)، شرایط کافی فوق برحسب ضرایب رؤیتگر فرا پیچشی c_{1i} و c_{2i} بازنویسی می‌شوند که نتیجه آن در رابطه (70) ارائه شده است:

$$\begin{cases} c_{1i} > \frac{2\delta_{1i}}{k_i} \\ c_{2i} > c_{1i} \frac{5\delta_{1i} c_{1i} k_i + 4\delta_{1i}^2}{2(c_{1i} k_i - 2\delta_{1i})} \end{cases} \quad (70)$$

و اثبات تمام است.

لازم به تأکید است که شرایط پایداری استخراج شده برای ضرایب رؤیتگر RO-HOSMO، شرایط کافی مبتنی بر تحلیل لیپانوف بوده و ذاتاً ماهیتی محافظه کارانه دارند. این کران‌ها باهدف تضمین همگرایی نظری خطای تخمین در حضور بدترین حالات عدم قطعیت و اغتشاش استخراج شده‌اند و لزوماً مقادیر بهینه برای پیاده‌سازی عملی محسوب نمی‌شوند. ازاین‌رو، در شبیه‌سازی‌های عددی، ضرایب رؤیتگر با رعایت قیود نظری به‌دست‌آمده و از طریق تنظیم تجربی کنترل شده انتخاب شده‌اند تا موازنه‌ای مناسب میان پایداری، دقت تخمین و نرمی سیگنال‌های برآوردی برقرار گردد. این رویکرد در ادبیات مربوط

که در آن، بردار θ ، بردارهای q_1 ، q_2 و ماتریس Q به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \theta = [s^{\frac{1}{2}} \odot \text{sign}(s), \omega]^T \\ q_1^T = [(2\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2}), \frac{-\alpha_1}{2}] \\ q_2^T = [-\alpha_1, 2] \\ Q = \frac{\alpha_1}{2} \begin{bmatrix} 2\alpha_2 + \alpha_1^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (59)$$

با فرض برقرار بودن شرایط کافی طراحی ارائه شده در رابطه (60)، اثر نامعینی‌ها توسط ضرایب طراحی جبران شده و برای مشتق تابع لیپانوف یک کران بالای منفی حاصل می‌شود. در نتیجه، رابطه (58) را می‌توان به فرم ساده‌شده‌ای معادل رابطه (67) بازنویسی کرد که دلالت بر همگرایی زمان محدود دینامیک خطا دارد. به منظور تضمین کران‌داری ترم‌های اغتشاشی $\varphi_1(s, t)$ و $\varphi_2(s, t)$ ، شرایط کافی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} a) |\varphi_1(s, t)| \leq \delta_1 \odot \sqrt{|s| + \epsilon} \\ b) |\varphi_2(s, t)| \leq \delta_2 \end{cases} \quad (60)$$

که در آن $\delta_1 = [\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}]^T$ ، $\delta_2 = [\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23}]^T$ ، $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ بردارهایی با مؤلفه‌های نامنفی هستند. باتوجه به اینکه در سامانه حاضر $\varphi_2(s, t) = 0$ خواهیم داشت $\delta_2 = 0$. رابطه (61) همان شرط بند (a) در رابطه (60) است که به صورت مؤلفه‌ای نوشته شده است. به این ترتیب، برای هر مؤلفه از بردارهای خطا، قید جداگانه‌ای برقرار خواهد بود:

$$|\Delta f_{3i} - \rho_i e_i| \leq \delta_{1i} \sqrt{|e_i| + \epsilon_i}, \quad \epsilon_i > 0 \quad (61)$$

که در آن ϵ_i یک مقدار کوچک مثبت است. به منظور تسهیل تحلیل و کران‌دار نمودن ترم‌های شامل $|e_i|^{\frac{1}{2}}$ ، یک کران بالای معلوم برای خطاها در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} M = [M_1, M_2, M_3]^T \\ |e_i| \leq M_i^2, M_i \geq 0 \rightarrow |e_i|^{\frac{1}{2}} \leq M_i \end{cases} \quad (62)$$

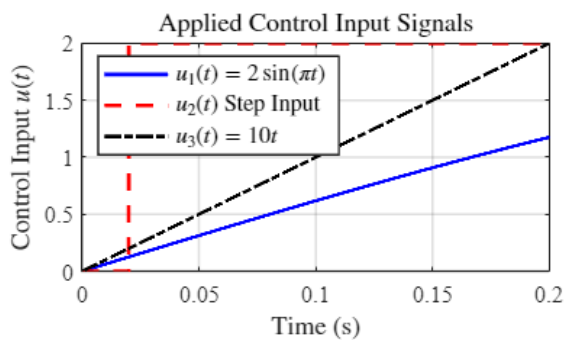
در ادامه، شرط (61) برای هر مؤلفه از سامانه EHS به صورت جداگانه بررسی می‌شود. به عنوان نمونه، برای مؤلفه اول با جای‌گذاری ترم نامعینی و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\Delta f_{31} - \rho_1 e_1| &= |-\alpha e_1 - \rho_1 e_1| = |-(\alpha + \rho_1) e_1| = (\alpha + \rho_1) |e_1| \leq \delta_{11} |e_1|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{|e_1| + \epsilon_1} \rightarrow \delta_{11} \geq (\alpha + \rho_1) |e_1|^{\frac{1}{2}} \rightarrow \delta_{11} \geq (\alpha + \rho_1) M_1 \end{aligned} \quad (63)$$

به طور مشابه، با جای‌گذاری دینامیک مؤلفه دوم سامانه در رابطه (61) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\Delta f_{32} - \rho_2 e_2| &= |e_3 - \rho_2 e_2| \leq |e_3| + \rho_2 |e_2| \leq \delta_{12} (|e_2| + \epsilon_2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \delta_{12} \geq \frac{|e_3|}{(|e_2| + \epsilon_2)^{\frac{1}{2}}} + \rho_2 \frac{|e_2|}{(|e_2| + \epsilon_2)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \delta_{12} \geq \frac{M_3^2}{\epsilon_2^{\frac{1}{2}}} + \rho_2 |e_2|^{\frac{1}{2}} \rightarrow \delta_{12} \geq \frac{M_3^2}{\epsilon_2^{\frac{1}{2}}} + \rho_2 M_2 \end{aligned} \quad (64)$$

می‌کند. ورودی پله‌ای برای ارزیابی سرعت همگرایی و نحوه عملکرد رؤیتگرها در برابر تغییرات ناگهانی به کار رفته است. همچنین ورودی شیب، توانایی رؤیتگرها را در دنبال کردن تغییرات تدریجی و حفظ دقت تخمین در طول زمان نشان می‌دهد. استفاده هم‌زمان از این سه نوع تحریک، امکان بررسی جامع عملکرد ساختارهای پیشنهادی را در سناریوهای مختلف عملیاتی فراهم می‌سازد.



شکل 2: نمودار سیگنال‌های کنترلی

شرایط اولیه سیستم به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اختلاف قابل توجهی میان حالت‌های واقعی و تخمینی ایجاد شود تا توان همگرایی رؤیتگرها در شرایط اولیه نامطلوب به طور دقیق ارزیابی گردد:

$$x_0 = [0.05, -0.02, 10^4, 0.10, -0.05]^T$$

$$\hat{x}_0 = [0, 0, 0, 0, 0]^T$$

بازه زمانی شبیه‌سازی برابر $t \in [0, 0.2]$ ثانیه در نظر گرفته شده است. ضرایب رؤیتگر RO-SMO مطابق قیود استخراج شده از تحلیل لیپانوف (رابطه 46) انتخاب شده‌اند. همان گونه که در بخش تحلیل پایداری نشان داده شد، شرایط به دست آمده چارچوبی تحلیلی برای تضمین همگرایی فراهم می‌کنند، اما این قیود ماهیتاً شرایط کافی بوده و تضمین همگرایی را در بدترین حالات فراهم می‌کنند. در این مطالعه، پس از تعیین بازه مجاز ضرایب بر اساس قیود نظری، تحلیل حساسیت عددی کنترل شده‌ای برای ارزیابی تأثیر پارامترهای اصلی بر عملکرد تخمین انجام شد. نتایج نشان می‌دهد که افزایش بهره‌های تزریق تا یک ناحیه میانی موجب کاهش مؤثر خطای RMS و بهبود زمان نشست می‌شود؛ با این حال، مقادیر بسیار بزرگ بهره‌ها اگرچه می‌توانند خطای ماندگار را کاهش دهند، اما به دلیل تقویت مؤلفه سوئیچینگ، منجر به رفتار گذرای تندتر و افزایش حساسیت به نویز می‌شوند؛ بنابراین، انتخاب ضرایب نهایی بر اساس موازنه‌ای میان کاهش خطا، سرعت همگرایی و حفظ نرمی سیگنال تخمین صورت گرفته است. بر این اساس، مقادیر

$$\rho = [0, 100, 0]^T$$

$$k = [0, 100, 0]^T$$

به عنوان یک موازنه مناسب میان کاهش خطا و حفظ پاسخ گذرای کنترل شده انتخاب شدند. این انتخاب ضمن سازگاری با

به رؤیتگرهای مود لغزشی مرتبه بالا به عنوان یک رویه عملی متداول پذیرفته شده است.

5- نتایج شبیه‌سازی و تفسیر آن

برای ارزیابی عملکرد رؤیتگرهای پیشنهادی شامل RO-SMO و RO-HOSMO از نوع فرا پیچشی، مجموعه‌ای از شبیه‌سازی‌های عددی مبتنی بر مدل غیرخطی کامل سامانه EHS در برگیرنده اثرات اصطکاک کولمب، تراکم‌پذیری سیال و غیرخطی‌های شیر سروو انجام شده است. پارامترهای ثابت مدل مطابق مقادیر ارائه شده در مرجع [13] انتخاب شده‌اند. به منظور ارائه ارزیابی منسجم تحلیل‌ها در دو محور اصلی انجام شده است:

- 1- دقت و کیفیت تخمین حالت‌های اندازه‌گیری نشده، و
- 2- کارایی محاسباتی و هزینه اجرایی ساختارهای پیشنهادی در مقایسه با نسخه‌های مرتبه کامل.

برای جلوگیری از چت رینگ در ساختارهای لغزشی، تابع sgn در هر دو رؤیتگر با تابع اشباع لایه‌مرزی $\varepsilon = 10^{-3}$ جایگزین شده است. همچنین، به منظور ایجاد شرایط واقع‌بینانه‌تر در ارزیابی عملکرد رؤیتگرها، اغتشاشات مدل به صورت سیگنال‌های سینوسی کران‌دار در نظر گرفته شده‌اند:

$$\eta_y = \eta_{v_e} = 10^{-2} \sin(2\pi(0.1t))$$

بنابراین، اغتشاشات اعمال شده دارای دامنه و مشتق کران‌دار بوده و با فرضیات پایداری مورد استفاده در طراحی رؤیتگرها سازگار هستند. علاوه بر این، نویز اندازه‌گیری به صورت نویز سفید گوسی با میانگین صفر مدل‌سازی شده است و انحراف معیار آن برای سنسورهای موقعیت و موقعیت اسپول شیر به ترتیب برابر با:

$$\sigma_y = \sigma_{v_e} = 5 \times 10^{-3}$$

در نظر گرفته شده است. به منظور اعتبارسنجی نتایج و ایجاد مبنای مقایسه‌ای قابل اتکا، این دو ساختار در کنار دو رؤیتگر مرجع، یعنی EKF [13] و مشتق‌گیر فیلترشده¹ (FDOB)، تحت سه سناریوی تحریک سینوسی، پله و شیب و در حضور نویز اندازه‌گیری و عدم قطعیت‌های پارامتری تا $\pm 1.5\%$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هدف این بخش، تحلیل جامع چهار رؤیتگر در تخمین حالت‌های اندازه‌گیری نشده $\dot{v}_e$ و $\dot{v}_e$ بر اساس مجموعه‌ای از شاخص‌های استاندارد شامل RMS، Peak، مشتق خطا، زمان نشست و انرژی خطا است. برای ارزیابی عملکرد رؤیتگرها در طیف گسترده‌ای از شرایط کاری، مجموعه‌ای از ورودی‌های استاندارد به سامانه اعمال شده است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_1(t) = 2\sin(\pi t)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0.02 \\ 2 & t \geq 0.02 \end{cases}$$

$$u_3(t) = 10t$$

ورودی سینوسی با ایجاد تغییرات پیوسته در دینامیک سیستم، امکان بررسی عملکرد رؤیتگرها در شرایط گذرا و ماندگار را فراهم

¹ Filtered Derivative Observer

دوم Zero-Phase طراحی شده است که تابع تبدیل آن به صورت زیر است [24]:

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}, f_c = 50 \text{ Hz}, \omega_c = 2\pi f_c$$

مشتق زمانی سیگنال فیلترشده به عنوان تخمین حالت‌های سرعت $\dot{v}_e$ و $\dot{\gamma}$ مورد استفاده گردیده است.

علاوه بر ارزیابی دقت تخمین، تحلیل کارایی محاسباتی نیز به عنوان یکی از شاخص‌های کلیدی عملکرد مورد بررسی قرار گرفت. از دیدگاه ساختاری، در رؤیتگرهای مرتبه کامل، بردار حالت تخمین شامل تمامی حالات دینامیکی سامانه است و در نسخه فرا پیچشی، برای هر مؤلفه لغزش یک متغیر انتگرالی کمکی نیز افزوده می‌شود. در نتیجه، اگر مرتبه سیستم برابر n باشد، ساختار FO-HOSMO شامل n حالت اصلی و n متغیر کمکی فرا پیچشی است. در مقابل، در ساختارهای مرتبه کاهش یافته تنها زیرمجموعه‌ای از حالات اندازه‌گیری نشده مدل‌سازی می‌شود، به طوری که مرتبه دینامیکی به $n-r$ کاهش می‌یابد. از آنجاکه الگوریتم فرا پیچشی شامل عملیات غیرخطی نظیر تابع اشباع و ریشه دوم برای هر مؤلفه لغزش است، کاهش تعداد حالات مستقیماً موجب کاهش تعداد ارزیابی‌های غیرخطی در هر گام نمونه‌برداری می‌شود؛ بنابراین، پیچیدگی محاسباتی از مرتبه $O(n)$ به $O(n-r)$ تقلیل یافته و کاهش بار پردازشی به صورت ساختاری تضمین می‌شود.

به منظور تأیید عملی این استدلال نظری، یک بنچمارک زمانی تحت شرایط عددی یکسان برای تمامی ساختارها انجام شد. دوره نمونه‌برداری برابر با $(T_s = 10^{-5})$ و بازه زمانی شبیه‌سازی به صورت $t \in [0, 0.2] \text{ s}$ در نظر گرفته شد. هر آزمایش پنج بار به صورت مستقل تکرار گردید و زمان اجرای هر ساختار به صورت میانگین زمانی محاسبه شد. نتایج حاصل در جدول زیر ارائه شده‌اند [25].

جدول ۱: مقایسه زمان اجرای محاسباتی رؤیتگرهای مرتبه کامل و

مرتبه کاهش یافته

Observer Pair	Reduced-Order (s)	Full-Order (s)	Reduction (%)
SMO	0.279	0.766	63 %
HOSMO	0.533	0.813	34 %

بر اساس این نتایج، زمان اجرای RO-SMO برابر با 0.279 ثانیه و زمان اجرای FO-SMO برابر با 0.766 ثانیه است که نشان‌دهنده کاهش حدود 63٪ در زمان اجرا برای نسخه مرتبه کاهش یافته نسبت به نسخه مرتبه کامل متناظر خود است. به طور مشابه، در ساختار فرا پیچشی، RO-HOSMO با زمان اجرای 0.533 ثانیه در مقایسه با FO-HOSMO با زمان 0.813 ثانیه، حدود 34٪ کاهش در هزینه محاسباتی را نشان می‌دهد. این اختلاف ناشی از کاهش ساختاری مرتبه مدل در نسخه‌های مرتبه

چارچوب نظری پایداری، در تحلیل حساسیت نیز عملکرد مطلوبی از نظر RMS و زمان نشست نشان می‌دهد و از ورود به ناحیه ضرایب بسیار بزرگ که می‌تواند حساسیت به نویز را تشدید کند، جلوگیری می‌کند.

در مورد رؤیتگر RO-HOSMO نوع فرا پیچشی، قیود پایداری استخراج شده در رابطه (70) به صورت ذاتی محافظه کارانه بوده و مقادیر بسیار بزرگی برای ضرایب پیشنهاد می‌کنند تا همگرایی در بدترین حالات عدم قطعیت تضمین شود. با این حال، استفاده مستقیم از این کران‌های نظری در پیاده‌سازی عددی منجر به بهره‌های بیش از حد بزرگ و رفتار گذرای نامطلوب می‌شود. از این رو، مشابه رویه متداول در ادبیات رؤیتگرهای مود لغزشی مرتبه بالا، ابتدا قیود نظری به عنوان مرجع تضمین پایداری در نظر گرفته شد و سپس ضرایب از طریق تنظیم تجربی هدفمند کاهش داده شدند تا عملکرد عملی بهینه حاصل شود. در این فرایند، اثر تغییر ضرایب بر سرعت همگرایی، سطح نوسانات تخمین و حساسیت به نویز اندازه‌گیری مورد ارزیابی قرار گرفت و در نهایت مقادیر

$$\rho = [100, 100, 100]^T$$

$$k = [20, 20, 20]^T$$

$$c_2 = [200, 200, 200]^T, c_1 = \sqrt{2}c_2$$

به عنوان مقادیر نهایی انتخاب شدند که ضمن رعایت قیود نظری، بهترین توازن میان پایداری، دقت و نرمی سیگنال تخمین را فراهم می‌کنند.

برای اطمینان از مقایسه منصفانه، نسخه‌های مرتبه کامل SMO و HOSMO نیز مطابق ساختارهای نظریه معرفی شده و با بهره‌های عددی مشخص تنظیم شدند. در FO-SMO، مطابق رابطه (15)، ماتریس‌های ضرایب میرایی H و مقاومتی K به ابعاد 5×3 تعریف شدند و مقادیر آن‌ها به صورت زیر انتخاب گردید:

$$H = [0, 0, 50; 0, 0, 0; 0, 50, 0; 0, 0, 0; 50, 0, 0]$$

$$K = [0, 0, 200; 0, 0, 0; 0, 200, 0; 0, 0, 0; 200, 0, 0]$$

که در آن ستون‌ها متناظر با خروجی‌های اندازه‌گیری شده $v_e(t)$ و $\gamma(t)$ ، $P_L(t)$ و ردیف‌ها متناظر با پنج حالت سیستم هستند. در نسخه FO-HOSMO، نیز ضرایب ساختار فرا پیچشی به صورت زیر و از طریق تنظیم تجربی و آزمون و خطا انتخاب شدند تا بهترین عملکرد تخمینی حاصل گردد:

$$\rho = [100, 100, 100, 100, 100]^T$$

$$k = [20, 20, 20, 20, 20]^T$$

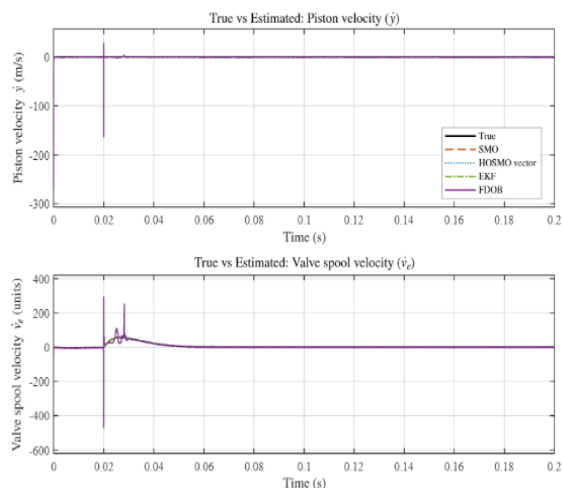
$$c_2 = [200, 200, 200, 200, 200]^T, c_1 = \sqrt{2}c_2$$

فیلتر EKF مطابق ساختار مرجع [13] پیاده‌سازی شده و ماتریس‌های کوواریانس فرایند و اندازه‌گیری برای تضمین پایداری و همگرایی مناسب به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

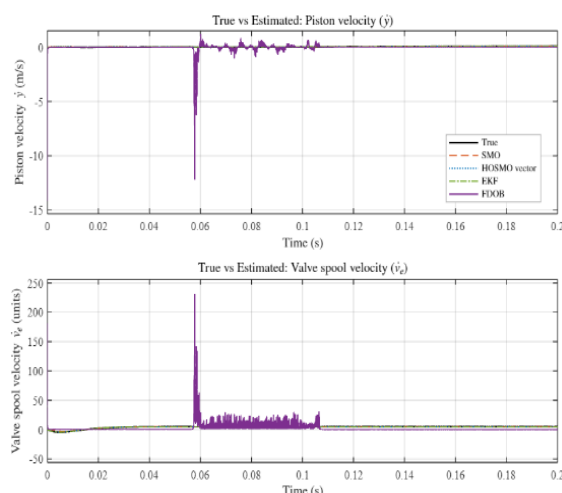
$$\begin{cases} Q = \text{diag}(10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-4}) \\ R = \text{diag}(\sigma_y^2, \sigma_{P_L}^2, \sigma_{v_e}^2) \\ P_0 = 10^{-2} I_5 \end{cases}$$

رؤیتگر FDOB نیز بر اساس مشتق‌گیری از سیگنال‌های اندازه‌گیری شده در کنار یک فیلتر پایین گذر Butterworth مرتبه

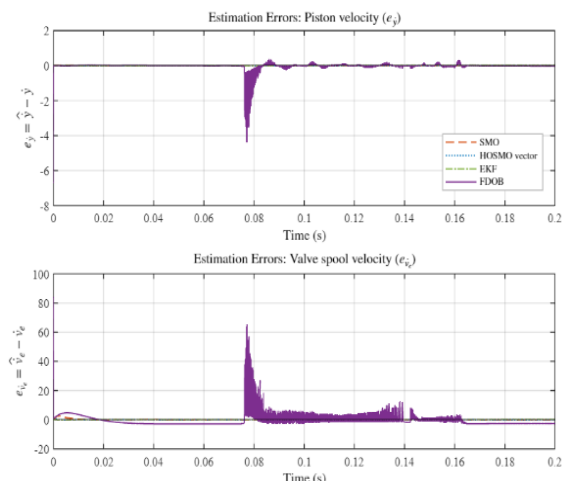
با نوسانات سریع دارد که می‌تواند منشأ چت رینگ باشد. درحالی‌که RO-HOSMO سیگنال‌هایی نرم‌تر و پیوسته‌تر تولید می‌کند که نشان‌دهنده‌ی پایداری بالاتر و کاهش چت رینگ در ساختار مرتبه بالا است.



شکل 5: حالت‌های واقعی و تخمینی تحت ورودی پله

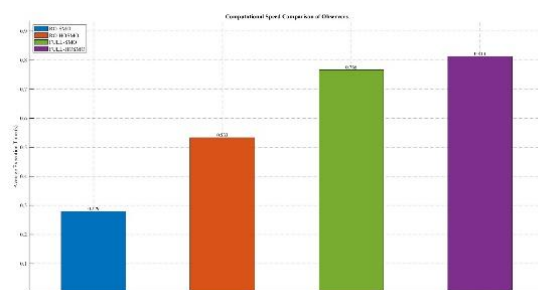


شکل 6: حالت‌های واقعی و تخمینی تحت ورودی شیب



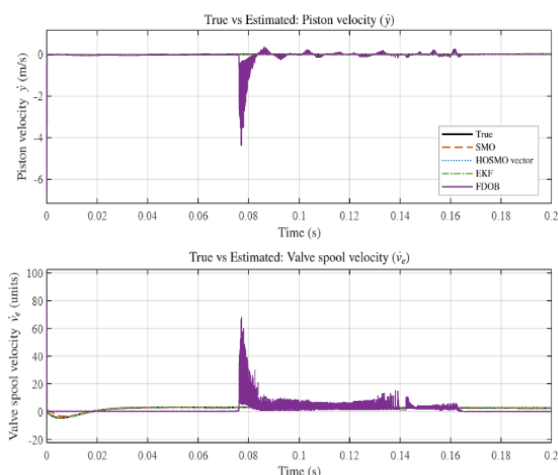
شکل 7: خطاهای تخمین تحت ورودی سینوسی

کاهش‌یافته است. اگرچه مقادیر مطلق زمان اجرا وابسته به پیکربندی سخت‌افزاری و محیط نرم‌افزاری هستند، اما کاهش ساختاری مرتبه مدل، مبنای نظری مستقلی برای بهبود کارایی فراهم می‌کند.



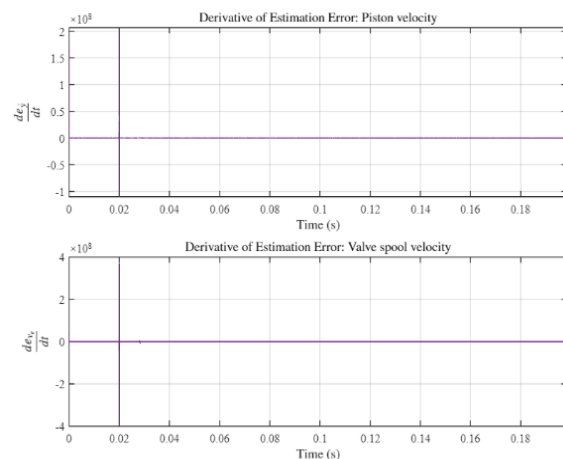
شکل 3: مقایسه میانگین زمان اجرای رهیترهای مورد بررسی

مقایسه کلی چهار ساختار در نمودار میله‌ای ارائه‌شده در شکل 3 به‌وضوح نشان می‌دهد که ساختارهای مرتبه کاهش‌یافته در هر دو خانواده SMO و HOSMO دارای هزینه اجرایی کمتر بوده و این موضوع آن‌ها را برای پیاده‌سازی بلادرنگ در سامانه‌های با منابع پردازشی محدود مناسب‌تر می‌سازد. با این حال، ارزیابی نهایی عملکرد رهیترها مستلزم بررسی هم‌زمان دقت تخمین و رفتار گذرای آن‌ها در سناریوهای مختلف تحریک و در حضور نویز و عدم قطعیت است. از این‌رو، در ادامه، نتایج کیفی و تحلیلی شبیه‌سازی برای مقایسه جامع چهار ساختار ارائه می‌شود. نتایج کیفی شبیه‌سازی در شکل‌های 4 تا 13 ارائه شده‌اند.

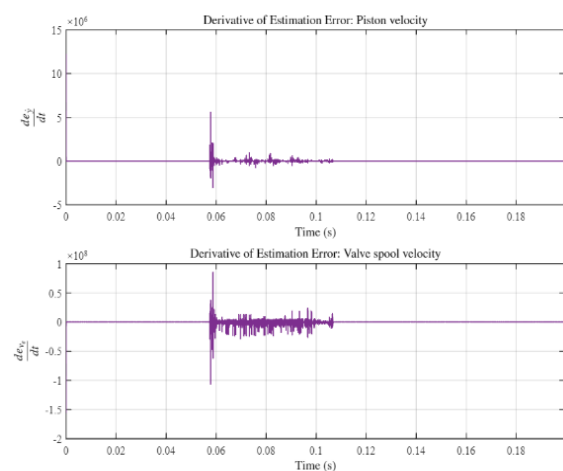


شکل 4: حالت‌های واقعی و تخمینی تحت ورودی سینوسی

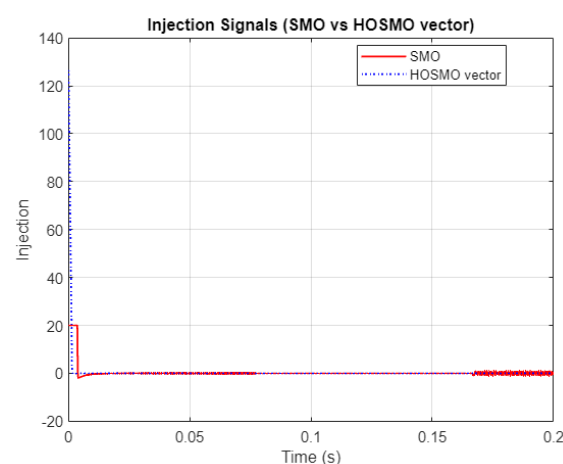
برای ارزیابی کیفی عملکرد رهیترها، مقایسه حالت‌های واقعی و تخمینی در شکل‌های 4 تا 6، خطاهای تخمین در شکل‌های 7 تا 9 و مشتق خطاها در شکل‌های 10 تا 12 تحت ورودی‌های مختلف ارائه شده است. همچنین، سیگنال‌های تزریق رهیترهای مورد لغزشی در شکل 13 نمایش یافته است. در این شکل مشاهده می‌شود که سیگنال تزریق RO-SMO ماهیتی اشباع‌شده



شکل ۱۱: مشتق خطاهای تخمین تحت ورودی پله



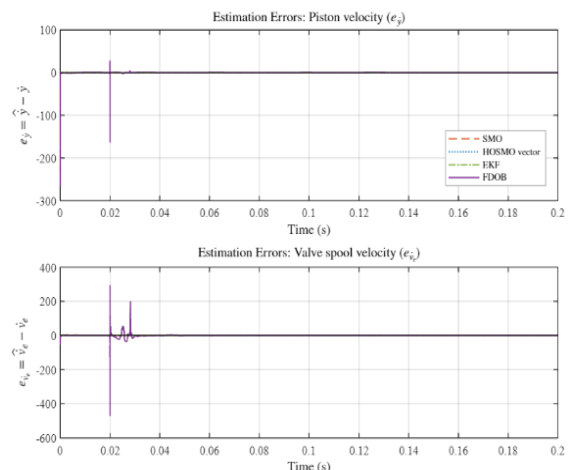
شکل ۱۲: مشتق خطاهای تخمین تحت ورودی شیب



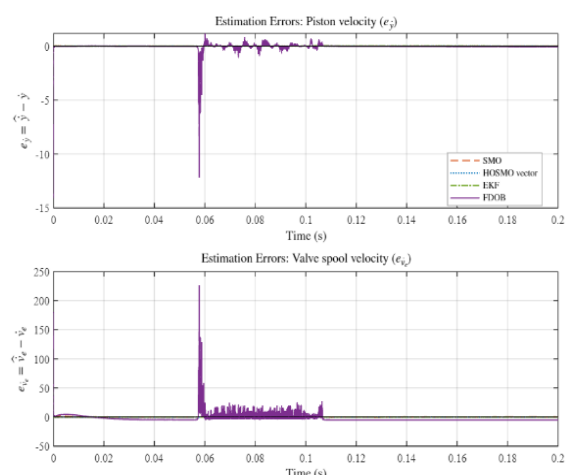
شکل ۱۳: سیگنال‌های تزریق رؤیتگرهای مود لغزشی

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که RMS خطاهای تخمین برای سرعت پیستون ($\dot{v}$) و سرعت قرقره شیر ($\dot{v}_e$) تحت ورودی‌های سینوسی، پله‌ای و شیب‌دار به طور قابل توجهی متفاوت است. تحت ورودی سینوسی، RO-HOSMO کمترین RMS را در هر دو حالت ارائه می‌دهد و دقت آن از RO-SMO و EKF بالاتر است، درحالی‌که FDOB بیشترین خطا را نشان می‌دهد. در

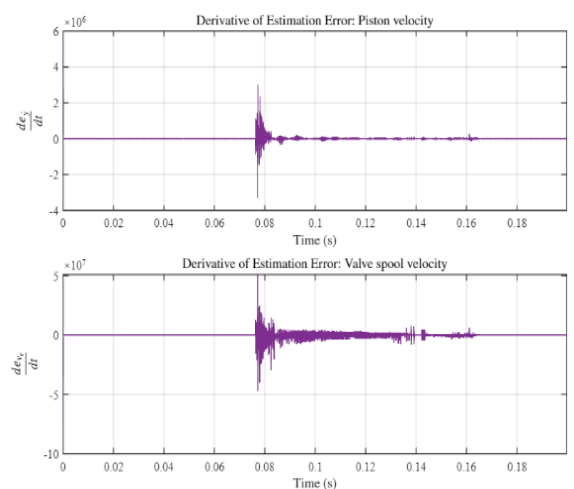
در ادامه، به منظور ارزیابی دقیق عملکرد رؤیتگرها، شاخص‌هایی نظیر RMS و Peak خطا، RMS و Peak مشتق خطا، زمان نشست و انرژی خطا برای حالت‌های سرعت پیستون ($\dot{v}$) و سرعت قرقره ($\dot{v}_e$) تحت ورودی‌های مختلف محاسبه شده و نتایج آن‌ها در جدول بعدی ارائه می‌شود.



شکل ۸: خطاهای تخمین تحت ورودی پله



شکل ۹: خطاهای تخمین تحت ورودی شیب



شکل ۱۰: مشتق خطاهای تخمین تحت ورودی سینوسی

حالت	ورودی	HOSMO	SMO	EKF	FDOB
$\dot{y}$	سینوسی	2.684	2.481	1.860	5.279×10^4
$\dot{v}_e$	سینوسی	4.005×10	4.871×10	1.047×10^4	1.036×10^6
$\dot{y}$	پله	1.060×10	1.081	1.505×10^{-1}	1.527×10^7
$\dot{v}_e$	پله	6.057×10^2	4.925×10^2	6.202×10^2	3.403×10^7
$\dot{y}$	شیب	2.646	2.124	1.684	1.232×10^5
$\dot{v}_e$	شیب	5.814×10	7.080×10	1.050	2.560×10^6

نتایج جدول 4 نشان می‌دهد که شاخص RMS مشتق خطا به‌عنوان معیار نرمی و پایداری دینامیکی تخمین در دو حالت $(\dot{y})$ و $(\dot{v}_e)$ الگوهای متفاوتی دارد. برای حالت $(\dot{y})$ ، ریتگر EKF در تمامی تحریک‌ها کمترین مقدار RMS مشتق خطا را ثبت کرده و یکنواخت‌ترین رفتار دینامیکی را ارائه می‌دهد؛ پس از آن RO-SMO و سپس RO-HOSMO قرار می‌گیرند، درحالی‌که FDOB همواره بزرگ‌ترین مقادیر را نشان می‌دهد. در مقابل، عملکرد ریتگرها برای $(\dot{v}_e)$ به نوع تحریک وابسته است: تحت ورودی سینوسی و پله‌ای، ریتگرهای مود لغزشی به‌ویژه RO-HOSMO پاسخ‌های نرم‌تر و پایدارتر از EKF دارند، اما تحت ورودی شیب‌دار EKF مجدداً بهترین رفتار دینامیکی را ارائه می‌کند. در مجموع، RO-HOSMO معمولاً در کنترل نرخ تغییر خطای $(\dot{v}_e)$ نسبت به RO-SMO برتری دارد و FDOB در همه سناریوها ضعیف‌ترین عملکرد را نشان می‌دهد. نتایج جدول 5 که بیشینه نرخ تغییر خطا را نشان می‌دهد، الگوی کاملاً مشابهی با تحلیل RMS مشتق خطاها دارد.

جدول 5: Peak مشتق خطاها

حالت	ورودی	HOSMO	SMO	EKF	FDOB
$\dot{y}$	سینوسی	6.088×10	9.325	5.922	5.816×10^6
$\dot{v}_e$	سینوسی	2.200×10^3	2.296×10^3	5.870×10^4	7.286×10^7
$\dot{y}$	پله	6.098×10	6.551	1.982	2.065×10^8
$\dot{v}_e$	پله	7.402×10^3	2.342×10^3	1.152×10^4	3.902×10^8
$\dot{y}$	شیب	6.095×10	8.107	5.539	1.224×10^7
$\dot{v}_e$	شیب	2.200×10^3	2.296×10^3	6.210×10	1.561×10^8

جدول 6: زمان نشست

حالت	ورودی	HOSMO	SMO	EKF	FDOB
$\dot{y}$	سینوسی	0.0005	0.072	0.200	0.086
$\dot{v}_e$	سینوسی	0.1933	0.193	0.200	0.143

ورودی پله‌ای، EKF کمترین RMS را ثبت کرد، اما ریتگرهای مود لغزشی همچنان نسبت به FDOB عملکرد مقاوم‌تری دارند. تحت تحریک شیب‌دار، RO-HOSMO بهترین عملکرد را حفظ کرده و اثر نویز و نوسانات تخمین در آن کاهش‌یافته است که برتری ساختار مرتبه بالای HOSMO را نشان می‌دهد.

جدول 2: RMS خطاهای تخمین

حالت	ورودی	HOSMO	SMO	EKF	FDOB
$\dot{y}$	سینوسی	3.547×10^{-4}	5.100×10^{-4}	1.262×10^{-2}	2.808×10^{-1}
$\dot{v}_e$	سینوسی	8.542×10^{-3}	4.573×10^{-2}	5.192×10^{-2}	4.789
$\dot{y}$	پله	3.422×10^{-3}	4.842×10^{-3}	6.567×10^{-5}	2.981×10
$\dot{v}_e$	پله	8.723×10^{-2}	4.500×10^{-1}	1.965×10^{-2}	6.010×10
$\dot{y}$	شیب	5.189×10^{-4}	7.317×10^{-4}	5.186×10^{-2}	8.020×10^{-1}
$\dot{v}_e$	شیب	1.250×10^{-2}	6.463×10^{-2}	4.768×10^{-3}	1.635×10

جدول 3: Peak خطاهای تخمین

حالت	ورودی	HOSMO	SMO	EKF	FDOB
$\dot{y}$	سینوسی	2.000×10^{-2}	2.000×10^{-2}	1.965×10^{-2}	6.675
$\dot{v}_e$	سینوسی	6.959×10^{-1}	2.503	2.428×10^{-1}	8.395×10
$\dot{y}$	پله	2.000×10^{-2}	2.000×10^{-2}	7.026×10^{-4}	2.677×10^2
$\dot{v}_e$	پله	6.975×10^{-1}	2.516	6.514×10^{-2}	4.725×10^2
$\dot{y}$	شیب	2.000×10^{-2}	2.000×10^{-2}	2.613×10^{-2}	1.407×10
$\dot{v}_e$	شیب	6.733×10^{-1}	2.504	4.245×10^{-2}	2.259×10^2

نتایج جدول 3 نشان می‌دهد که الگوی Peak خطا در سه ورودی تقریباً مشابه روند RMS است. تحت ورودی‌های سینوسی و شیب‌دار، ریتگرهای RO-HOSMO، RO-SMO و EKF در حالت $(\dot{y})$ دارای Peak خطای یکسان هستند، اما در حالت $(\dot{v}_e)$ مقدار Peak خطا در EKF کمترین و RO-HOSMO به‌مراتب کمتر از RO-SMO است. در ورودی پله‌ای، EKF کمترین Peak را در هر دو حالت ارائه می‌دهد، درحالی‌که RO-HOSMO همچنان در تخمین $(\dot{v}_e)$ دقیق‌تر از RO-SMO عمل می‌کند. در مقابل، FDOB در تمامی حالات و سناریوهای ورودی بیشترین مقدار خطا را ثبت می‌کند.

جدول 4: RMS مشتق خطاها

محاسباتی نشان داد که ساختار RO-SMO دارای کمترین هزینه اجرایی بوده و نسبت به نسخه مرتبه کامل متناظر خود حدود 63٪ کاهش زمان اجرا را فراهم می‌کند، درحالی‌که کاهش هزینه در RO-HOSMO حدود 34٪ است.

از این رو، انتخاب نهایی میان ساختارها وابسته به اولویت کاربردی سامانه است: در کاربردهایی که دقت و نرمی سیگنال تخمین اولویت اصلی است، RO-HOSMO گزینه برتر محسوب می‌شود؛ در مقابل، در سامانه‌های بلادرنج با محدودیت منابع پردازشی، RO-SMO می‌تواند به‌عنوان گزینه‌ای با توازن مناسب میان دقت قابل قبول و هزینه اجرایی پایین‌تر در نظر گرفته شود. در مجموع، ساختارهای مرتبه کاهش یافته ضمن حفظ پایداری نظری و دقت تخمین، مزیت ساختاری قابل توجهی از نظر پیچیدگی محاسباتی ارائه می‌کنند که آن‌ها را برای پیاده‌سازی عملی در سامانه‌های صنعتی EHS مناسب‌تر می‌سازد.

6- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، دو رؤیتگر مرتبه کاهش یافته مبتنی بر مد لغزشی شامل RO-SMO و RO-HOSMO به‌منظور تخمین حالت‌های اندازه‌گیری نشده در سامانه الکتروهیدرولیکی غیرخطی طراحی، تحلیل و ارزیابی شدند. مدل دینامیکی مورد استفاده با در نظر گرفتن مهم‌ترین غیرخطی‌های سامانه شامل اصطکاک کولمب، تراکم‌پذیری سیال و دینامیک غیرخطی شیر سروو توسعه یافت. به‌منظور ارزیابی جامع عملکرد، ساختارهای پیشنهادی در کنار دو روش مرجع EKF و FDOB تحت سناریوهای تحریک سینوسی، پله و شیب و در حضور نویز اندازه‌گیری و عدم قطعیت‌های پارامتری مورد بررسی قرار گرفتند.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها نشان داد که رؤیتگر RO-HOSMO در اغلب شاخص‌های عملکردی از جمله RMS خطا، انرژی خطا، زمان نشست و نرمی سیگنال تخمین، عملکردی برتر نسبت به سایر روش‌ها ارائه می‌دهد. همچنین بهره‌گیری از ساختار فرا پیچشی موجب کاهش محسوس چت رینگ و ایجاد سیگنال‌های تزریق هموارتر نسبت به رؤیتگر RO-SMO شده است که این موضوع بیانگر بهبود پایداری و کیفیت تخمین در ساختار مرتبه بالا است. در مقابل، اگرچه رؤیتگر RO-SMO از منظر دقت تخمین در برخی شاخص‌ها عملکردی ضعیف‌تر از RO-HOSMO دارد، اما به دلیل کاهش قابل توجه هزینه محاسباتی، گزینه‌ای مناسب برای کاربردهای بلادرنج با محدودیت منابع پردازشی محسوب می‌شود.

علاوه بر ارزیابی دقت تخمین، تحلیل کارایی محاسباتی نیز نشان داد که استفاده از ساختارهای مرتبه کاهش یافته منجر به کاهش محسوس هزینه اجرایی نسبت به نسخه‌های مرتبه کامل متناظر می‌شود؛ به‌گونه‌ای که زمان اجرای RO-SMO و RO-HOSMO

$\dot{y}$	پله	0.0005	0.198	0.028	0.020
$\dot{v}_e$	پله	0.2000	0.196	0.037	0.028
$\dot{y}$	شیب	0.0005	0.032	0.200	0.081
$\dot{v}_e$	شیب	0.1899	0.198	0.200	0.106

نتایج جدول 6 نشان می‌دهد که RO-HOSMO در تمامی شرایط ورودی سریع‌ترین همگرایی و پایدارترین رفتار گذرا را ارائه می‌کند. RO-SMO زمان نشست بیشتری دارد؛ اما از منظر پایداری عملکرد قابل قبولی حفظ می‌کند. EKF معمولاً کندترین همگرایی را نشان می‌دهد، هرچند پس از استقرار رفتار باثباتی دارد. مقادیر کوچک ثبت شده برای FDOB ناشی از نوسانات شدید و عبورهای مکرر از مرز خطا بوده و بیانگر پایداری واقعی نیست؛ از این رو ضعیف‌ترین عملکرد گذرا را دارد.

جدول 7: انرژی خطا

حالت	ورودی	HOSMO	SMO	EKF	FDOB
$\dot{y}$	سینوسی	5.699×10^{-8}	1.404×10^{-6}	1.666×10^{-5}	4.848×10^{-3}
$\dot{v}_e$	سینوسی	6.165×10^{-4}	2.508×10^{-2}	9.564×10^{-4}	2.173
$\dot{y}$	پله	5.621×10^{-8}	1.181×10^{-6}	5.381×10^{-1}	2.396×10^{-1}
$\dot{v}_e$	پله	8.357×10^{-4}	2.820×10^{-2}	4.539×10^{-5}	1.119×10
$\dot{y}$	شیب	5.650×10^{-8}	1.309×10^{-6}	2.449×10^{-5}	1.249×10^{-2}
$\dot{v}_e$	شیب	7.042×10^{-4}	2.485×10^{-2}	8.102×10^{-6}	7.967

نتایج جدول 7 نشان می‌دهد که انرژی خطای تخمین در دو حالت $(\dot{y})$ و $(\dot{v}_e)$ الگوهای متفاوتی دارد. در متغیر $(\dot{y})$ رؤیتگر RO-HOSMO در تمامی تحریک‌ها کمترین انرژی خطا را با اختلاف چندمرتبه بزرگی نسبت به سایر روش‌ها ثبت کرده و پایدارترین رفتار تجمعی را ارائه می‌دهد؛ پس از آن RO-SMO قرار گرفته و EKF و به‌ویژه FDOB مقادیر بسیار بزرگ‌تری نشان می‌دهند. در مقابل، در حالت $(\dot{v}_e)$ عملکرد روش‌ها به نوع تحریک وابسته است: تحت تحریک سینوسی، RO-HOSMO کمترین انرژی خطا را دارد، اما در تحریک‌های پله و شیب، EKF بهترین رفتار تجمعی را ارائه می‌کند و دو روش مود لغزشی در رتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند. در تمامی حالات، FDOB بیشترین انرژی خطا را ثبت کرده و بالاترین حساسیت به نویز را نشان می‌دهد.

در مجموع، نتایج عددی نشان می‌دهد که RO-HOSMO پایدارترین و دقیق‌ترین عملکرد تخمین را در اغلب شاخص‌ها ارائه می‌کند و به‌ویژه در کاهش RMS و انرژی خطا برتری محسوس نسبت به سایر روش‌ها دارد. با این حال، تحلیل کارایی

در مجموع، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که ساختار RO-HOSMO به دلیل برخورداری از دقت تخمین بالا، پایداری مناسب و مقاومت مطلوب در برابر نویز و عدم قطعیت، گزینه‌ای کارآمد برای تخمین حالت در سامانه‌های الکتروهیدرولیکی غیرخطی محسوب می‌شود. همچنین ساختار RO-SMO باتوجه به سادگی و هزینه اجرایی پایین‌تر، می‌تواند در کاربردهای صنعتی با محدودیت‌های سخت‌افزاری مورد استفاده قرار گیرد.

باتوجه به نتایج به‌دست‌آمده، مسیرهای زیر می‌توانند به‌عنوان زمینه‌های توسعه آتی این پژوهش مطرح شوند:

- توسعه نسخه‌های تطبیقی و خودتنظیم از رؤیتگرهای مرتبه بالا به منظور تنظیم برخط ضرایب و بهبود عملکرد در شرایط کاری متغیر؛
- پیاده‌سازی عملی رؤیتگرهای پیشنهادی بر روی سامانه‌های الکتروهیدرولیکی واقعی و انجام اعتبارسنجی تجربی؛
- ادغام ساختارهای پیشنهادی با کنترل‌کننده‌های مقاوم، تطبیقی و پیش‌بین به منظور ارتقای عملکرد حلقه کنترل؛
- بررسی عملکرد رؤیتگرها در حضور نامعینی‌های گسترده‌تر شامل تغییرات فشار تغذیه، ناشی داخلی و پارامترهای اصطکاک؛
- توسعه ساختارهای مد لغزشی مرتبه بالا با توابع تزریق نرم‌تر جهت کاهش بیشتر چت رینگ و بهبود همواری پاسخ تخمین؛
- بهره‌گیری از روش‌های مبتنی بر یادگیری ماشین و شبکه‌های عصبی برای تخمین نامعینی‌های مدل‌نشده و طراحی رؤیتگرهای هوشمند سازگار با شرایط عملیاتی ناشناخته.

7- مراجع

- [1] Zare, A., Jahanshahi, M. Speed Control of Electro-Hydraulic Servo Systems Using a Hybrid Fuzzy Method. *Aerospace Mechanics*, 2019; 15(1): 39–50. (In Persian) DOI: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1398.15.1.4.1>
- [2] Hedrick JK, Rajamani R, Yi K. Observer design for electronic suspension applications. *Vehicle System Dynamics*. 1994;23(1):413–440. DOI <https://doi.org/10.1080/00423119408969068>
- [3] An L, Sepehri N. Hydraulic actuator circuit fault detection using extended Kalman filter. *Proceedings of the American Control Conference*. 2003. DOI <https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1240505>
- [4] Khoshzaban M, Sassani F, Lawrence P. Online state and parameter estimation of an electrohydraulic valve for intelligent monitoring. *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. 1997. DOI <https://doi.org/10.1109/AIM.1997.653015>
- [5] Sepasi M, Sassani F. On-line fault diagnosis of hydraulic systems using unscented Kalman filter. *International Journal of Control, Automation and Systems*. 2010;8:149–156. DOI <https://doi.org/10.1007/s12555-010-0119-6>
- [6] Pan C, Wang Y, Yang SX, Li Z, Xiao J. Compensation function observer-based backstepping sliding-mode control

به ترتیب حدود 63٪ و 34٪ کمتر از ساختارهای مرتبه کامل متناظر آن‌ها است. این نتایج نشان می‌دهد که کاهش مرتبه دینامیکی، ضمن حفظ پایداری و دقت تخمین، می‌تواند بستر مناسبی برای پیاده‌سازی عملی رؤیتگرها در سامانه‌های صنعتی الکتروهیدرولیکی فراهم سازد.

جدول 8: جمع‌بندی مقایسه عملکرد رؤیتگرهای مورد بررسی

شاخص عملکرد	RO-HOSMO	RO-SMO	EKF	FDOB
دقت تخمین (RMS Energy)	بسیار عالی	خوب	متوسط تا خوب	ضعیف
نرمی سیگنال تخمین	بسیار عالی	متوسط	خوب	ضعیف
کاهش چت رینگ	بسیار عالی	متوسط	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر نویز و عدم قطعیت	بسیار عالی	خوب	متوسط	ضعیف
سرعت همگرایی	بسیار سریع	سریع	متوسط	ناپایدار
هزینه محاسباتی	متوسط	بسیار کم	متوسط	کم
مناسب برای پیاده‌سازی بلادرنگ	خوب	بسیار مناسب	متوسط	محدود
عملکرد کلی	بهترین عملکرد	توازن مناسب دقت و هزینه	عملکرد قابل قبول	ضعیف‌ترین عملکرد

همان‌گونه که در جدول 8 مشاهده می‌شود، رؤیتگر RO-HOSMO در اغلب شاخص‌های کلیدی عملکرد شامل دقت تخمین، نرمی پاسخ، مقاومت در برابر نویز و کاهش چت رینگ برتری محسوسی نسبت به سایر روش‌ها دارد. در مقابل، ساختار RO-SMO اگرچه از منظر دقت در رتبه پایین‌تری نسبت به RO-HOSMO قرار می‌گیرد، اما به دلیل هزینه محاسباتی کمتر، گزینه‌ای مناسب برای کاربردهای بلادرنگ و سامانه‌های با محدودیت پردازشی محسوب می‌شود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که روش FDOB در اغلب شاخص‌ها عملکرد ضعیف‌تری نسبت به سایر ساختارها داشته است.

- [22] Moreno JA, Osorio M. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. 2008;2856–2861. DOI <https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739356>
- [23] Ilten E, Demirtas M. Fractional order super-twisting sliding mode observer for sensorless control of induction motor. COMPEL. 2019;38(2):878–892. DOI <https://doi.org/10.1108/COMPEL-08-2018-0306>
- [24] Mojallizadeh, M. R., Laghrouche, S., Harmouche, M., Olaby, O. A Survey on the Discrete-Time Differentiators in Closed-Loop Control Systems: Experiments on an Electro-Pneumatic System. Control Engineering Practice, 2023; 136: 105546. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2023.105546>
- [25] Sorel, Y., Hawila, I., Cucu-Grosjean, L., Mezouak, M., Clarke, H., Ben Amor, S. Kopernic Dynamic Benchmarks (KDBench): Open-Source Measurement-Based Benchmarks for Probabilistic Real-Time Systems. RTSS@Work 2024 – IEEE Real-Time Systems Symposium Workshops (RTSSW), 2024; pp. 565–572. DOI: <https://doi.org/10.1109/RTSS62706.2024.00027>
- of uncertain electro-hydraulic servo system. Machines. 2024;12(10):719. DOI <https://doi.org/10.3390/machines12100719>
- [7] Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. International Journal of Control. 1993;58(6):1247–1263. DOI <https://doi.org/10.1080/00207179308923053>
- [8] Wang Y, Zhao J, Zhang H, Wang H. Robust output feedback control for electro-hydraulic servo system with error constraint based on high-order sliding mode observer. Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2023. DOI <https://doi.org/10.1177/01423312221146225>
- [9] Palli G, Strano S, Terzo M. A novel adaptive-gain technique for high-order sliding-mode observers with application to electro-hydraulic systems. Mechanical Systems and Signal Processing. 2020;144:106875. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106875>
- [10] Bahrami R, Celler BG, Savkin AV. Adaptive super-twisting observer for fault reconstruction in electro-hydraulic systems. 2020. DOI <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.03411>
- [11] M. H. Nguyen and K. K. Ahn, "Extended Sliding Mode Observer-Based Output Feedback Control for Motion Tracking of Electro-Hydrostatic Actuators," Mathematics, vol. 11, no. 20, p. 4324, 2023. DOI <https://doi.org/10.3390/math11204324>
- [12] Khan Kalantari, S., Mohammadkhani, H. Design of a Robust Nonlinear Autopilot Using Feedback Linearization and an Augmented State Observer for Air-Defense Interceptors. Aerospace Mechanics, 2021; 17(2): 1–12. (In Persian) DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455323.1400.17.2.1.4>
- [13] Palli G, Strano S, Terzo M. Sliding-mode observers for state and disturbance estimation in electro-hydraulic systems. Control Engineering Practice. 2018;74:58–70. DOI <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2018.02.005>
- [14] A. Bonchis, P. I. Corke, and D. C. Rye, "A pressure-based, velocity independent, friction model for asymmetric hydraulic cylinders," in Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Autom., 1999, vol. 3, pp. 1746–1751. DOI <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1999.770361>
- [15] H. E. Merritt, *Hydraulic Control Systems*, John Wiley & Sons, 1967.
- [16] L. Mrton, S. Fodor, and N. Sepeshri, "A practical method for friction identification in hydraulic actuators," Mechatronics, vol. 21, no. 1, pp. 350–356, 2011. DOI <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.08.010>
- [17] Chen Y, Ji Y, Guo K. A reduced-order nonlinear sliding mode observer for vehicle slip angle and tyre forces. Vehicle System Dynamics. 2014. DOI <https://doi.org/10.1080/00423114.2014.960430>
- [18] Alessandri, Angelo, Patrizia Bagnerini, and Roberto Ciani. "State Observation for Lipschitz Nonlinear Dynamical Systems Based on Lyapunov Functions and Functionals." Mathematics 8.9 (2020): 1424. DOI <https://doi.org/10.3390/math8091424>
- [19] Ruderman, M. Reduced-Order Asymptotic Observer of Nonlinear Friction for Precise Motion Control. Control Engineering Practice, 2026; 168: 106733. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2025.106733>
- [20] Ao, W., Zhang, H., Zhao, N., and Minchala, L. I. Adaptive Neural Security Control for Networked Singular Systems Under Deception Attacks. IEEE Access, 2022; 10: 33230–33237. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3161672>
- [21] Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International Journal of Control. 2003;76(9–10):924–941. DOI <https://doi.org/10.1080/0020717031000099029>